S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 20, №2, стр. 1108–1124 (2023) УДК 517.925
DOI 10.33048/semi.2023.20.069 MSC 34C05

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОВАЛЫ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ СИСТЕМ ТИПА ДАРБУ

Е. П. ВОЛОКИТИН, В. М. ЧЕРЕСИЗ

Abstract. We consider the question of the existence of algebraic solutions, polynomial and rational integrals for systems of ordinary differential equations of the form $\dot{x} = x + P_n(x, y),\ \dot{y} = y + Q_n(x, y)$, where $P_n(x, y)$, $Q_n(x, y)$ are homogeneous polynomials of nth degree.

Keywords: polynomial systems, algebraic limit cycles, non-algebraic limit cycles, rational integrals, phase portraits

Введение

Значительное внимание при исследовании систем дифференциальных уравнений уделяется вопросу об отыскании у них частных или общих интегралов. Важность нахождения явного выражения для первого интеграла следует из того, что, зная его, мы получаем информацию о фазовом портрете системы: все траектории содержатся в множествах уровня первого интеграла.

Проблема исследования предельных циклов является одной из центральных в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Заметное место в этой проблематике занимает изучение предельных циклов автономных плоских полиномиальных систем

$$\dot{x} = P(x, y),\ \dot{y} = Q(x, y). \tag{1}$$

Здесь $P(x, y),\ Q(x, y)$ — действительные многочлены от переменных $x,\ y$, в качестве независимой переменной выступает $t \in \mathbb{R}$. Степенью системы называется максимум степеней многочленов $P(x, y),\ Q(x, y)$.

Volokitin, E.P., Cheresiz, V.M. Algebraic ovals and rational integrals of Darboux-type systems.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проекты FWNF-2022-0005, FWNF-2022-0008).

Поступила 1 августа 2022 г., опубликована 24 ноября 2023 г.

Предельным циклом системы (1) называется периодическое решение, траектория которого является изолированной среди траекторий всех периодических решений. Предельный цикл системы (1) называется алгебраическим степени m, если он является действительным овалом неприводимой алгебраической кривой $H(x, y) = 0$ степени m.

Проблема нахождения алгебраических решений полиномальных систем, в частности, алгебраических предельных циклов, восходит к А. Пуанкаре и Ж. Б. Дарбу [1], [2] и в настоящее время интенсивно исследуется, см. [4] и процитированную там литературу.

В нашей работе мы рассматриваем этот вопрос применительно к системе вида

$$\dot{x} = x + P_n(x, y), \ \dot{y} = y + Q_n(x, y), \tag{2}$$

которую мы называем системой типа Дарбу. Здесь $P_n(x, y), \ Q_n(x, y)$ — однородные действительные многочлены степени $n > 1$ от переменных $x, \ y$.

Системы вида (2) изучались в [3] и затем независимо от этой работы и независимо друг от друга рассматривались авторами работ [5], [6], [7], [8]. В частности, получены необходимые и достаточные условия существования гиперболического предельного цикла у системы (2), причём этот цикл оказывается единственным (см. Теорему 1 ниже и пояснения к ней). Остальные траектории (кроме точки покоя в начале координат) имеют предельный цикл ω-предельным множеством и не могут быть алгебраическими кривыми. Единственной алгебраической кривой в этой ситуации может быть только предельный цикл.

В [7] мы доказали, что степень алгебраического предельного цикла системы (2) произвольной степени n равна 2. В настоящей работе мы приводим видоизменённое доказательство этого факта. Эти исследования имеют отношение к проблеме Пуанкаре о степени алгебраических решений полиномиального дифференциального уравнения.

Мы предъявляем класс систем типа Дарбу произвольной степени, имеющих алгебраический предельный цикл. Этот результат, в частности, обобщает результаты, полученные в [5], [7].

Приведены примеры систем типа Дарбу, в которых отсутствуют нетривиальные алгебраические решения и сосуществуют алгебраические и неалгебраические решения.

Вопрос об алгебраических интегралах естественно возникает при изучении полиномиальных систем дифференциальных уравнений. Интерес к этому вопросу обуславливается, в частности, тем обстоятельством, что при наличии такого интеграла все орбиты будут алгебраическими кривыми.

Система (2) не обладает полиномиальным интегралом (как и вообще любым интегралом, определённым на всей фазовой плоскости), поскольку имеет дикритический узел в начале координат.

При определённых условиях система (2) имеет рациональный интеграл.

Мы приводим примеры систем типа Дарбу с рациональным интегралом и изучаем свойства этих интегралов.

1. Основная часть

Рассмотрим систему типа Дарбу

$$\dot{x} = x + P_n(x, y), \ \dot{y} = y + Q_n(x, y), \ n > 1. \tag{2}$$

Определим функции

$$f(\vartheta) = \cos\vartheta P_n(\cos\vartheta, \sin\vartheta) + \sin\vartheta Q_n(\cos\vartheta, \sin\vartheta), \tag{3}$$

$$g(\vartheta) = \cos\vartheta Q_n(\cos\vartheta, \sin\vartheta) - \sin\vartheta P_n(\cos\vartheta, \sin\vartheta). \tag{4}$$

Функции $f(\vartheta)$, $g(\vartheta)$ являются однородными тригонометрическими многочленами от переменных $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta$ степени $n+1$.

Теорема 1. *1) Если n — чётное, система* (2) *не имеет периодических решений.*

2) Если n — нечётное и $g(\vartheta)$ имеет нули на отрезке $[0, 2\pi]$, система (2) *не имеет периодических решений.*

3) Система (2) *имеет не более одного предельного цикла.*

4) Для того, чтобы существовал единственный предельный цикл Γ системы (2)*, окружающий начало координат, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

$$g(\vartheta) \neq 0,\ \vartheta \in [0, 2\pi];\ g(0)\int_0^{2\pi} \frac{f(\vartheta)}{g(\vartheta)} d\vartheta < 0. \tag{5}$$

5) Цикл Γ является гиперболическим.

6) Если цикл Γ алгебраический, то его степень равна 2, и он задаётся алгебраической кривой $H(x, y) = 0$, $H(x, y) = 1 + ax^2 + 2bxy + cy^2$.

