

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 144–144 (2019)
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxxУДК 517.925
MSC 34C05АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОВАЛЫ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ
ИНТЕГРАЛЫ СИСТЕМ ТИПА ДАРБУ

Е. П. ВОЛОКИТИН, В. М. ЧЕРЕСИЗ

АБСТРАКТ. Изучается вопрос о существовании алгебраических решений, полиномиальных и рациональных интегралов у систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида $\dot{x} = x + P_n(x, y)$, $\dot{y} = y + Q_n(x, y)$, где $P_n(x, y)$, $Q_n(x, y)$ — однородные полиномы n -й степени.

Keywords: полиномиальные системы, алгебраические предельные циклы, неалгебраические предельные циклы, рациональные интегралы, фазовые портреты.

ВВЕДЕНИЕ

Значительное внимание при исследовании систем дифференциальных уравнений уделяется вопросу об отыскании у них частных или общих интегралов. Важность нахождения явного выражения для первого интеграла следует из того, что, зная его, мы получаем информацию о фазовом портрете системы: все траектории содержатся в множествах уровня первого интеграла.

Проблема исследования предельных циклов является одной из центральных в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Заметное место в этой проблематике занимает изучение предельных циклов автономных плоских полиномиальных систем

$$(1) \quad \dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y).$$

VOLOKITIN E.P., CHERESIZ V.M. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОВАЛЫ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ СИСТЕМ ТИПА ДАРБУ.

© 2020 Волокитин Е.П., Чересиз В.М.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проекты FWNF-2022-0005, FWNF-2022-0008).

Поступила , опубликована .

Здесь $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — действительные многочлены от переменных x , y , в качестве независимой переменной выступает $t \in \mathbb{R}$. Степенью системы называется максимум степеней многочленов $P(x, y)$, $Q(x, y)$.

Предельным циклом системы (1) называется периодическое решение, траектория которого является изолированной среди траекторий всех периодических решений. Предельный цикл системы (1) называется алгебраическим степени m , если он является действительным овалом неприводимой алгебраической кривой $H(x, y) = 0$ степени m .

Проблема нахождения алгебраических решений полиномиальных систем, в частности, алгебраических предельных циклов, восходит к А. Пуанкаре и Ж. Б. Дарбу [1], [2] и в настоящее время интенсивно исследуется, см. [4] и процитированную там литературу.

В нашей работе мы рассматриваем этот вопрос применительно к системе вида

$$(2) \quad \dot{x} = x + P_n(x, y), \quad \dot{y} = y + Q_n(x, y),$$

которую мы называем системой типа Дарбу. Здесь $P_n(x, y)$, $Q_n(x, y)$ — однородные действительные многочлены степени $n > 1$ от переменных x , y .

Системы вида (2) изучались в [3] и затем независимо от этой работы и независимо друг от друга рассматривались авторами работ [5], [6], [7], [8]. В частности, получены необходимые и достаточные условия существования гиперболического предельного цикла у системы (2), причём этот цикл оказывается единственным (см. Теорему 1 ниже и пояснения к ней). Остальные траектории (кроме точки покоя в начале координат) имеют предельный цикл ω -предельным множеством и не могут быть алгебраическими кривыми. Единственной алгебраической кривой в этой ситуации может быть только предельный цикл.

В [7] мы доказали, что степень алгебраического предельного цикла системы (2) произвольной степени n равна 2. В настоящей работе мы приводим видоизменённое доказательство этого факта. Эти исследования имеют отношение к проблеме Пуанкаре о степени алгебраических решений полиномиального дифференциального уравнения.

Мы предъявляем класс систем типа Дарбу произвольной степени, имеющих алгебраический предельный цикл. Этот результат, в частности, обобщает результаты, полученные в [5], [7].

Приведены примеры систем типа Дарбу, в которых отсутствуют нетривиальные алгебраические решения и сосуществуют алгебраические и неалгебраические решения.

Вопрос об алгебраических интегралах естественно возникает при изучении полиномиальных систем дифференциальных уравнений. Интерес к этому вопросу обуславливается, в частности, тем обстоятельством, что при наличии такого интеграла все орбиты будут алгебраическими кривыми.

Система (2) не обладает полиномиальным интегралом (как и вообще любым интегралом, определённым на всей фазовой плоскости), поскольку имеет дикритический узел в начале координат.

При определённых условиях система (2) имеет рациональный интеграл.

Мы приводим примеры систем типа Дарбу с рациональным интегралом и изучаем свойства этих интегралов.

1. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Рассмотрим систему типа Дарбу

$$(2) \quad \dot{x} = x + P_n(x, y), \quad \dot{y} = y + Q_n(x, y), \quad n > 1.$$

Определим функции

$$(3) \quad f(\vartheta) = \cos \vartheta P_n(\cos \vartheta, \sin \vartheta) + \sin \vartheta Q_n(\cos \vartheta, \sin \vartheta),$$

$$(4) \quad g(\vartheta) = \cos \vartheta Q_n(\cos \vartheta, \sin \vartheta) - \sin \vartheta P_n(\cos \vartheta, \sin \vartheta).$$

Функции $f(\vartheta)$, $g(\vartheta)$ являются однородными тригонометрическими многочленами от переменных $\cos \vartheta$, $\sin \vartheta$ степени $n + 1$.

