S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 20, №2, стр. 1026–1036 (2023) УДК 517.984

DOI 10.33048/semi.2023.20.063 MSC 15A29,34A55,47B36

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ АНТИСИММЕТРИЧНОЙ ТРЕХДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

А.И. Гудименко

Abstract. The problem of recovering an antisymmetric tridiagonal matrix from the eigenvalues of this matrix and the normalizing constants for its eigenvectors is solved. Matrices of this type arise in the theory of small oscillations of mechanical systems and are related to the matrices of the systems through the Schrödinger transformation. The problem is solved by the method of orthogonal polynomials.

Keywords: inverse spectral problem, antisymmetric tridiagonal matrix, Schrödinger variables.

1. Введение

В работе решается задача о восстановлении трехдиагональной антисимметричной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_0 & 0 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{N-2} & 0 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$a_0, \ldots, a_{N-2} > 0,$$

по ее спектральным данным. В качестве спектральных данных берутся собственные значения матрицы A и нормировочные константы для ее собственных векторов.

Gudimenko, A.I., Inverse spectral problem for an antisymmetric tridiagonal matrix.

Поступила 26 февраля 2023 г., опубликована 12 ноября 2023 г.

Данная задача относится к классу матричных обратных спектральных задач. Последние возникают в теории малых колебаний механических систем и имеют приложение, например, к изоспектральным потокам [1]. Эти задачи рассматривались ранее в основном для симметричных матриц, поскольку именно такие матрицы принято ассоциировать с линейными колебательными системами [2, 3, 4]. Например, так называемая классическая матричная обратная спектральная задача имеет дело с матрицей Якоби — симметричной трехдиагональной матрицей с положительными внедиагональными элементами. Такая матрица ассоциируется, например, с системой линейно связанных гармонических осцилляторов, взаимодействующих ближайшими соседями (кратко — гармонической цепью) [4]. Случай антисимметричных матриц, по-видимому, специально не рассматривался.

Между тем, трехдиагональные антисимметричные матрицы также естественным образом связаны с линейными колебательными системами. Рассмотрим в качестве примера следующую задачу о вибрациях в гармонической цепи с закрепленными концами:

$$
\begin{gathered}
m_l\ddot{q}_l = -k_l(q_l - q_{l-1}) + k_{l+1}(q_{l+1} - q_l), \quad l = 0, \ldots, L-1, \\
q_{-1} = 0, \quad q_L = 0,
\end{gathered} \tag{2}
$$

где m_l интерпретируется как масса l-го осциллятора, k_l — как жесткость пружины, соединяющей этот осциллятор с предыдущим, q_l — как отклонение l-го осциллятора от положения равновесия, L — как длина цепи. Положим

$$
x_{2l+1} = \sqrt{m_l}\dot{q}_l, \quad x_{2l} = \sqrt{k_l}(q_l - q_{l-1}). \tag{3}
$$

В новых переменных задача (2) принимает вид

$$
\begin{gathered}
\dot{x}_l = a_l x_{l+1} - a_{l-1}x_{l-1}, \quad l = 0, \ldots, N-1, \\
x_{-1} = x_N = 0,
\end{gathered} \tag{4}
$$

где

$$
a_{2l+1} = \sqrt{\frac{k_{l+1}}{m_l}}, \quad a_{2l} = \sqrt{\frac{k_l}{m_l}} \tag{5}
$$

и $N = 2L+1$. Мы видим, что матрица системы (4) совпадает с матрицей (1), то есть является антисимметричной трехдиагональной матрицей.

Введенное нами преобразование (3), (5) мы называем преобразованием Шредингера, так как оно впервые появляется в работе [5] этого автора, правда, для случая $a_l = 1$, $l = 0, \ldots, N-2$.