7) Система (2) *имеет алгебраический предельный цикл*

$$H(x, y) \equiv 1 + h_2(x, y) = 0,\ h_2(x, y) < 0$$

тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$P_n \frac{\partial h_2}{\partial x} + Q_n \frac{\partial h_2}{\partial y} = 2(-h_2)^{\frac{n+1}{2}},\ xP_n - yQ_n \neq 0 \ \text{для}\ (x, y) \neq (0, 0).$$

Доказательство. Пункты 1–5 были доказаны в [3] и затем независимо от этой работы и независимо друг от друга доказаны авторами работ [5], [6], [7], [8]. Необходимое и достаточное условие существования предельного цикла (пункт 4) в [3] было получено в другой формулировке непосредственно в терминах функций $P_n(x, y)$, $Q_n(x, y)$. Пункты 6–7 были доказаны нами в [7]. Пункт 6 имеет отношение к проблеме Пуанкаре о максимальной степени алгебраического решения полиномиального дифференциального уравнения. Из него следует, что для систем типа Дарбу произвольной степени n алгебраический предельный цикл имеет степень два. Мы приводим здесь самодостаточное доказательство пункта 6, видоизменённое по сравнению с [7], в котором устранены недочёты, на которые нам указали коллеги после публикации.

Идея доказательства по-прежнему заимствована из [9].

Всюду далее в ходе доказательства предполагается, что n — нечётное и выполнены условия (5). Тем самым система (2) имеет единственный грубый устойчивый предельный цикл, окружающий начало кординат.

Система (2) после перехода к полярным координатам $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ превращается в систему

$$\dot{r} = r + r^n f(\vartheta),\ \dot{\vartheta} = r^{n-1} g(\vartheta), \tag{6}$$

которую мы рассматриваем при условии $r > 0$.

Система (6) сводится к линейному уравнению

$$\frac{d\rho}{d\vartheta} = \frac{(n-1)f(\vartheta)}{g(\vartheta)}\rho + \frac{(n-1)}{g(\vartheta)},\ \rho = r^{n-1}, \tag{7}$$

где функции $f(\vartheta),\ g(\vartheta)$ определены выше.

Периодические решения этого уравнения (с периодом $T = 2\pi$) порождают периодические решения системы (2).

Определим функцию $F(\vartheta) = (n-1)f(\vartheta)/g(\vartheta)$.

Решение уравнения (7) с условием $\rho(0) = \rho_0$ обозначим $\rho(\vartheta;\rho_0)$:

$$\rho(\vartheta;\rho_0) = \Big(\rho_0 + \int_0^{\vartheta} \frac{(n-1)}{g(\tau)} \exp(-\int_0^{\tau} F(\varsigma)d\varsigma)d\tau\Big) \exp(\int_0^{\vartheta} F(\varsigma)d\varsigma). \tag{8}$$

Для периодического решения следует выбрать $\rho_0 = \rho_0^*$ из условия $\rho(2\pi;\rho_0) = \rho_0$. В рассматриваемом случае найдётся единственное такое значение

$$\rho_0^* = \frac{\exp(\int_0^{2\pi} F(\varsigma)d\varsigma)}{1-\exp(\int_0^{2\pi} F(\varsigma)d\varsigma)} \int_0^{2\pi} \frac{(n-1)}{g(\tau)} \exp(-\int_0^{\tau} F(\varsigma)d\varsigma)d\tau. \tag{9}$$

Решение $\rho = \rho(\vartheta,\rho_0^*)$ определяет периодическое решение системы (2), поскольку вследствие (5) выполняется условие $\rho(\vartheta,\rho_0^*) > 0,\ g(\vartheta) \neq 0, \vartheta \in [0,2\pi]$.

Орбиты системы (2) имеют параметрическое задание

$$x = \sqrt[n-1]{\rho(\vartheta;\rho_0)}\cos\vartheta,\ y = \sqrt[n-1]{\rho(\vartheta;\rho_0)}\sin\vartheta,\ \vartheta \in [0,2\pi], \tag{10}$$

где $\rho(\vartheta;\rho_0)$ из (8).

Для периодической орбиты следует взять $\rho_0 = \rho_0^*$ из (9).

Поле направлений системы (2) симметрично относительно начала координат. В таком случае траектории этой системы и задающие их формулы также должны обладать свойством симметрии. В частности, замкнутая кривая Γ, изображающая предельный цикл, будет симметрична относительно начала координат. В самом деле, пусть Γ' — кривая, полученная из Γ после симметричного отражения. Кривая Γ' также будет траекторией системы. Очевидно, площади симметричных фигур, ограниченных кривыми $\Gamma,\ \Gamma'$, равны. Кривая Γ' не может целиком лежать внутри кривой Γ, так как в таком случае площадь, ограниченная ею, будет меньше площади, ограниченной кривой Γ. Из тех же сображений кривая Γ не может целиком поместиться внутри кривой Γ'. Значит эти две траектории имеют общие точки и поэтому совпадают.

Если предельный цикл Γ $r^{n-1} = \rho(\theta;\rho_0^*)$ — алгебраический, рассмотрим неприводимый многочлен $H(x,y) = h_0 + h_1(x,y) + h_2(x,y) + \cdots + h_m(x,y)$ такой, что $H(x,y) = 0$ содержит этот симметричный овал.

Прежде всего укажем, что $H(x,y)$ имеет чётную степень, поскольку алгебраическая линия нечётной степени неограниченна.

Приведём простое доказательство последнего утверждения, принадлежащее В. В. Иванову.

Доказательство. Пусть линия задаётся многочленом $F(x,y) = 0$, и старшие мономы многочлена $F(x,y)$ имеют степень n. Тогда невырожденными линейным преобразованием многочлен приводится к виду $G(x,y) + y^n$, где $G(x,y)$ означает многочлен, у которого во всех мономах степень y меньше n. Таким образом, если n нечетно, то при любом фиксированном x функция $F(x,y)$ представляет собой многочлен нечетной степени n переменной y, а потому имеет корень. Утверждение доказано.

Из доказанного утверждения вытекает, что кривая $H(x,y)=0$ имеет чётную степень, поскольку неограниченные траектории системы (2) представляют собой спирали идущие из бесконечности от экватора Пуанкаре и бесконечным числом витков наматывающиеся на устойчивый предельный цикл. Каждый виток спирали пересекает ось Ox, и таких точек пересечения бесконечно много. Это означает, что многочлен $H(x,0)$ имеет бесконечно много корней, что невозможно. Значит, неограниченные траектории, которые являются ветвями алгебраической кривой $H(x,y)=0$, отсутствуют, поэтому согласно приведённому предложению многочлен $H(x,y)$ не может иметь нечётную степень.