Теорема 1. 1) Если n — чётное, система (2) не имеет периодических решений.

2) Если n — нечётное и $g(\vartheta)$ имеет нули на отрезке $[0, 2\pi]$, система (2) не имеет периодических решений.

3) Система (2) имеет не более одного предельного цикла.

4) Для того, чтобы существовал единственный предельный цикл Γ системы (2), окружающий начало координат, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$(5) \quad g(\vartheta) \neq 0, \quad \vartheta \in [0, 2\pi]; \quad g(0) \int_0^{2\pi} \frac{f(\vartheta)}{g(\vartheta)} d\vartheta < 0.$$

5) Цикл Γ является гиперболическим.

6) Если цикл Γ алгебраический, то его степень равна 2, и он задаётся алгебраической кривой $H(x, y) = 0$, $H(x, y) = 1 + ax^2 + 2bxy + cy^2$.

7) Система (2) имеет алгебраический предельный цикл

$$H(x, y) \equiv 1 + h_2(x, y) = 0, \quad h_2(x, y) < 0$$

тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$P_n \frac{\partial h_2}{\partial x} + Q_n \frac{\partial h_2}{\partial y} = 2(-h_2)^{\frac{n+1}{2}}, \quad xP_n - yQ_n \neq 0 \text{ для } (x, y) \neq (0, 0).$$

Доказательство. Пункты 1–5 были доказаны в [3] и затем независимо от этой работы и независимо друг от друга доказаны авторами работ [5], [6], [7], [8]. Необходимое и достаточное условие существования предельного цикла (пункт 4) в [3] было получено в другой формулировке непосредственно в терминах функций $P_n(x, y)$, $Q_n(x, y)$. Пункты 6–7 были доказаны нами в [7]. Пункт 6 имеет отношение к проблеме Пуанкаре о максимальной степени алгебраического решения полиномиального дифференциального уравнения. Из него следует, что для систем типа Дарбу произвольной степени n алгебраический предельный цикл имеет степень два. Мы приводим здесь самодостаточное доказательство пункта 6, видоизменённое по сравнению с [7], в котором устранены недочёты, на которые нам указали коллеги после публикации.

Идея доказательства по-прежнему заимствована из [9].

Всюду далее в ходе доказательства предполагается, что n — нечётное и выполнены условия (5). Тем самым система (2) имеет единственный грубый устойчивый предельный цикл, окружающий начало координат.

Система (2) после перехода к полярным координатам $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$ превращается в систему

$$(6) \quad \dot{r} = r + r^n f(\vartheta), \quad \dot{\vartheta} = r^{n-1} g(\vartheta),$$

которую мы рассматриваем при условии $r > 0$.

Система (6) сводится к линейному уравнению

$$(7) \quad \frac{d\rho}{d\vartheta} = \frac{(n-1)f(\vartheta)}{g(\vartheta)}\rho + \frac{(n-1)}{g(\vartheta)}, \quad \rho = r^{n-1},$$

где функции $f(\vartheta)$, $g(\vartheta)$ определены выше.

Периодические решения этого уравнения (с периодом $T = 2\pi$) порождают периодические решения системы (2).

Определим функцию $F(\vartheta) = (n-1)f(\vartheta)/g(\vartheta)$.

Решение уравнения (7) с условием $\rho(0) = \rho_0$ обозначим $\rho(\vartheta; \rho_0)$:

$$(8) \quad \rho(\vartheta; \rho_0) = \left(\rho_0 + \int_0^\vartheta \frac{(n-1)}{g(\tau)} \exp\left(-\int_0^\tau F(\varsigma) d\varsigma\right) d\tau \right) \exp\left(\int_0^\vartheta F(\varsigma) d\varsigma\right).$$

Для периодического решения следует выбрать $\rho_0 = \rho_0^*$ из условия $\rho(2\pi; \rho_0) = \rho_0$. В рассматриваемом случае найдётся единственное такое значение

$$(9) \quad \rho_0^* = \frac{\exp\left(\int_0^{2\pi} F(\varsigma) d\varsigma\right)}{1 - \exp\left(\int_0^{2\pi} F(\varsigma) d\varsigma\right)} \int_0^{2\pi} \frac{(n-1)}{g(\tau)} \exp\left(-\int_0^\tau F(\varsigma) d\varsigma\right) d\tau.$$

Решение $\rho = \rho(\vartheta, \rho_0^*)$ определяет периодическое решение системы (2), поскольку вследствие (5) выполняется условие $\rho(\vartheta, \rho_0^*) > 0$, $g(\vartheta) \neq 0$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

Орбиты системы (2) имеют параметрическое задание

$$(10) \quad x = \sqrt[n-1]{\rho(\vartheta; \rho_0^*)} \cos \vartheta, \quad y = \sqrt[n-1]{\rho(\vartheta; \rho_0^*)} \sin \vartheta, \quad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

где $\rho(\vartheta; \rho_0)$ из (8).

Для периодической орбиты следует взять $\rho_0 = \rho_0^*$ из (9).