С учетом этого преобразования можно сделать вывод, что обратная спектральная задача для антисимметричной трехдиагональной матрицы является следствием и во многом эквивалентна одноименной задаче для матрицы Якоби. Однако прямое ее решение, без ссылок на преобразование Шредингера, также на наш взгляд представляет интерес, так как позволяет выявить взаимные особенности решения этих задачи и глубже понять их структуру. Например, становится ясным, что используемые в матричных обратных спектральных задачах многочлены Кауэра-Фрая (Cauer-Fry polynomials) [6, 4] являются в сущности преобразованием Шредингера ортогональных многочленов, ассоциированных с матрицей Якоби. Эти вопросы, впрочем, находятся вне рамок данной статьи.

Актуальность настоящей работы подтверждается неослабевающим вниманием к обратным матричным спектральным задачам вообще и к обратной спектральной задаче для матрицы Якоби в частности. Из числа последних работ см., например, [7, 8, 9, 10, 11].

Рассматриваемая задача решается стандартным образом, используя технику ортогональных многочленов [12, 13, 14].

Помимо введения, статья содержит три раздела. В первом мы вводим ортогональные многочлены, отвечающие матрице A, и описываем в их терминах спектральные данные этой матрицы. Во втором, наоборот, по произвольным спектральным данным мы конструируем ортогональные многочлены и соответствующую им антисимметричную трехдиагональную матрицу. В третьем даем формальное решение задачи и приводим простой пример восстановления матрицы.

2. Спектральные данные

Здесь мы описываем спектральные данные матрицы (1), следуя схеме описания спектральных данных матрицы Якоби в формализме ортогональных многочленов [12, 13, 14].

Задачу на собственные значения для матрицы A сформулируем как граничную задачу для рекуррентного соотношения (разностного уравнения)

$$\begin{gathered} a_l x_{l+1} - a_{l-1} x_{l-1} = \lambda x_l, \quad l = 0, \dots, N-1, \\ a_{-1} = a_{N-1} = 1, \quad a_l > 0, \end{gathered} \tag{6}$$

с граничными условиями

$$x_{-1} = x_N = 0. \tag{7}$$

Решение задачи (6), (7) дадим в терминах следующих многочленов.

Определение 1. *Определим многочлены $p_l(\lambda)$, $l = -1, \dots, N$, как решение уравнения* (6) *с начальными условиями*

$$x_{-1} = 0, \quad x_0 = 1. \tag{8}$$

Предложение 1. *Собственные значения λ_k, $k = 0, \dots, N-1$, матрицы A суть нули многочлена $p_N(\lambda)$. Значению λ_k отвечает собственный вектор с компонентами $p_0(\lambda_k), \dots, p_{N-1}(\lambda_k)$.*

Доказательство. Отправляясь от решения $p_l(\lambda)$, $l = -1, \dots, N$, задачи (6), (8) и требуя $p_N(\lambda) = 0$, мы находим ненулевые решения задачи (6), (7), то есть собственные значения и собственные векторы матрицы A. Обратно, нетрудно видеть, решая (6) итерациями, что любое ненулевое решение задачи (6), (7) пропорционально найденному. □

Лемма 1. *Справедливы соотношения*

$$p_l(-\lambda) = (-1)^l p_l(\lambda), \quad -1 \le l \le N, \tag{9}$$

$$(\lambda - \mu) \sum_{l'=0}^{l} (-1)^{l'-l} p_{l'}(\lambda) p_{l'}(\mu) = a_l \begin{vmatrix} p_{l+1}(\lambda) & p_{l+1}(\mu) \\ p_l(\lambda) & p_l(\mu) \end{vmatrix}, \quad 0 \le l \le N-1, \tag{10}$$

$$\sum_{l'=0}^{l} (-1)^{l'-l} [p_{l'}(\lambda)]^2 = a_l \begin{vmatrix} \dot{p}_{l+1}(\lambda) & p_{l+1}(\lambda) \\ \dot{p}_l(\lambda) & p_l(\lambda) \end{vmatrix}, \quad 0 \le l \le N-1, \tag{11}$$

где точка означает дифференцирование по λ. В частности, из (9) *и* (11) *следует, что*

$$\dot{p}_{l+1}(\lambda)p_l(-\lambda) - p_{l+1}(\lambda)\dot{p}_l(-\lambda) > 0. \tag{12}$$