$H(x,y)=0$ — инвариантная алгебраическая кривая системы (2). Тогда $\tilde{H}(r,\theta)=H(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)=0$ — инвариантная кривая системы (6), [9]. Система (6) инвариантна относительно замены $r\to -r$. Отсюда следует, что $\tilde{H}(r,\theta)$ — чётная[1] по r, [9].

После подстановки $R=r^2$ в $H(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$ получим многочлен $\tilde{H}(R,\vartheta)$ относительно переменной R, коэффициенты которого $h_i(\cos\vartheta,\sin\vartheta)$. При этом $R=(\rho(\vartheta;\rho_0^*))^{\frac{2}{n-1}}$ будет его R-корнем. Каждый R-корень многочлена $\tilde{H}(R,\vartheta)$ генерируется решением уравнения (7).

Для всех траекторий системы (2) (кроме точки покоя $(0,0)$) цикл Γ является ω-предельнам множеством, и они навиваются на него, пересекая ось Ox бесконечное число раз. Отсюда следует, что полиномиальное уравнение $\tilde{H}(R,0)=0$ имеет бесконечно много решений, а это невозможно. Итак, $R=(\rho(\vartheta;\rho_0^*))^{\frac{2}{n-1}}$ — единственный корень $\tilde{H}(R,\theta)$, поэтому $\tilde{H}(R,\theta)$ является многочленом первой степени по R: $\tilde{H}(R,\theta)=h_0+Rh_2(\cos\theta,\sin\theta)$. Окончательно $H(x,y)=h_0+h_2(x,y)=h_0+ax^2+bxy+cy^2$.

Утверждение пункта 6 доказано.

□

Теорема 2. *Пусть $S_{n-1}(x,y)$ — однородный многочлен степени $n-1$ такой, что $S_{n-1}(x,y)\neq 0$, если $(x,y)\neq(0,0)$. Система*

$$\dot{x}=x-yS_{n-1}(x,y)-x(x^2+y^2)^{(n-1)/2},\ \dot{y}=y+xS_{n-1}(x,y)-y(x^2+y^2)^{(n-1)/2} \tag{11}$$

имеет единственный алгебраический предельный цикл $x^2+y^2=1$. К тому же система имеет первый интеграл

$$H(x,y)=\left((x^2+y^2)^{(n-1)/2}-1\right)e^{(n-1)\int^{\operatorname{arctg}(y/x)}\frac{d\vartheta}{S_{n-1}(\cos\vartheta,\sin\vartheta)}}. \tag{12}$$

Доказательство. В условиях теоремы $P_n(x,y), Q_n(x,y)$ таковы, что

$$xQ_n(x,y)-yP_n(x,y)=(x^2+y^2)^{(n+1)/2},\ xP_n(x,y)+yQ_n(x,y)=-(x^2+y^2)^{(n+1)/2}.$$

В этом случае система (11) имеет инвариантный овал $H(x,y)\equiv 1-x^2-y^2=0$ согласно пункту 7 Теоремы 1.

В отличие от [5] мы нашли интеграл (12), используя метод Дарбу интегрирования систем ОДУ с помощью инвариантов, см. например, [10].

[1]Это означает, в частности, что многочлен $H(x,y)$ имет чётную степень. Мы однако выше привели утверждение, содержащее этот факт, и его доказательство, так как считаем, что они представляют самостоятельный интерес

Функция $L(x,y)$ называется инвариантом системы (1), если она удовлетворяет условию

$$DL \equiv \frac{\partial L(x,y)}{\partial x} P(x,y) + \frac{\partial L(x,y)}{\partial y} Q(x,y) = k(x,y) L(x,y),$$

где $k(x,y)$ — многочлен от переменных x,y, который называется кофактором инварианта $L(x,y)$.

Если система (1) имеет инварианты $L_1,\dots,L_s$ с кофакторами $k_1,\dots,k_s$ и $\alpha_1 k_1+\dots+\alpha_s k_s=0$, функция $H=L_1^{\alpha_1}\cdot\dots\cdot L_s^{\alpha_s}$ является интегралом системы.

Система (11) имеет инвариантами многочлен $L_1=(x^2+y^2)^{(n-1)/2}-1$ и экспоненциальный множитель $L_2=e^{\int^{\operatorname{arctg}(y/x)}\frac{d\vartheta}{S_{n-1}(\cos\vartheta,\sin\vartheta)}}$.

В самом деле

$$\begin{gathered}
DL_1 \equiv \frac{\partial L_1}{\partial x}\bigl(x-yS_{n-1}(x,y)-x(x^2+y^2)^{(n-1)/2}\bigr)+ \\
+\frac{\partial L_1}{\partial y}\bigl(y+xS_{n-1}(x,y)-y(x^2+y^2)^{(n-1)/2}\bigr)= \\
=\frac{n-1}{2}(x^2+y^2)^{\frac{n-3}{2}}2x\bigl(x-yS_{n-1}(x,y)-x(x^2+y^2)^{(n-1)/2}\bigr)+ \\
+\frac{n-1}{2}(x^2+y^2)^{\frac{n-3}{2}}2y\bigl(y+xS_{n-1}(x,y)-y(x^2+y^2)^{(n-1)/2}\bigr)= \\
=-(n-1)(x^2+y^2)^{(n-1)/2}L_1.
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
DL_2 \equiv \frac{\partial L_2}{\partial x}\bigl(x-yS_{n-1}(x,y)-x(x^2+y^2)^{(n-1)/2}\bigr)+ \\
+\frac{\partial L_2}{\partial y}\bigl(y+xS_{n-1}(x,y)-y(x^2+y^2)^{(n-1)/2}\bigr)= \\
=L_2\frac{\partial}{\partial x}\int^{\operatorname{arctg}(y/x)}\frac{d\vartheta}{S_{n-1}(\cos\vartheta,\sin\vartheta)}\bigl(x-yS_{n-1}(x,y)-x(x^2+y^2)^{(n-1)/2}\bigr)+ \\
+L_2\frac{\partial}{\partial y}\int^{\operatorname{arctg}(y/x)}\frac{d\vartheta}{S_{n-1}(\cos\vartheta,\sin\vartheta)}\bigl(y+xS_{n-1}(x,y)-y(x^2+y^2)^{(n-1)/2}\bigr).
\end{gathered}$$

Имеем

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial x}\int^{\operatorname{arctg}(y/x)}\frac{d\vartheta}{S_{n-1}(\cos\vartheta,\sin\vartheta)}= \\
=\frac{1}{S_{n-1}(\cos\operatorname{arctg}(y/x),\sin\operatorname{arctg}(y/x))}\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{arctg}(y/x)= \\
=\frac{1}{S_{n-1}(x/\sqrt{x^2+y^2},y/\sqrt{x^2+y^2})}\frac{-y}{x^2+y^2}=-y(x^2+y^2)^{(n-3)/2}\frac{1}{S_{n-1}(x,y)}.
\end{gathered}$$

Мы воспользовались однородностью многочлена $S_{n-1}(x,y)$.