Поле направлений системы (2) симметрично относительно начала координат. В таком случае траектории этой системы и задающие их формулы также должны обладать свойством симметрии. В частности, замкнутая кривая Γ , изображающая предельный цикл, будет симметрична относительно начала координат. В самом деле, пусть Γ' — кривая, полученная из Γ после симметричного отражения. Кривая Γ' также будет траекторией системы. Очевидно, площади симметричных фигур, ограниченных кривыми Γ , Γ' , равны. Кривая Γ' не может целиком лежать внутри кривой Γ , так как в таком случае площадь, ограниченная ею, будет меньше площади, ограниченной кривой Γ . Из тех же соображений кривая Γ не может целиком поместиться внутри кривой Γ' . Значит эти две траектории имеют общие точки и поэтому совпадают.

Если предельный цикл Γ $r^{n-1} = \rho(\vartheta; \rho_0^*)$ — алгебраический, рассмотрим неприводимый многочлен $H(x, y) = h_0 + h_1(x, y) + h_2(x, y) + \dots + h_m(x, y)$ такой, что $H(x, y) = 0$ содержит этот симметричный овал.

Прежде всего укажем, что $H(x, y)$ имеет чётную степень, поскольку алгебраическая линия

Приведём простое доказательство последнего утверждения, принадлежащее В. В. Иванову.

Доказательство. Пусть линия задаётся многочленом $F(x, y) = 0$, и старшие мономы многочлена $F(x, y)$ имеют степень n . Тогда невырожденными линейным преобразованием многочлен приводится к виду $G(x, y) + y^n$, где $G(x, y)$

означает многочлен, у которого во всех мономах степень y меньше n . Таким образом, если n нечетно, то при любом фиксированном x функция $F(x, y)$ представляет собой многочлен нечетной степени n переменной y , а потому имеет корень. Утверждение доказано.

Из доказанного утверждения вытекает, что кривая $H(x, y) = 0$ имеет чётную степень, поскольку неограниченные траектории системы (2) представляют собой спирали идущие из бесконечности от экватора Пуанкаре и бесконечным числом витков наматывающиеся на устойчивый предельный цикл. Каждый виток спирали пересекает ось Ox , и таких точек пересечения бесконечно много. Это означает, что многочлен $H(x, 0)$ имеет бесконечно много корней, что невозможно. Значит, неограниченные траектории, которые являются ветвями алгебраической кривой $H(x, y) = 0$, отсутствуют, поэтому согласно приведённому предложению многочлен $H(x, y)$ не может иметь нечётную степень.

$H(x, y) = 0$ — инвариантная алгебраическая кривая системы (2). Тогда $\tilde{H}(r, \vartheta) = H(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) = 0$ — инвариантная кривая системы (6), [9]. Система (6) инвариантна относительно замены $r \rightarrow -r$. Отсюда следует, что $\tilde{H}(r, \theta)$ — чётная¹ по r , [9].

После подстановки $R = r^2$ в $H(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$ получим многочлен $\tilde{H}(R, \vartheta)$ относительно переменной R , коэффициенты которого $h_i(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$. При этом $R = (\rho(\vartheta; \rho_0^*))^{\frac{2}{n-1}}$ будет его R -корнем. Каждый R -корень многочлена $\tilde{H}(R, \vartheta)$ генерируется решением уравнения (7).

Для всех траекторий системы (2) (кроме точки покоя $(0, 0)$) цикл Γ является ω -предельным множеством, и они навиваются на него, пересекая ось Ox бесконечное число раз. Отсюда следует, что полиномиальное уравнение $\tilde{H}(R, 0) = 0$ имеет бесконечно много решений, а это невозможно. Итак, $R = (\rho(\vartheta; \rho_0^*))^{\frac{2}{n-1}}$ — единственный корень $\tilde{H}(R, \theta)$, поэтому $\tilde{H}(R, \theta)$ является многочленом первой степени по R : $\tilde{H}(R, \theta) = h_0 + Rh_2(\cos \theta, \sin \theta)$. Окончательно $H(x, y) = h_0 + h_2(x, y) = h_0 + ax^2 + bxy + cy^2$.

Утверждение пункта 6 доказано. □

Теорема 2. Пусть $S_{n-1}(x, y)$ — однородный многочлен степени $n - 1$ такой, что $S_{n-1}(x, y) \neq 0$, если $(x, y) \neq (0, 0)$. Система

$$(11) \quad \dot{x} = x - yS_{n-1}(x, y) - x(x^2 + y^2)^{(n-1)/2}, \quad \dot{y} = y + xS_{n-1}(x, y) - y(x^2 + y^2)^{(n-1)/2}$$

имеет единственный алгебраический предельный цикл $x^2 + y^2 = 1$. К тому же система имеет первый интеграл

$$(12) \quad H(x, y) = ((x^2 + y^2)^{(n-1)/2} - 1)e^{(n-1) \int^{\arctg(y/x)} \frac{d\vartheta}{S_{n-1}(\cos \vartheta, \sin \vartheta)}}.$$

Доказательство. В условиях теоремы $P_n(x, y), Q_n(x, y)$ таковы, что

$$xQ_n(x, y) - yP_n(x, y) = (x^2 + y^2)^{(n+1)/2}, \quad xP_n(x, y) + yQ_n(x, y) = -(x^2 + y^2)^{(n+1)/2}.$$

В этом случае система (11) имеет инвариантный овал $H(x, y) \equiv 1 - x^2 - y^2 = 0$ согласно пункту 7 Теоремы 1.