Доказательство. Последовательность $(-1)^l p_l(-\lambda)$, $l = -1, \dots, N$, является решением начальной задачи (6), (8) и, следовательно, совпадает с последовательностью $p_l(\lambda)$, $l = -1, \dots, N$. Это доказывает (9). Для доказательства (10) запишем (6) для двух аргументов

$$\lambda x_l(\lambda) = a_l x_{l+1}(\lambda) - a_{l-1}x_{l-1}(\lambda), \quad \mu x_l(\mu) = a_l x_{l+1}(\mu) - a_{l-1}x_{l-1}(\mu)$$

и вычтем из первого уравнение второе, предварительно умножив их на $x_l(\mu)$ и $x_l(\lambda)$ соответственно. Получим разностное уравнение

$$(\lambda - \mu)x_l(\lambda)x_l(\mu) = a_l \begin{vmatrix} x_{l+1}(\lambda) & x_{l+1}(\mu) \\ x_l(\lambda) & x_l(\mu) \end{vmatrix} + a_{l-1} \begin{vmatrix} x_l(\lambda) & x_l(\mu) \\ x_{l-1}(\lambda) & x_{l-1}(\mu) \end{vmatrix},$$

решение которого есть (10).

Соотношение (11) следует из (10) по правилу Лопиталя. □

Предложение 2. *Собственные значения матрицы A чисто мнимы и просты, собственные векторы ортогональны*

$$\sum_{l=0}^{N-1} p_l(\lambda_k)\bar{p}_l(\lambda_{k'}) = \rho_k \delta_{k,k'}, \quad k, k' = 0, \dots, N-1, \tag{13}$$

где

$$\rho_k = \sum_{l=0}^{N-1} |p_l(\lambda_k)|^2.$$

Доказательство. Пусть λ — нуль многочлена $p_N(\lambda)$ с неравной нулю действительной частью, то есть $p_N(\lambda) = p_N(\bar{\lambda}) = 0$ и $\lambda + \bar{\lambda} \neq 0$. Положим в (10) $l = N-1$ и $\mu = -\bar{\lambda}$. С учетом (9) правая часть этого соотношения равна нулю, а левая отлична от нуля. Противоречие. Следовательно, все нули $p_N(\lambda)$ чисто мнимы.

Покажем, что эти нули простые. Предположим, что λ — кратный нуль. Тогда $p_N(\lambda) = \dot{p}_N(\lambda) = 0$, и рассуждения, аналогичные только что проведенным, но по отношению к (11) и с учетом доказанной чистой мнимости нулей, снова приводят к противоречию.

Равенство (13) следуют из (9)–(11) и доказанных свойств нулей. □

Определение 2. *Величина $\beta_k = 1/\rho_k$, $0 \le k \le N-1$, называется нормировочной константой, отвечающей собственному значению λ_k.*

В пространстве $\mathbb{C}_N[\lambda]$ многочленов от λ степени $\le N$ с комплексными коэффициентами определим билинейную эрмитову форму

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k x(\lambda_k)\overline{y(\lambda_k)}. \tag{14}$$

Основные свойства многочленов $p_l(\lambda)$ описываются в следующем предложении.

Предложение 3. *Справедливы утверждения.*

1) *Многочлены* $p_l(\lambda)$, $l = 0, \dots, N-1$, *ортонормальны относительно формы* (14)*:*

$$\langle p_l, p_{l'} \rangle = \delta_{l,l'}, \quad l, l' = 0, \dots, N-1. \tag{15}$$

2) *Их коэффициенты неотрицательны. Как функции* λ *они четные при четных* l *и нечетные при нечетных* l.
3) *Нули многочленов чисто мнимы и просты.*

Доказательство. 1) Обозначим T матрицу перехода к базису из собственных векторов матрицы A и положим $\rho = [\rho_0, \dots, \rho_{N-1}]$, $\beta = [\beta_0, \dots, \beta_{N-1}]$. В матричной форме соотношения (13) и (15) представляются равенствами $T^*T = \operatorname{diag}\rho$ и $T \operatorname{diag}\beta T^* = I$ соответственно. С учетом невырожденности матриц T, $\operatorname{diag}\rho$ и $\operatorname{diag}\beta$ эти равенства эквивалентны, что и доказывает утверждение.