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial y}\int^{\operatorname{arctg}(y/x)}\frac{d\vartheta}{S_{n-1}(\cos\vartheta,\sin\vartheta)}=x(x^2+y^2)^{(n-3)/2}\frac{1}{S_{n-1}(x,y)}.$$

Получим
$$DL_2 = (x^2+y^2)^{(n-1)/2}L_2.$$

Таким образом, L_1, L_2 являются инвариантами системы (11) с кофакторами
$$k_1 = -(n-1)(x^2+y^2)^{\frac{n-1}{2}},\ k_2 = (x^2+y^2)^{\frac{n-1}{2}},$$
соответственно, для которых выполнено соотношение $k_1 + (n-1)k_2 = 0$. В таком случае система имеет интеграл (12)
$$H(x,y) = L_1 L_2^{n-1} = \big((x^2+y^2)^{(n-1)/2} - 1\big)e^{(n-1)\int^{\operatorname{arctg}(y/x)} \frac{d\vartheta}{S_{n-1}(\cos\vartheta,\sin\vartheta)}}.$$

Отметим, что мы нашли интеграл системы (11) с помощью двух инвариантов в то время, как в общем случае нахождение интеграла с помощью метода Дарбу у системы степени n требует знания инвариантов в количестве $n(n+1)/2+1$, [10]

□

Если $S_{n-1} = (x^2+y^2)^{(n-1)/2}$, получаем следующее прямое обобщение результатов, полученных в теореме 2 из [5] и в примере 2.9 из [7].

Предложение 1. *Система*
$$\dot{x} = x - (x+y)(x^2+y^2)^{(n-1)/2},\ \dot{y} = y + (x-y)(x^2+y^2)^{(n-1)/2}$$
имеет единственный алгебраический предельный цикл $x^2+y^2=1$. К тому же система имеет первый интеграл
$$H(x,y) = \big((x^2+y^2)^{(n-1)/2} - 1\big)e^{(n-1)\operatorname{arctg}(y/x)}.$$

Системы типа Дабу сохраняют свой вид после линейной замены переменных $x \to ax+by, y \to cx+dy$.

Это свойство даёт возможность в качестве очевидного следствия Теоремы 2 сформулировать следующее достаточное условие наличия алгебраического инвариантного овала в системе типа Дарбу.

Предложение 2. *Система типа Дарбу имеет алгебраический предельный цикл, если она линейно сопряжена с системой* (11)*; при этом цикл является эллипсом, который получается из окружности $x^2+y^2=1$ в результате указанного линейного сопряжения.*

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\dot{x}=x-4x^3+16x^2y-16xy^2-28y^3,\ \dot{y}=y+40x^3-20x^2y+16xy^2+24y^3. \tag{13}$$

Для этой системы $g(\vartheta) > 0$, предельный цикл отсутствует; все траектории (кроме точки покоя в начале координат) — спирали, исходящие из начала координат и наматывающиеся изнутри на экватор Пуанкаре, см. рис. 1. Эти траектории не являются алгебраическими кривыми. Таким образом система (13) не имеет среди своих траекторий нетривиальных алгебраических кривых.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\dot{x}=x-20x^3+20x^2y+36xy^2-40y^3,\ \dot{y}=y+38x^3-20x^2y+12xy^2+4y^3. \tag{14}$$

Здесь выполнены условия пункта 4 Теоремы 1, поэтому система имеет устойчивый предельный цикл. Фазовый портрет приведён на рис. 2. Из него видно, что предельный цикл не является эллипсом и потому не будет алгебраическим.

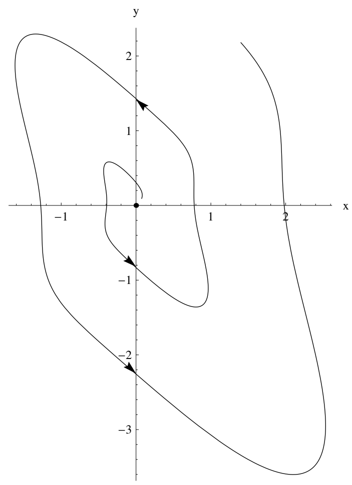

Рис. 1. Фазовый портрет системы (13)

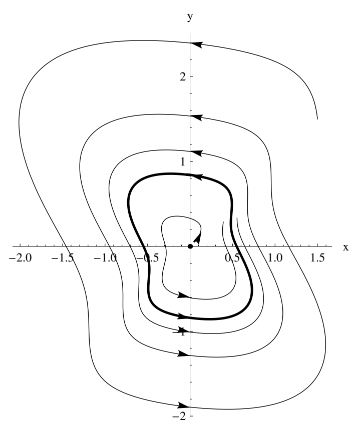

Рис. 2. Фазовый портрет системы (14)

Более формально последний факт вытекает из того, что попытка отыскать инвариантную кривую (цикл) в виде $1 + ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ на основе пункта 7 теоремы 1 приводит к системе уравнений относительно коэффициентов $a,\ b,\ c$, которая имеет решением только $a = b = c = 0$.

Таким образом, и в этом случае рассматриваемая система не имеет среди своих траекторий нетривиальных алгебраических кривых.