¹Это означает, в частности, что многочлен $H(x, y)$ имеет чётную степень. Мы однако выше привели утверждение, содержащее этот факт, и его доказательство, так как считаем, что они представляют самостоятельный интерес

В отличие от [5] мы нашли интеграл (12), используя метод Дарбу интегрирования систем ОДУ с помощью инвариантов, см. например, [10].

Функция $L(x, y)$ называется инвариантом системы (1), если она удовлетворяет условию

$$DL \equiv \frac{\partial L(x, y)}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial L(x, y)}{\partial y} Q(x, y) = k(x, y)L(x, y),$$

где $k(x, y)$ — многочлен от переменных x, y , который называется кофактором инварианта $L(x, y)$.

Если система (1) имеет инварианты L_1, \dots, L_s с кофакторами k_1, \dots, k_s и $\alpha_1 k_1 + \dots + \alpha_s k_s = 0$, функция $H = L_1^{\alpha_1} \dots L_s^{\alpha_s}$ является интегралом системы.

Система (11) имеет инвариантами многочлен $L_1 = (x^2 + y^2)^{(n-1)/2} - 1$ и экспоненциальный множитель $L_2 = e^{\int^{\arctg(y/x)} \frac{d\vartheta}{S_{n-1}(\cos \vartheta, \sin \vartheta)}}$.

В самом деле

$$\begin{aligned} DL_1 &\equiv \frac{\partial L_1}{\partial x} (x - yS_{n-1}(x, y) - x(x^2 + y^2)^{(n-1)/2}) + \\ &\quad + \frac{\partial L_1}{\partial y} (y + xS_{n-1}(x, y) - y(x^2 + y^2)^{(n-1)/2}) = \\ &= \frac{n-1}{2} (x^2 + y^2)^{\frac{n-3}{2}} 2x(x - yS_{n-1}(x, y) - x(x^2 + y^2)^{(n-1)/2}) + \\ &\quad + \frac{n-1}{2} (x^2 + y^2)^{\frac{n-3}{2}} 2y(y + xS_{n-1}(x, y) - y(x^2 + y^2)^{(n-1)/2}) = \\ &= -(n-1)(x^2 + y^2)^{(n-1)/2} L_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DL_2 &\equiv \frac{\partial L_2}{\partial x} (x - yS_{n-1}(x, y) - x(x^2 + y^2)^{(n-1)/2}) + \\ &\quad + \frac{\partial L_2}{\partial y} (y + xS_{n-1}(x, y) - y(x^2 + y^2)^{(n-1)/2}) = \\ &= L_2 \frac{\partial}{\partial x} \int^{\arctg(y/x)} \frac{d\vartheta}{S_{n-1}(\cos \vartheta, \sin \vartheta)} (x - yS_{n-1}(x, y) - x(x^2 + y^2)^{(n-1)/2}) + \\ &\quad + L_2 \frac{\partial}{\partial y} \int^{\arctg(y/x)} \frac{d\vartheta}{S_{n-1}(\cos \vartheta, \sin \vartheta)} (y + xS_{n-1}(x, y) - y(x^2 + y^2)^{(n-1)/2}). \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} \int^{\arctg(y/x)} \frac{d\vartheta}{S_{n-1}(\cos \vartheta, \sin \vartheta)} = \\ &= \frac{1}{S_{n-1}(\cos \arctg(y/x), \sin \arctg(y/x))} \frac{\partial}{\partial x} \arctg(y/x) = \\ &= \frac{1}{S_{n-1}(x/\sqrt{x^2 + y^2}, y/\sqrt{x^2 + y^2})} \frac{-y}{x^2 + y^2} = -y(x^2 + y^2)^{(n-3)/2} \frac{1}{S_{n-1}(x, y)}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались однородностью многочлена $S_{n-1}(x, y)$.

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial y} \int^{\arctg(y/x)} \frac{d\vartheta}{S_{n-1}(\cos \vartheta, \sin \vartheta)} = x(x^2 + y^2)^{(n-3)/2} \frac{1}{S_{n-1}(x, y)}.$$

Получим

$$DL_2 = (x^2 + y^2)^{(n-1)/2} L_2.$$

Таким образом, L_1, L_2 являются инвариантами системы (11) с кофакторами

$$k_1 = -(n-1)(x^2 + y^2)^{\frac{n-1}{2}}, \quad k_2 = (x^2 + y^2)^{\frac{n-1}{2}},$$

соответственно, для которых выполнено соотношение $k_1 + (n-1)k_2 = 0$. В таком случае система имеет интеграл (12)

$$H(x, y) = L_1 L_2^{n-1} = ((x^2 + y^2)^{(n-1)/2} - 1) e^{(n-1) \int^{\arctg(y/x)} \frac{d\vartheta}{S_{n-1}(\cos \vartheta, \sin \vartheta)}}.$$

Отметим, что мы нашли интеграл системы (11) с помощью двух инвариантов в то время, как в общем случае нахождение интеграла с помощью метода Дарбу у системы степени n требует знания инвариантов в количестве $n(n+1)/2 + 1$, [10]

□

Если $S_{n-1} = (x^2 + y^2)^{(n-1)/2}$, получаем следующее прямое обобщение результатов, полученных в теореме 2 из [5] и в примере 2.9 из [7].