2) Неотрицательность коэффициентов следует из (6) и (8), их четность или нечетность — из (9).

3) Просто переходим от N к $N-1$ в ранее доказанных утверждениях. $\square$

Следствие 1. *Нормировочные числа матрицы* A *связаны соотношением*

$$\beta_0 + \dots + \beta_{N-1} = 1. \tag{16}$$

Доказательство. Следует из (15) при $l = l' = 0$. $\square$

В заключение раздела соберем вместе полученные сведения о спектральных данных матрицы A, то есть — о ее собственных значениях $\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1}$ и нормировочных константах $\beta_0, \dots, \beta_{N-1}$ ее собственных векторов. Мы получили, что собственные значения чисто мнимы и просты, а их совокупность замкнута относительно комплексного сопряжения. Нормировочные константы положительны и связаны соотношением (16). Комплексно сопряженным собственным значениям отвечают равные нормировочные константы.

3. Ортогональные многочлены и алгоритм восстановления

В этом разделе мы строим последовательность многочленов из $C_N[\lambda]$, ортонормальных относительно формы (14), в предположении, что $\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1}$ и $\beta_0, \dots, \beta_{N-1}$ — произвольные числа, подчиненные найденным свойствам спектральных данных. Мы показываем, что эта последовательность удовлетворяет рекуррентному соотношению с коэффициентами, составляющим антисимметричную трехдиагональную матрицу. Эти построения составляют основу алгоритма восстановления матрицы A по спектральным данным.

Зададимся базисной последовательностью одночленов $\lambda^0, \dots, \lambda^N$ в $\mathbb{C}_N[\lambda]$ и, следуя известной процедуре ортогонализации [15], построим последовательность многочленов $x_0(\lambda), \dots, x_N(\lambda) \in \mathbb{C}_N[\lambda]$, удовлетворяющих условиям

$$\langle x_l, x_{l'} \rangle = \delta_{l,l'}, \quad \langle x_l, x_N \rangle = 0, \quad l, l' = 0, \dots, N-1. \tag{17}$$

Примем обозначения

$$s_{m,n} = \langle \lambda^m, \lambda^n \rangle = (-1)^n \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k \lambda_k^{m+n}, \tag{18}$$

$$D_{-1} = 1, \quad D_l = \begin{vmatrix} s_{0,0} & \cdots & s_{0,l} \\ s_{1,0} & \cdots & s_{1,l} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{l,0} & \cdots & s_{l,l} \end{vmatrix}, \quad D_l(\lambda) = \begin{vmatrix} s_{0,0} & \cdots & s_{0,l} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{l-1,0} & \cdots & s_{l-1,l} \\ 1 & \cdots & \lambda^l \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Лемма 2. *Определители D_l и $D_l(\lambda)$ обладают следующими свойствами:*

1) *$D_l > 0$ при $l = 0, \ldots, N-1$ и $D_N = 0$.*
2) *$D_l(\lambda)$ — четный многочлен при четном l и нечетный при нечетном l.*
3) *Нули многочлена $D_N(\lambda)$ совпадают с $\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-1}$.*

Доказательство. 1) Справедлива цепочка отношений

$$\sum_{m,n=0}^{l} s_{m,n} x_m \bar{x}_n = \sum_{m,n=0}^{l} \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k \lambda_k^m \bar{\lambda}_k^n x_m \bar{x}_n = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k \sum_{m,n=0}^{l} \lambda_k^m x_m \overline{\lambda_k^n x_n}$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k \Big| \sum_{m=0}^{l} \lambda_k^m x_m \Big|^2 \geq 0.$$