Пример 3. Рассмотрим систему

$$\begin{gathered}\dot x = x - 2x^4y + 8x^3y^2 - 16x^2y^3 + 16xy^4 - 8y^5,\\ \dot y = y + x^5 - 6x^4y + 16x^3y^2 - 24x^2y^3 + 20xy^4 - 8y^5,\end{gathered} \tag{15}$$

полученную из системы

$$\dot x = x - (x + y)(x^2 + y^2)^2,\ \ \dot y = y + (x - y)(x^2 + y^2)^2 \tag{16}$$

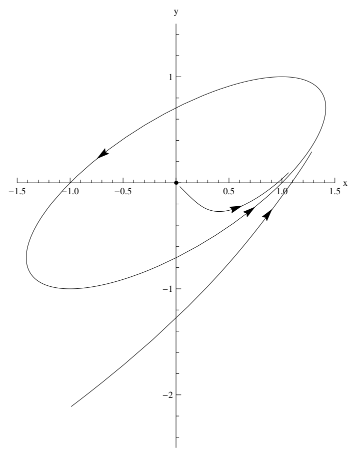

Рис. 3. Фазовый портрет системы (15)

заменой $x{\to}x{+}y$, $y{\to}y$. Последняя согласно Предложению 1 имеет алгебраический предельный цикл $x^2 + y^2 = 1$. Эллипс $(x - y)^2 + y^2 = 1$ является алгебраическим предельным циклом системы (15). Остальные траектории, как и в предыдущих примерах, не определяются алгебраическими кривыми. Фазовый портрет системы (15) приведён на рис. 3. В данном случае в системе сосуществуют алгебраические и неалгебраические траектории.

Для полиномиальных систем естественно рассматривать полиномиальные и рациональные первые интегралы, то есть рассматривать случаи, когда функция $H(x, y)$ является полиномом или отношением двух полиномов.

Рациональный первый интеграл имеет вид $H = p/q$, где $p(x, y), q(x, y)$ — многочлены; при этом $H(x, y)$ сохраняет постоянное значение вдоль любой траектории в $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$, $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : q(x, y) = 0\}$. Интеграл имеет степень m, если число m является максимумом степеней многочленов p, q.

Интерес к системам, имеющим полиномиальный или рациональный первый интеграл, обуславливается, в частности, тем обстоятельством, что все орбиты таких систем будут алгебраическими кривыми. Более детальную историю вопроса и ссылки на литературу можно найти в [11], [12].

Как уже отмечалось, система (2) не имеет полиномиального интеграла.

При определённых условиях эта система может иметь рациональный интеграл.

Необходимое условие того, чтобы система (2) имела рациональный интеграл, состоит в том, что уравнение

$$g(\theta) \equiv \cos\theta Q_n(\cos\theta, \sin\theta) - \sin\theta P_n(\cos\theta, \sin\theta) = 0 \tag{17}$$

имеет корни на промежутке $[0, 2\pi)$. Корень $\tilde{\vartheta}$ определяет инвариантную прямую системы $\cos\tilde{\vartheta}x - \sin\tilde{\vartheta}y = 0$.

Если это условие не выполнено, то у системы (2) отсутствуют инвариантные прямые, проходящие через начало координат. В этом случае фазовый портрет выглядит, как в примерах 1, 2, 3, и потому имеются неалгебраические орбиты (в бесконечном количестве), в то время, как при наличии рационального интеграла все траектории — алгебраические линии.

По таким же соображениям система не может иметь рационального интеграла, если у неё есть предельный цикл.

В качестве примера достаточных условий приведём следующее утверждение

Теорема 3. *Пусть в системе*

$$\dot{x} = x + P_n(x, y), \;\; \dot{y} = y + Q_n(x, y) \tag{2}$$

многочлены $P_n(x, y)$, $Q_n(x, y)$ *удовлетворяют условиям Коши–Римана*

$$\frac{\partial P_n}{\partial x} = \frac{\partial Q_n}{\partial y}, \quad \frac{\partial P_n}{\partial y} = -\frac{\partial Q_n}{\partial x}. \tag{18}$$

Тогда система (2) *имеет рациональный первый интеграл.*

Доказательство. Прежде, чем приступить к доказательству собственно теоремы, докажем вспомогательное утверждение.

Пусть имеем многочлен $P(z)$ с простыми корнями $z_1, z_2, \ldots, z_n$

$$P(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n).$$

Тогда

$$\frac{1}{P'(z_1)}\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{P'(z_2)}\frac{1}{z - z_2} + \cdots + \frac{1}{P'(z_n)}\frac{1}{z - z_n} = \frac{1}{P(z)}. \tag{19}$$

В самом деле, имеем

$$\frac{1}{P'(z_1)}\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{P'(z_2)}\frac{1}{z - z_2} + \cdots + \frac{1}{P'(z_n)}\frac{1}{z - z_n} =$$
$$\frac{1}{a_0(z_1 - z_2)\ldots(z_1 - z_n)}\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{a_0(z_2 - z_1)\ldots(z_2 - z_n)}\frac{1}{z - z_2} + \ldots$$
$$+\frac{1}{a_0(z_n - z_1)\ldots(z_n - z_{n-1})}\frac{1}{z - z_n} =$$
$$= \frac{1}{a_0(z_1 - z_2)\ldots(z_1 - z_n)}\frac{a_0(z - z_2)\ldots(z - z_n)}{P(z)} +$$
$$+\frac{1}{a_0(z_2 - z_1)\ldots(z_2 - z_n)}\frac{a_0(z - z_1)\ldots(z - z_n)}{P(z)} + \ldots$$
$$+\frac{1}{a_0(z_n - z_1)\ldots(z_n - z_{n-1})}\frac{a_0(z - z_1)\ldots(z - z_{n-1})}{P(z)} =$$
$$= \frac{1}{P(z)}\Big(\frac{(z - z_2)\ldots(z - z_n)}{(z_1 - z_2)\ldots(z_1 - z_n)} + \frac{(z - z_1)\ldots(z - z_n)}{(z_2 - z_1)\ldots(z_2 - z_n)} + \ldots$$
$$+ \ldots\frac{(z - z_1)\ldots(z - z_{n-1})}{(z_n - z_1)\ldots(z_n - z_{n-1})}\Big)$$

В скобках заключён интерполяционный многочлен Лагранжа степени $n-1$, который принимает значение 1 в n точках $z_1, z_2, \ldots, z_n$. В таком случае этот многочлен тождественно равен 1. Итак, равенство (19) доказано.

Введём комплексную переменную $z = x + iy$.