Предложение 1. Система

$$\dot{x} = x - (x+y)(x^2 + y^2)^{(n-1)/2}, \quad \dot{y} = y + (x-y)(x^2 + y^2)^{(n-1)/2}$$

имеет единственный алгебраический предельный цикл $x^2 + y^2 = 1$. К тому же система имеет первый интеграл

$$H(x, y) = ((x^2 + y^2)^{(n-1)/2} - 1) e^{(n-1) \arctg(y/x)}.$$

Системы типа Дарбу сохраняют свой вид после линейной замены переменных $x \rightarrow ax + by, y \rightarrow cx + dy$.

Это свойство даёт возможность в качестве очевидного следствия Теоремы 2 сформулировать следующее достаточное условие наличия алгебраического инвариантного овала в системе типа Дарбу.

Предложение 2. Система типа Дарбу имеет алгебраический предельный цикл, если она линейно сопряжена с системой (11); при этом цикл является эллипсом, который получается из окружности $x^2 + y^2 = 1$ в результате указанного линейного сопряжения.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$(13) \quad \dot{x} = x - 4x^3 + 16x^2y - 16xy^2 - 28y^3, \quad \dot{y} = y + 40x^3 - 20x^2y + 16xy^2 + 24y^3.$$

Для этой системы $g(\vartheta) > 0$, предельный цикл отсутствует; все траектории (кроме точки покоя в начале координат) — спирали, исходящие из начала координат и наматывающиеся изнутри на экватор Пуанкаре, см. рис. 1. Эти траектории не являются алгебраическими кривыми. Таким образом система (13) не имеет среди своих траекторий нетривиальных алгебраических кривых.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$(14) \quad \dot{x} = x - 20x^3 + 20x^2y + 36xy^2 - 40y^3, \quad \dot{y} = y + 38x^3 - 20x^2y + 12xy^2 + 4y^3.$$

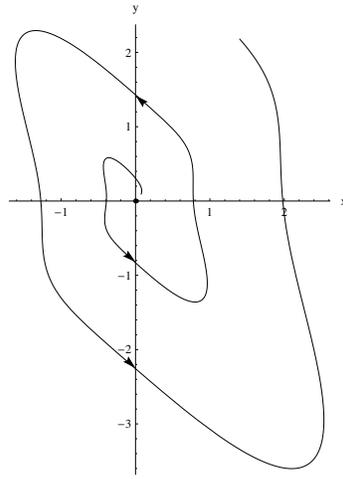


Рис. 1. Фазовый портрет системы (13)

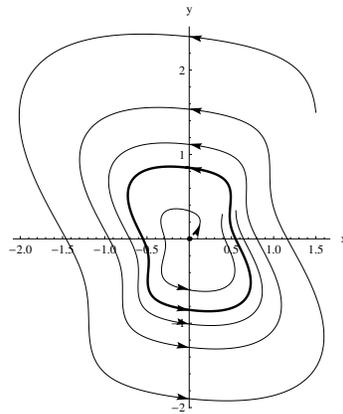


Рис. 2. Фазовый портрет системы (14)

Здесь выполнены условия пункта 4 Теоремы 1, поэтому система имеет устойчивый предельный цикл. Фазовый портрет приведён на рис. 2. Из него видно, что предельный цикл не является эллипсом и потому не будет алгебраическим. Более формально последний факт вытекает из того, что попытка отыскать инвариантную кривую (цикл) в виде $1 + ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ на основе пункта 7 теоремы 1 приводит к системе уравнений относительно коэффициентов a, b, c , которая имеет решением только $a = b = c = 0$.

Таким образом, и в этом случае рассматриваемая система не имеет среди своих траекторий нетривиальных алгебраических кривых.

Пример 3. Рассмотрим систему

$$(15) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= x - 2x^4y + 8x^3y^2 - 16x^2y^3 + 16xy^4 - 8y^5, \\ \dot{y} &= y + x^5 - 6x^4y + 16x^3y^2 - 24x^2y^3 + 20xy^4 - 8y^5, \end{aligned}$$

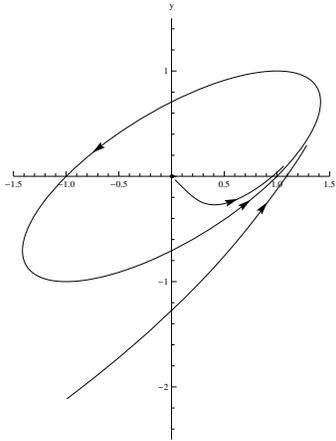


Рис. 3. Фазовый портрет системы (15)

полученную из системы

$$(16) \quad \dot{x} = x - (x + y)(x^2 + y^2)^2, \quad \dot{y} = y + (x - y)(x^2 + y^2)^2$$

заменой $x \rightarrow x + y$, $y \rightarrow y$. Последняя согласно Предложению 1 имеет алгебраический предельный цикл $x^2 + y^2 = 1$. Эллипс $(x - y)^2 + y^2 = 1$ является алгебраическим предельным циклом системы (15). Остальные траектории, как и в предыдущих примерах, не определяются алгебраическими кривыми. Фазовый портрет системы (15) приведён на рис. 3. В данном случае в системе сосуществуют алгебраические и неалгебраические траектории.