Согласно этой цепочке форма, определенная крайним слева выражением, неотрицательна при любом $l \geq 0$, а ее равенство нулю определяется разрешимостью системы уравнений

$$\sum_{m=0}^{l} \lambda_k^m x_m = 0, \quad k = 0, \ldots, N-1.$$

Матрица этой системы есть матрица Вандермонда, и в силу простоты $\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-1}$ ее ранг меньше l тогда и только тогда, когда $l \geq N$. Это означает, что при $l \geq N$ и только при этом условии система имеет нетривиальное решение, а рассматриваемая эрмитова форма — нетривиальный нуль. Для завершения доказательства свойства 1) осталось сослаться на известное из линейной алгебры утверждение о том, что неотрицательная эрмитова форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда ее определитель не обращается в нуль.

2) Коэффициент при λ^k, $0 \leq k \leq l$, многочлена $D_l(\lambda)$ совпадает с точностью до знака с определителем матрицы, полученной из матрицы $[s_{m,n}]$, $m, n = 0, \ldots, l$, удалением $(k+1)$-ой строки и последнего столбца. Из (18) и свойств спектральных данных следует, что $s_{m,n} = 0$ при нечетных $m + n$. Поэтому ранг полученной матрицы есть сумма рангов матриц ее четных и нечетных столбцов. Нетрудно понять, что эта сумма равна l при $k = l, l-2, \ldots$ и $l-1$ при остальных значениях k.

3) Равенство нулю определителя $D_N(\lambda)$ эквивалентно нетривиальной разрешимости системы уравнений

$$\begin{bmatrix} s_{0,0} & \cdots & s_{0,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{N-1,0} & \cdots & s_{N-1,N} \\ 1 & \cdots & \lambda^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ \cdots \\ \cdots \\ c_N \end{bmatrix} = 0, \tag{20}$$

или

$$\sum_{n=0}^{N} s_{m,n} c_n = 0, \quad m = 0, \ldots, N-1, \quad \sum_{n=0}^{N} c_n \lambda^n = 0.$$

Так как

$$\sum_{n=0}^{N} s_{m,n} c_n = \sum_{n=0}^{N} c_n \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k \lambda_k^m \bar{\lambda}_k^n = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k \lambda_k^m \sum_{n=0}^{N} c_n \bar{\lambda}_k^n,$$

то система уравнений (20) разрешима при любом $\lambda = \lambda_k$, $k = 0, \ldots, N-1$, если в качестве c_n, $n = 0, \ldots, N$, принять коэффициенты многочлена $(\lambda - \lambda_0) \cdots (\lambda - \lambda_{N-1})$. □

Предложение 4. *В качестве последовательности многочленов в* $\mathbb{C}_N[\lambda]$*, удовлетворяющей условиям* (17)*, можно взять*

$$x_{-1} = 0, \quad x_l(\lambda) = \frac{D_l(\lambda)}{\sqrt{D_{l-1} D_l}}, \quad l = 0, \ldots, N-1,$$
$$x_N(\lambda) = \sqrt{\frac{D_{N-2}}{D_{N-1}}} \frac{D_N(\lambda)}{D_{N-1}}. \tag{21}$$

Такая последовательность уникальна с точностью до знаков ее членов x_l*,* $l = 0, \ldots, N-1$*, и постоянного множителя в* x_N*. В частности, к выражениям* (21) *при* $l = 0, \ldots, N-1$ *приводит требование положительности старших коэффициентов многочленов*

Доказательство. Последовательность многочленов, удовлетворяющую условиям (17), будем искать в виде

$$x_n(\lambda) = \alpha_n \Big(\lambda^n + \sum_{n'=0}^{n-1} \chi_{n,n'} \lambda^{n'} \Big), \quad n = 0, \ldots, N. \tag{22}$$

Тогда

$$\langle x_m, x_n \rangle = \alpha_m \langle \lambda^m, x_n \rangle = \alpha_m \alpha_n \Big(\langle \lambda^m, \lambda^n \rangle + \sum_{n'=0}^{n-1} \chi_{n,n'} \langle \lambda^m, \lambda^{n'} \rangle \Big) =$$
$$= \alpha_m \alpha_n \Big(s_{m,n} + \sum_{n'=0}^{n-1} \chi_{n,n'} s_{m,n'} \Big), \quad m \le n,$$