При выполнении условий (18) однородные многочлены $P_n(x, y), Q_n(x, y)$ являются действительной и мнимой частями однородного комплексного многочлена $\mathcal{P}_n(z) = az^n$ переменной $z = x + iy$, $a \in \mathbb{C}$.

С помощью введёной переменной z система (2) может быть записана в виде уравнения

$$\dot{z} = z + \mathcal{P}_n(z) \equiv z + az^n, \tag{20}$$

которое мы будем называть комплексной системой типа Дарбу.

Системы (2), (20) эквивалентны в том смысле, что если $(x(t), y(t))$ — решение системы (2), то $z(t) = x(t) + iy(t)$ — решение системы (20), и наоборот.

Далее мы будем полагать $a = -1$, что не умаляет общности предлагаемых рассуждений и полученных выводов.

Итак, мы рассматриваем систему

$$\dot{z} = z - z^n, \tag{21}$$

Следуя [13], найдём интеграл системы, решая уравнение

$$\frac{dz}{z - z^n} = \frac{d\bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}^n},$$

то есть

$$\int \frac{dz}{z - z^n} = \int \frac{d\bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}^n}.$$

Полагая $P(z) = z - z^n = z(1 - z^{n-1})$, получаем, что корни этого многочлена суть $z_1 = 0, z_k = \sqrt[n-1]{1}, k = 2, ..., n$, и $P'(z_1) = 1, P'(z_2) = P'(z_3) = ... = P'(z_n) = 1 - n$.

С использованием (19) получаем, что

$$\int \frac{dz}{z - z^n} = \ln z - \frac{1}{n-1} \ln (z - z_2)....(z - z_n) = \frac{1}{n-1} \ln \frac{z^{n-1}}{1 - z^{n-1}}$$

с учётом того, что $(z - z_2)....(z - z_n) = 1 - z^{n-1}$.

В таком случае функция

$$\mathcal{H}_1(z, \bar{z}) = \frac{1}{n-1} \ln \frac{z^{n-1}}{1 - z^{n-1}} - \frac{1}{n-1} \ln \frac{\bar{z}^{n-1}}{1 - \bar{z}^{n-1}} = \frac{1}{n-1} \ln \frac{z^{n-1}(1 - \bar{z}^{n-1})}{\bar{z}^{n-1}(1 - z^{n-1})}$$

будет интегралом системы (21), а значит, и интегралом (комплекснозначным) системы (2) после подстановки $z = x + iy$.

Интегралом будет также функция

$$\mathcal{H}_2(z, \bar{z}) = \frac{z^{n-1}(1 - \bar{z}^{n-1})}{\bar{z}^{n-1}(1 - z^{n-1})} = \exp\bigl(2i \arg \frac{z^{n-1}}{1 - z^{n-1}}\bigr),$$

поскольку $|\mathcal{H}_2(z, \bar{z})| = 1$.

Получаем действительный интеграл

$$\mathcal{H}(z, \bar{z}) = \arg \frac{z^{n-1}}{1 - z^{n-1}} = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \frac{z^{n-1}}{1 - z^{n-1}}}{\operatorname{Re} \frac{z^{n-1}}{1 - z^{n-1}}}.$$

Окончательно имеем действительный рациональный интеграл системы (21)

$$H(x, y) = \frac{\operatorname{Im} \dfrac{z^{n-1}}{1 - z^{n-1}}}{\operatorname{Re} \dfrac{z^{n-1}}{1 - z^{n-1}}},$$

который после очевидных преобразований может быть записан в виде

$$H(x, y) = \frac{\operatorname{Im} z^{n-1}(1 - \bar{z}^{n-1})}{\operatorname{Re} z^{n-1}(1 - \bar{z}^{n-1})} = \frac{\operatorname{Im} z^{n-1}}{\operatorname{Re} z^{n-1} - (x^2 + y^2)^{n-1}}. \tag{22}$$

□

Отметим, что степень алгебраических кривых, содержащих траектории системы (21) равна $2(n-1)$.

Замечание 1. *Существование рационального первого интеграла у системы* (21) *вытекает из результатов работ* [13], [14], [15]. *Новый результат, содержащийся в теореме 3, состоит в том, что мы приводим явное выражение для интеграла, снабжённое коротким самодостаточным доказательством и являющееся, как показывают рассмотренные нами примеры, более простым.*

Следуя [11], [12], мы будем называть $c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ замечательным значением интеграла $H = p/q$, если многочлен $p + cq$ является разложимым в $\mathbb{C}[x, y]$. Здесь, подразумевается, что если $c = \infty$, то $p + cq$ означает q. Отметим, что при всех $c \in \mathbb{C}$ $p + cq = 0$ является инвариантной алгебраической кривой. Кривые $u_i = 0$ в разложении $p + cq$ на множители u_i, если c — замечательное значение, называются замечательными кривыми.

В [12] доказано, что любой рациональный интеграл имеет лишь конечное число замечательных значений.

Можно показать, что числитель интеграла (22) разлагается на линейные множители (см. ниже). Таким образом, $c = 0$ является замечательным значением интеграла (22).

Начало координат $z_1 = 0$ является точкой покоя системы (21). Остальные точки покоя являются корнями уравнения $z^{n-1} - 1 = 0 : z_k = \sqrt[n-1]{1}$, $k = 2, \ldots, n$. При этом $P'(z_1) = 1$, $P'(z_k) = 1 - n$, и точки покоя будут дикритическими узлами: начало координат — неустойчивым, остальные — устойчивыми.

Инвариантные прямые $x \sin \vartheta - y \cos \vartheta = 0$ в системе (2), проходящие через начало координат, определяются из условия $g(\vartheta) = 0$, где $g(\vartheta)$ из (3). В нашем случае

$$g(\vartheta) = -\cos \vartheta \sin n\vartheta + \sin \vartheta \cos n\vartheta = -\sin(n-1)\vartheta.$$

Таким образом, система (21) имет $n - 1$ инвариантных прямых с углами наклона $\vartheta = 0, \frac{1}{n-1}\pi, \ldots, \frac{n-2}{n-1}\pi$.

Эти прямые являются замечательными кривыми для замечательного значения $c = 0$ интеграла (22) и отвечают линейным множителям в разложении $\operatorname{Im} z^{n-1}$.

Точки покоя расположены на инвариантных прямых.