Для полиномиальных систем естественно рассматривать полиномиальные и рациональные первые интегралы, то есть рассматривать случаи, когда функция $H(x, y)$ является полиномом или отношением двух полиномов.

Рациональный первый интеграл имеет вид $H = p/q$, где $p(x, y), q(x, y)$ — многочлены; при этом $H(x, y)$ сохраняет постоянное значение вдоль любой траектории в $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$, $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : q(x, y) = 0\}$. Интеграл имеет степень m , если число m является максимумом степеней многочленов p, q .

Интерес к системам, имеющим полиномиальный или рациональный первый интеграл, обуславливается, в частности, тем обстоятельством, что все орбиты таких систем будут алгебраическими кривыми. Более детальную историю вопроса и ссылки на литературу можно найти в [11], [12].

Как уже отмечалось, система (2) не имеет полиномиального интеграла.

При определённых условиях эта система может иметь рациональный интеграл.

Необходимое условие того, чтобы система (2) имела рациональный интеграл, состоит в том, что уравнение

$$(17) \quad g(\theta) \equiv \cos \theta Q_n(\cos \theta, \sin \theta) - \sin \theta P_n(\cos \theta, \sin \theta) = 0$$

имеет корни на промежутке $[0, 2\pi)$. Корень $\tilde{\vartheta}$ определяет инвариантную прямую системы $\cos \tilde{\vartheta} x - \sin \tilde{\vartheta} y = 0$.

Если это условие не выполнено, то у системы (2) отсутствуют инвариантные прямые, проходящие через начало координат. В этом случае фазовый портрет

выглядит, как в примерах 1, 2, 3, и потому имеются неалгебраические орбиты (в бесконечном количестве), в то время, как при наличии рационального интеграла все траектории — алгебраические линии.

По таким же соображениям система не может иметь рационального интеграла, если у неё есть предельный цикл.

В качестве примера достаточных условий приведём следующее утверждение

Теорема 3. Пусть в системе

$$(2) \quad \dot{x} = x + P_n(x, y), \quad \dot{y} = y + Q_n(x, y)$$

многочлены $P_n(x, y)$, $Q_n(x, y)$ удовлетворяют условиям Коши–Римана

$$(18) \quad \frac{\partial P_n}{\partial x} = \frac{\partial Q_n}{\partial y}, \quad \frac{\partial P_n}{\partial y} = -\frac{\partial Q_n}{\partial x}.$$

Тогда система (2) имеет рациональный первый интеграл.

Доказательство. Прежде, чем приступить к доказательству собственно теоремы, докажем вспомогательное утверждение.

Пусть имеем многочлен $P(z)$ с простыми корнями z_1, z_2, \dots, z_n

$$P(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n).$$

Тогда

$$(19) \quad \frac{1}{P'(z_1)} \frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{P'(z_2)} \frac{1}{z - z_2} + \dots + \frac{1}{P'(z_n)} \frac{1}{z - z_n} = \frac{1}{P(z)}.$$

В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{P'(z_1)} \frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{P'(z_2)} \frac{1}{z - z_2} + \dots + \frac{1}{P'(z_n)} \frac{1}{z - z_n} = \\ & \frac{1}{a_0(z_1 - z_2) \dots (z_1 - z_n)} \frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{a_0(z_2 - z_1) \dots (z_2 - z_n)} \frac{1}{z - z_2} + \dots \\ & \quad + \frac{1}{a_0(z_n - z_1) \dots (z_n - z_{n-1})} \frac{1}{z - z_n} = \\ & = \frac{1}{a_0(z_1 - z_2) \dots (z_1 - z_n)} \frac{a_0(z - z_2) \dots (z - z_n)}{P(z)} + \\ & + \frac{1}{a_0(z_2 - z_1) \dots (z_2 - z_n)} \frac{a_0(z - z_1) \dots (z - z_n)}{P(z)} + \dots \\ & + \frac{1}{a_0(z_n - z_1) \dots (z_n - z_{n-1})} \frac{a_0(z - z_1) \dots (z - z_{n-1})}{P(z)} = \\ & = \frac{1}{P(z)} \left(\frac{(z - z_2) \dots (z - z_n)}{(z_1 - z_2) \dots (z_1 - z_n)} + \frac{(z - z_1) \dots (z - z_n)}{(z_2 - z_1) \dots (z_2 - z_n)} + \dots \right. \\ & \quad \left. + \dots \frac{(z - z_1) \dots (z - z_{n-1})}{(z_n - z_1) \dots (z_n - z_{n-1})} \right) \end{aligned}$$

В скобках заключён интерполяционный многочлен Лагранжа степени $n - 1$, который принимает значение 1 в n точках z_1, z_2, \dots, z_n . В таком случае этот многочлен тождественно равен 1. Итак, равенство (19) доказано.

Введём комплексную переменную $z = x + iy$.

При выполнении условий (18) однородные многочлены $P_n(x, y)$, $Q_n(x, y)$ являются действительной и мнимой частями однородного комплексного многочлена $\mathcal{P}_n(z) = az^n$ переменной $z = x + iy$, $a \in \mathbb{C}$.

С помощью введённой переменной z система (2) может быть записана в виде уравнения

$$(20) \quad \dot{z} = z + \mathcal{P}_n(z) \equiv z + az^n,$$

которое мы будем называть комплексной системой типа Дарбу.