и, налагая (17), приходим для каждого n, $0 \le n \le N$, к системе уравнений

$$s_{m,n} + \sum_{n'=0}^{n-1} \chi_{n,n'} s_{m,n'} = 0, \quad m = 0, \ldots, n-1, \quad 1 \le n \le N, \tag{23}$$

$$s_{n,n} + \sum_{n'=0}^{n-1} s_{n,n'} \chi_{n,n'} = \alpha_n^{-2}, \quad 0 \le n \le N-1. \tag{24}$$

Для наглядности запишем систему (23) в матричной форме

$$\begin{bmatrix} s_{0,n} \\ s_{1,n} \\ \cdots \\ s_{n-1,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{0,0} & \cdots & s_{0,n-1} \\ s_{1,0} & \cdots & s_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1,0} & \cdots & s_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{n,0} \\ \chi_{n,1} \\ \cdots \\ \chi_{n,n-1} \end{bmatrix} = 0.$$

Решая ее по правилу Крамера, находим

$$\chi_{n,n'} = -\frac{D_{n-1,n'}}{D_{n-1}}, \quad 1 \le n \le N, \quad 0 \le n' \le N-1, \tag{25}$$

где $D_{n-1,n'}$ — определитель, полученный из D_{n-1} заменой $n'+1$-го столбца на столбец свободных членов системы. Тогда

$$s_{n,n} + \sum_{n'=0}^{n-1} s_{n,n'}\chi_{n,n'} = \frac{1}{D_{n-1}}\Big(D_{n-1}s_{n,n} - \sum_{n'=0}^{n-1} D_{n-1,n'}s_{n,n'}\Big) = \frac{D_n}{D_{n-1}}$$

и из (24) получаем

$$\alpha_n^{-2} = \frac{D_n}{D_{n-1},} \quad n = 0, \dots, N-1. \tag{26}$$

Таким образом, отправляясь от представления (22), мы однозначно нашли $\chi_{n,n'}$ и с точностью до знака — α_n.

Подставляя теперь (25) в (22), находим

$$x_l(\lambda) = \alpha_l \frac{1}{D_{l-1}}\Big(D_{l-1}\lambda^l - \sum_{l'=0}^{l-1} D_{l-1,l'}\lambda^{l'}\Big) = \alpha_l \frac{D_l(\lambda)}{D_{l-1}}, \quad l = 0, \dots, N,$$

что и приводит вместе с (26) и условием $\alpha_N = \alpha_{N-1}$ к выражениям (21). □

Лемма 3. *Справедливо соотношение*

$$\sum_{l=0}^{N-1} x_l(\lambda_k)\bar{x}_l(\lambda_{k'}) = \beta_k^{-1}\delta_{k,k'}. \tag{27}$$

Доказательство. Соотношение (27) следует из (14) и (17) по аналогии с доказательством утверждения 1) предложения 3. □

Предложение 5. *Последовательность многочленов* (21) *удовлетворяет уникальному трехчленному рекуррентному соотношению*

$$\lambda x_l = a_l x_{l+1} - a_{l-1}x_{l-1}, \quad l = 0, \dots, N-1, \tag{28}$$

где

$$a_{-1} = a_{N-1} = 1, \quad a_l = \frac{\sqrt{D_{l+1}D_{l-1}}}{D_l}, \quad l = 0, \dots, N-2. \tag{29}$$

Доказательство. Справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} \lambda x_l &= \frac{\alpha_l}{\alpha_{l+1}}x_{l+1} + \sum_{l'=0}^{l} c_{l,l'}x_{l'} = \frac{\alpha_l}{\alpha_{l+1}}x_{l+1} + \sum_{l'=0}^{l}\langle\lambda x_l, x_{l'}\rangle x_{l'} \\ &= \frac{\alpha_l}{\alpha_{l+1}}x_{l+1} + \sum_{l'=0}^{l}\langle x_l, \bar{\lambda}x_{l'}\rangle x_{l'} = \frac{\alpha_l}{\alpha_{l+1}}x_{l+1} + \langle x_l, \bar{\lambda}x_{l-1}\rangle x_{l-1} \\ &= \frac{\alpha_l}{\alpha_{l+1}}x_{l+1} - \frac{\alpha_{l-1}}{\alpha_l}x_{l-1}. \end{aligned}$$