В точках пересечения прямых с экватором Пуанкаре находятся грубые сёдла в количестве $2(n-1)$, для них инвариантные прямые служат сепаратрисами, другие сепаратрисы направлены вдоль экватора.

Сепаратрисы этих сёдел, вместе с состояниями равновесия являются особыми траекториями системы (21), их характер и расположение определяют основные черты её глобального фазового портрета.

Пример 4. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = x - x^5 + 10x^3y^2 - 5x^4y, \ \dot{y} = y - 5x^4y - 10x^2y^3 - y^5, \tag{23}$$

которая получена овеществлением комплексной системы $\dot{z} = z - z^5$.

Система имеет рациональный первый интеграл (22)

$$H(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^4 - (x^2 + y^2)^2 + 8x^2y^2}$$

Точки покоя системы (23) находятся из соотношения $z - z^5 = 0$ и имеют вид $O(0,0),\ O_1(1,0),\ O_2(0,1),\ O_3(-1,0),\ O_4(0,-1)$. Начало координат является неустойчивым дикритическим узлом, остальные четыре стационара устойчивые дикритические узлы. Система имеет 4 инвариантные прямые: $x = 0,\ y = 0,\ y = x,\ y = -x$. Это замечательные кривые для замечательного значения $c = 0$. Бесконечно удалённые особые точки лежат на пересечении экватора Пуанкаре с инвариантными прямыми. Они являются сёдлами.

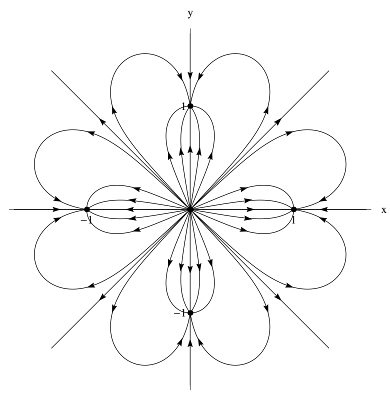

Рис. 4. Фазовый портрет системы (23)

На рис. 4 приведён фазовый портрет системы (23).

Условия Коши–Римана (18) для многочленов $P_n(x,y),\ Q_n(x,y)$ не являются необходимыми для существования рационального интеграла у системы (2).

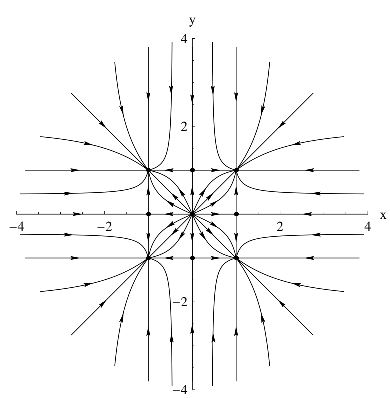

Рис. 5. Фазовый портрет системы (24)

Пример 5. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = x - x^3,\ \dot{y} = y - y^3. \tag{24}$$

Интегралом системы является рациональная функция

$$H(x,y) = \frac{y^2(1-x^2)}{x^2(1-y^2)}. \tag{25}$$

Особые точки системы (24): $O(0,0)$ — дикритический узел, кроме того имеются дикритические узлы $O_1(1,1), O_2(-1,1), O_3(-1,-1), O_4(1,-1)$; особые точки $O_5(1,0), O_6(0,1), O_7(-1,0), O_8(0,-1)$ — гиперболические сёдла. На экваторе Пуанкаре присутствуют четыре дикритических узла, расположенные в концах осей координат, и четыре гиперболических седла, находящиеся в концах биссектрис $y=\pm x$.

Система (24) имеет 8 инвариантных прямых $x{=}0,\ x{=}\pm1,\ y{=}0,\ y{=}\pm1,\ y{=}\pm x$, которые служат линиями уровня интеграла (25) для замечательных значений $c=0,\ 1,\ \infty$.

Фазовый портрет системы (24) приведён на рис. 5.

Напомним, что в общем случае для нахождения рационального интеграла у системы степени n требуется $n(n+1)/2+2$ полиномиальных инвариантов, [10].

Используя методы и результаты работ [16], [17], мы можем предложить ещё две кубических системы типа Дарбу, которые имеют 8 линейных инвариантов и тем самым имеют рациональный интеграл.

$$\dot{x}=x+x^3,\ \dot{y}=y+y^3. \tag{26}$$

$$\dot{x}=x-x^3,\ \dot{y}=y-y^3. \tag{27}$$

Инварианты системы (26) суть

$$L_1{=}x,\ L_2{=}1{+}ix,\ L_3{=}1{-}ix,\ L_4{=}y,\ L_5{=}1{+}iy,\ L_6{=}1{-}iy,\ L_7{=}x{+}y,\ L_8{=}x{-}y$$

с кофакторами

$$k_1=1+x^2,\ k_2=ix(1-ix),\ k_3=-ix(1+ix),\ k_4=(1+y^2),$$
$$k_5=iy(1-iy),\ k_6=-iy(1+iy),\ k_7=1+x^2-xy+y^2,\ k_8=1+x^2+xy+y^2,$$

что даёт интеграл

$$H(x,y)=\frac{(x+y)^2(x-y)^2}{x^2y^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

При этом $c=0,\ c=1,\ c=\infty$ — его замечательные значения.

Инварианты системы (27) суть

$$L_1=x,\ L_2=x{+}i,\ L_3=x{-}i,\ L_4=y,\ L_5=y{+}1,\ L_6=y{-}1,\ L_7=x{+}iy,\ L_8=x{-}iy$$

с кофакторами

$$k_1=1+x^2,\ k_2=x(x-i),\ k_3=x(x+i),\ k_4=1-y^2,$$
$$k_5=y(y-1),\ k_6=-y(1+y),\ k_7=1+x^2-y^2-ixy,\ k_8=1+x^2-y^2+ixy,$$

что даёт интеграл

$$H(x,y)=\frac{x^2(1-y^2)}{y^2(1+x^2)}.$$

По-прежнему $c=0,\ c=1,\ c=\infty$ — его замечательные значения.

Фазовые портреты систем (26), (27) приведены на рис. 6, 7.