Системы (2), (20) эквивалентны в том смысле, что если $(x(t), y(t))$ — решение системы (2), то $z(t) = x(t) + iy(t)$ — решение системы (20), и наоборот.

Далее мы будем полагать $a = -1$, что не умаляет общности предлагаемых рассуждений и полученных выводов.

Итак, мы рассматриваем систему

$$(21) \quad \dot{z} = z - z^n,$$

Следуя [13], найдём интеграл системы, решая уравнение

$$\frac{dz}{z - z^n} = \frac{d\bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}^n},$$

то есть

$$\int \frac{dz}{z - z^n} = \int \frac{d\bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}^n}.$$

Полагая $P(z) = z - z^n = z(1 - z^{n-1})$, получаем, что корни этого многочлена суть $z_1 = 0, z_k = \sqrt[n-1]{1}, k = 2, \dots, n$, и $P'(z_1) = 1, P'(z_2) = P'(z_3) = \dots = P'(z_n) = 1 - n$.

С использованием (19) получаем, что

$$\int \frac{dz}{z - z^n} = \ln z - \frac{1}{n-1} \ln(z - z_2) \dots (z - z_n) = \frac{1}{n-1} \ln \frac{z^{n-1}}{1 - z^{n-1}}$$

с учётом того, что $(z - z_2) \dots (z - z_n) = 1 - z^{n-1}$.

В таком случае функция

$$\mathcal{H}_1(z, \bar{z}) = \frac{1}{n-1} \ln \frac{z^{n-1}}{1 - z^{n-1}} - \frac{1}{n-1} \ln \frac{\bar{z}^{n-1}}{1 - \bar{z}^{n-1}} = \frac{1}{n-1} \ln \frac{z^{n-1}(1 - \bar{z}^{n-1})}{\bar{z}^{n-1}(1 - z^{n-1})}$$

будет интегралом системы (21), а значит, и интегралом (комплекснозначным) системы (2) после подстановки $z = x + iy$.

Интегралом будет также функция

$$\mathcal{H}_2(z, \bar{z}) = \frac{z^{n-1}(1 - \bar{z}^{n-1})}{\bar{z}^{n-1}(1 - z^{n-1})} = \exp(2i \arg \frac{z^{n-1}}{1 - z^{n-1}}),$$

поскольку $|\mathcal{H}_2(z, \bar{z})| = 1$.

Получаем действительный интеграл

$$\mathcal{H}(z, \bar{z}) = \arg \frac{z^{n-1}}{1 - z^{n-1}} = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \frac{z^{n-1}}{1 - z^{n-1}}}{\operatorname{Re} \frac{z^{n-1}}{1 - z^{n-1}}}.$$

Окончательно имеем действительный рациональный интеграл системы (21)

$$H(x, y) = \frac{\operatorname{Im} \frac{z^{n-1}}{1 - z^{n-1}}}{\operatorname{Re} \frac{z^{n-1}}{1 - z^{n-1}}},$$

который после очевидных преобразований может быть записан в виде

$$(22) \quad H(x, y) = \frac{\operatorname{Im} z^{n-1}(1 - \bar{z}^{n-1})}{\operatorname{Re} z^{n-1}(1 - \bar{z}^{n-1})} = \frac{\operatorname{Im} z^{n-1}}{\operatorname{Re} z^{n-1} - (x^2 + y^2)^{n-1}}.$$

□

Отметим, что степень алгебраических кривых, содержащих траектории системы (21) равна $2(n - 1)$.

Замечание 1. *Существование рационального первого интеграла у системы (21) вытекает из результатов работ [13], [14], [15]. Новый результат, содержащийся в теореме 3, состоит в том, что мы приводим явное выражение для интеграла, снабжённое коротким самостоятельным доказательством и являющееся, как показывают рассмотренные нами примеры, более простым.*

Следуя [11], [12], мы будем называть $c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ замечательным значением интеграла $H = p/q$, если многочлен $p + cq$ является разложимым в $\mathbb{C}[x, y]$. Здесь, подразумевается, что если $c = \infty$, то $p + cq$ означает q . Отметим, что при всех $c \in \mathbb{C}$ $p + cq = 0$ является инвариантной алгебраической кривой. Кривые $u_i = 0$ в разложении $p + cq$ на множители u_i , если c — замечательное значение, называются замечательными кривыми.

В [12] доказано, что любой рациональный интеграл имеет лишь конечное число замечательных значений.

Можно показать, что числитель интеграла (22) разлагается на линейные множители (см. ниже). Таким образом, $c = 0$ является замечательным значением интеграла (22).

Начало координат $z_1 = 0$ является точкой покоя системы (21). Остальные точки покоя являются корнями уравнения $z^{n-1} - 1 = 0$: $z_k = \sqrt[n-1]{1}$, $k = 2, \dots, n$. При этом $P'(z_1) = 1$, $P'(z_k) = 1 - n$, и точки покоя будут дикритическими узлами: начало координат — неустойчивым, остальные — устойчивыми.