Первое равенство представляет собой разложение многочлена λx_l по многочленам $x_0, \dots, x_{l+1}$. Множитель α_l/α_{l+1} здесь получается сравнением коэффициентов при λ^{l+1}. При переходе ко второму равенству мы использовали свойство ортонормальности многочленов x_l. В четвертом учтено свойство 2) из леммы 2. Появление множителя α_{l-1}/α_l в последнем равенстве следует из ортонормальности многочленов x_l с учетом разложения

$$\lambda x_{l-1} = \frac{\alpha_{l-1}}{\alpha_l}x_l + \sum_{l'=0}^{l-1} c_{l-1,l'}x_{l'},$$

аналогичного разложению в первом равенстве.

Если x_l выбраны так, как в (21), то $\alpha_l > 0$ и коэффициенты a_l определяются однозначно. $\square$

4. Решение обратной задачи и пример

В итоге проведенного исследования мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Пусть дан произвольный набор комплексных числе*

$$\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1},\ \beta_0, \dots, \beta_{N-1}. \tag{30}$$

Для того, чтобы этот набор был набором собственных значений и нормировочных констант антисимметричной трехдиагональной матрицы вида (1), *необходимо и достаточно выполнения следующих условий.*

1) *Числа $\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1}$ чисто мнимые и простые, а их совокупность — замкнута относительно комплексного сопряжения.*
2) *Числа $\beta_0, \dots, \beta_{N-1}$ реальные, положительные и в своей последовательности согласованы с последовательностью $\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1}$ в том смысле, что для любых двух комплексно сопряженных чисел второй последовательности соответствующие им числа первой совпадают. Кроме того, $\beta_0 + \cdots \beta_{N-1} = 1$.*

При этих условиях элементы матрицы, для которой (30) *является набором указанных спектральных данных, восстанавливаются по формуле*

$$a_l = \frac{\sqrt{D_{l+1}D_{l-1}}}{D_l}, \quad l = 0, \dots, N-2, \tag{31}$$

где D_l определены в (19).

Доказательство. Необходимость доказана в разделе 2. Докажем достаточность.

Зададимся набором (30), удовлетворяющим условиям 1)–3) и определим эрмитову форму (14). В соответствии с предложением 4 эта форма уникально определяет ортонормальную последовательность многочленов, которой согласно предложению 5 соответствует уникальная антисимметричная трехдиагональная матрица с положительными элементами на верхней диагонали. Собственные значения этой матрицы, согласно утверждению 2) леммы 2, совпадают с $\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1}$. Ее нормировочные константы совпадают с $\beta_0, \dots, \beta_{N-1}$ по формуле (27).

Формула (31) взята из (29). $\square$

В заключение рассмотрим простой пример восстановления коэффициентов системы линейного маятника по спектральным данным системы. В натуральных переменных уравнение движения имеет вид

$$m_0\ddot{q}_0 + k_0(q_0 - q_{-1}) - k_1(q_1 - q_0) = 0, \quad q_{-1} = q_1 = 0. \tag{32}$$

В переменных Шредингера (3), (5) уравнению (32) соответствует система уравнений

$$\dot{x}_l = a_l x_{l+1} - a_{l-1}x_{l-1}, \quad x_{-1} = x_3 = 0, \quad l = 0, 1, 2,$$

$$a_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m_0}}, \quad a_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_0}},$$

с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_0 & 0 \\ -a_0 & 0 & a_1 \\ 0 & -a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Прямая спектральная задача для матрицы A решается непосредственно. В результате для собственных значений и нормировочных констант получаем