Пример 6. Система

$$\dot{x}=x-y^3,\ \dot{y}=y+xy^2 \tag{28}$$

имеет рациональный интеграл

$$H(x,y)=\frac{x^2y+y^3+2x}{y}. \tag{29}$$

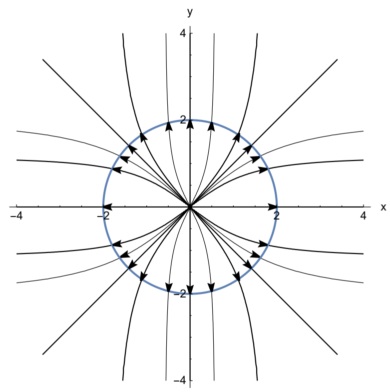

Рис. 6. Фазовый портрет системы (26)

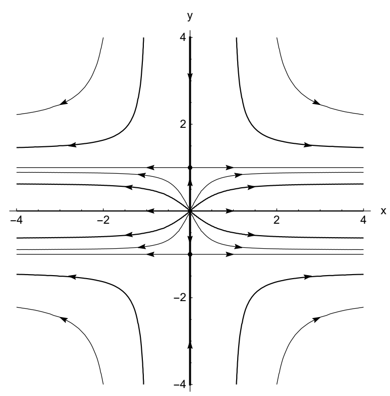

Рис. 7. Фазовый портрет системы (27)

Интеграл получен использованием *двух* инвариантов $L_1 = x^2y+y^3+2x, L_2 = y$ с кофакторами $k_1 = 1 + xy,\ k_2 = 1 + xy$. Поскольку $k_1 - k_2 = 0$ получаем интеграл (29)

$$H(x,y) = L_1L_2^{-1} = \frac{x^2y + y^3 + 2x}{y}.$$

Имеется единственное состояние равновесия начало координат $O(0,0)$, дикритический узел.

Две бесконечно удалённые особые точки расположены на пересечении экватора Пуанкаре с осью Ox, они являются негиперболическими и имеют тип седло-узел.

Фазовый портрет системы (28) приведён на рис. 8.

Нетрудно показать, что многочлен $x^2y+y^3+2x+cy$ ни при каких значениях c не разлагается на множители.

Таким образом, интеграл (29) не имеет замечательных значений.

Автор выражает признательность рецензенту за то, что он сообщил о работе [3].

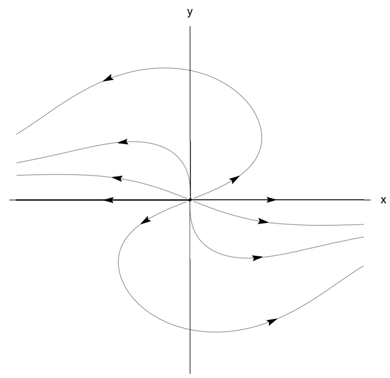

Рис. 8. Фазовый портрет системы (28)

References

[1] G. Darboux, *Mémoire sur les équations différentielles algébrique du premier ordre et du premier degré*, Darboux Bull. (2) II (1878), 60–96, JFM 10.0214.01

[2] H. Poincaré, *Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré*, C. R., **112** (1891), 761–764. JFM 23.0319.01

[3] V.N. Gorbuzov, A.A. Samodurov, *The Darboux equation and its analogies. Textbook*, Grodnenskij Gosudarstvennyj Universitet, Grodno, 1985. Zbl 0607.34001

[4] J. Llibre, X. Zhang, *A survay on algebraic end explicit non-algebraic limit cycles in planar differential systems*, Expo. Math., **39**:1 (2021), 48–61. Zbl 1481.34041

[5] A. Bendjeddou, J. Llibre, T. Salhi, *Dynamics of the polynomial differential systems with homogeneous nonlinearities and a star node*, J. Diff. Equ., **254**:8 (2013), 3530–3537. Zbl 1269.34034

[6] E.P. Volokitin, V.M. Cheresiz, *The qualitative analysis of the plane polynomial Darboux systems*, Sib. Èlectron. Mat. Izv., **13** (2016), 1170–1186. Zbl 1370.34054

[7] V.M. Cheresiz, E.P. Volokitin, *The algebraic curves of planar polynomial differential systems with homogeneous nonlinearities*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., **2021** (2021), Paper No. 51. Zbl 1488.34220

[8] Alarcón B., Castro S. B. S. D., Labouriau I. S. *Global planar dynamics with star nodes: beyond Hilbert's 16th problem*, arXiv:2106.07516, 2021.

[9] J. Giné, M. Grau, *Coexistence of algebraic and non-algebraic limit cycles, explicity given, using Riccati equations*, Nonlinearity, **19**:8 (2006), 1939–1950. Zbl. 1114.34029

[10] I.A. García, M. Grau, *A survey on the inverse integrating factor*, Qual. Theory Dyn. Syst., **9**:1-2 (2010), 115–166. Zbl 1364.34005

[11] J. Chavarriga, H. Giacomini, J. Giné, J. Llibre, *Darboux integrability and the inverse integrating factor*, J. Diff. Equ., **194**:1 (2003), 116–139. Zbl 1043.34001

[12] A. Ferragut, J. Llibre, *On the remarkable values of the rational first integrals of polynomial vector fields*, J. Diff. Equ., **241**:2 (2007), 399–417. Zbl 1132.34030

[13] P. Mardešić, C. Rousseau, B. Toni, *Linearization of isochronous centers*, J. Diff. Equ., **121**:1 (1995), 67–108. Zbl 0830.34023

[14] E.P. Volokitin, *Algebraic first integrals of the polynomial systems satisfying the Cauchy–Riemann conditions*, Qual. Theory Dyn. Syst., **15**:2 (2016), 575–596. Zbl 1364.34037

[15] E.P. Volokitin, V.M. Cheresiz, *An integrating factor of the Darboux differential systems*, Sib. Èlectron. Mat. Izv., **16** (2019), 1260–1275. Zbl 1453.34002

[16] J. Llibre, N. Vulpe, *Planar cubic polynomial differential systems with the maximum number of invariant stright lines*, Rocky Mt. J. Math., **36**:4 (2006), 1301–1373. Zbl 1139.34035

[17] C. Bujac, J. Llibre, N. Vulpe, *First integrals and phase portraits of planar differential cubic systems with the maximum number of invariant stright lines*, Qual. Theory Dyn. Syst., **15**:2 (2016), 327–348. Zbl 1367.34030

Волокитин Евгений Павлович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга, 4,
630090, Новосибирск, Россия.
Email address: volok@math.nsc.ru

Чересиз Владимир Михайлович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга, 4,
630090, Новосибирск, Россия.