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = i\sqrt{a_0^2 + a_1^2}, \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1,$$
$$\beta_0 = \frac{a_1^2}{a_0^2 + a_1^2}, \quad \beta_1 = \frac{a_0^2}{2(a_0^2 + a_1^2)}, \quad \beta_2 = \beta_1.$$

Для решения обратной задачи используем формулы (18), (19) и (31). В частности, находим

$$D_0 = 1, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_0^2 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -a_0^2 \\ 0 & a_0^2 & 0 \\ -a_0^2 & 0 & a_0^2(a_0^2 + a_1^2) \end{vmatrix}.$$

Применяя (31), получаем в точности элементы исходной матрицы A.

References

[1] G.M.L. Gladwell, *Matrix inverse eigenvalue problems*, in Gladwell, Graham M. L. (ed.) et al., *Dynamical inverse problems. Theory and application*, CISM Courses and Lectures, **529**, Springer, Wien, 2011. Zbl 1248.15008

[2] G.M.L. Gladwell, *Inverse problems in vibration*, Solid Mechanics and its Applications, **119**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004. Zbl 1095.74002

[3] M.T. Chu, G.H. Golub, *Inverse eigenvalue problems: theory, algorithms, and applications*, Oxford University Press, Oxford, 2005. Zbl 1075.65058

[4] F.R. Gantmacher, M.G. Krein, *Oscillation matrices and kernels and small vibrations of mechanical systems*, AMS Chelsea Publishing, Providence, 2002. Zbl 1002.74002

[5] E. Schrödinger, *Zur Dynamik gekoppelter Punktsysteme*, Ann. d. Physik (4), **44** (1914), 916–934. JFM 45.0996.02

[6] M. Möller, V. Pivovarchik, *Direct and inverse finite-dimensional spectral problems on graphs*, Operator Theory: Advances and Applications, **283**, Birkhäuser, Cham, 2020. Zbl 1480.39001

[7] Z.-W. Sun, *Generalized inverse eigenvalue problems for augmented periodic Jacobi matrices*, Comput. Appl. Math., **38**:3 (2019), Paper No. 104. Zbl 1438.65070

[8] M. Heydari, S.A. Shahzadeh Fazeli, S.M. Karbassi, M.R. Hooshmandasl, *On the inverse eigenvalue problem for periodic Jacobi matrices*, Inverse Probl. Sci. Eng., **28**:9 (2020), 1253-1264. Zbl 1461.65054

[9] A.C. Mikhaylov, V.C. Mikhaylov, *Inverse problem for dynamical system associated with Jacobi matrices and classical moment problems*, J. Math. Anal. Appl., **487**:1 (2020), Article ID 123970. Zbl 1445.44005

[10] A.C. Mikhaylov, V.C. Mikhaylov, *Inverse problems for finite Jacobi matrices and Krein-Stieltjes strings*, J. Inverse Ill-Posed Probl., **29**:4 (2021) 611–628. Zbl 1470.35436

[11] W.-R. Xu, N. Bebiano, G.-L. Chen, *An inverse eigenvalue problem for modified pseudo-Jacobi matrices*, J. Comput. Appl. Math., **389** (2021), Article ID 113361. Zbl 1459.65052

[12] F.V. Atkinson, *Discrete and continuous boundary problems*, Mathematics in Science and Engineering, **8**, Academic Press, New York-London, 1964. Zbl 0117.05806

[13] G.Sh. Guseinov, *On an inverse problem for two spectra of finite Jacobi matrices*, Appl. Math. Comput., **218**:14 (2012), 7573–7589. Zbl 1247.65052

[14] N.I. Akhiezer, *The classical moment problem and some related questions in analysis*, Oliver & Boyd, Edinburgh-London, 1965. Zbl 0135.33803

[15] F.R. Gantmacher, *The theory of matrices. Vol. 1*, AMS Chelsea Publishing, Providence, 1998. Zbl 0927.15001

Aleksey Ivanovich Gudimenko
Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences,
ul. Radio, 7,
690041, Vladivostok, Russia
Email address: gudimenko@iam.dvo.ru