Инвариантные прямые $x \sin \vartheta - y \cos \vartheta = 0$ в системе (2), проходящие через начало координат, определяются из условия $g(\vartheta) = 0$, где $g(\vartheta)$ из (3). В нашем случае

$$g(\vartheta) = -\cos \vartheta \sin n\vartheta + \sin \vartheta \cos n\vartheta = -\sin(n - 1)\vartheta.$$

Таким образом, система (21) имеет $n - 1$ инвариантных прямых с углами наклона $\vartheta = 0, \frac{1}{n-1}\pi, \dots, \frac{n-2}{n-1}\pi$.

Эти прямые являются замечательными кривыми для замечательного значения $c = 0$ интеграла (22) и отвечают линейным множителям в разложении $\text{Im } z^{n-1}$.

Точки покоя расположены на инвариантных прямых.

В точках пересечения прямых с экватором Пуанкаре находятся грубые седла в количестве $2(n - 1)$, для них инвариантные прямые служат сепаратрисами, другие сепаратрисы направлены вдоль экватора.

Сепаратрисы этих сёдел, вместе с состояниями равновесия являются особыми траекториями системы (21), их характер и расположение определяют основные черты её глобального фазового портрета.

Пример 4. Рассмотрим систему

$$(23) \quad \dot{x} = x - x^5 + 10x^3y^2 - 5x^4y, \quad \dot{y} = y - 5x^4y - 10x^2y^3 - y^5,$$

которая получена о веществлении комплексной системы $\dot{z} = z - z^5$.

Система имеет рациональный первый интеграл (22)

$$H(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^4 - (x^2 + y^2)^2 + 8x^2y^2}$$

Точки покоя системы (23) находятся из соотношения $z - z^5 = 0$ и имеют вид $O(0, 0)$, $O_1(1, 0)$, $O_2(0, 1)$, $O_3(-1, 0)$, $O_4(0, -1)$. Начало координат является неустойчивым дикритическим узлом, остальные четыре стационара устойчивые дикритические узлы. Система имеет 4 инвариантные прямые: $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$. Это замечательные кривые для замечательного значения $c = 0$. Бесконечно удалённые особые точки лежат на пересечении экватора Пуанкаре с инвариантными прямыми. Они являются седлами.

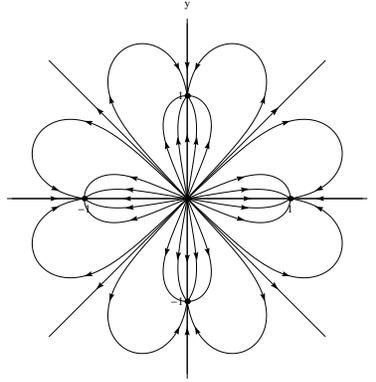


Рис. 4. Фазовый портрет системы (23)

На рис. 4 приведён фазовый портрет системы (23).

Условия Коши–Римана (18) для многочленов $P_n(x, y)$, $Q_n(x, y)$ не являются необходимыми для существования рационального интеграла у системы (2).

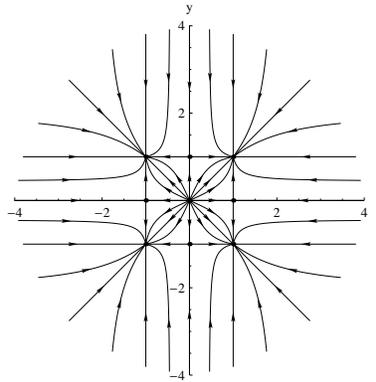


Рис. 5. Фазовый портрет системы (24)

Пример 5. Рассмотрим систему

$$(24) \quad \dot{x} = x - x^3, \quad \dot{y} = y - y^3.$$

Интегралом системы является рациональная функция

$$(25) \quad H(x, y) = \frac{y^2(1-x^2)}{x^2(1-y^2)}.$$

Особые точки системы (24): $O(0, 0)$ — дикритический узел, кроме того имеются дикритические узлы $O_1(1, 1), O_2(-1, 1), O_3(-1, -1), O_4(1, -1)$; особые точки $O_5(1, 0), O_6(0, 1), O_7(-1, 0), O_8(0, -1)$ — гиперболические седла. На экваторе Пуанкаре присутствуют четыре дикритических узла, расположенные в концах осей координат, и четыре гиперболических седла, находящиеся в концах биссектрис $y = \pm x$.

Система (24) имеет 8 инвариантных прямых $x=0, x=\pm 1, y=0, y=\pm 1, y=\pm x$, которые служат линиями уровня интеграла (25) для замечательных значений $c = 0, 1, \infty$.

Фазовый портрет системы (24) приведён на рис. 5.

Напомним, что в общем случае для нахождения рационального интеграла у системы степени n требуется $n(n+1)/2 + 2$ полиномиальных инвариантов, [10].

Используя методы и результаты работ [16], [17], мы можем предложить ещё две кубических системы типа Дарбу, которые имеют 8 линейных инвариантов и тем самым имеют рациональный интеграл.

$$(26) \quad \dot{x} = x + x^3, \quad \dot{y} = y + y^3.$$

$$(27) \quad \dot{x} = x - x^3, \quad \dot{y} = y - y^3.$$

Инварианты системы (26) суть

$$L_1=x, \quad L_2=1+ix, \quad L_3=1-ix, \quad L_4=y, \quad L_5=1+iy, \quad L_6=1-iy, \quad L_7=x+y, \quad L_8=x-y$$

с кофакторами

$$k_1 = 1 + x^2, \quad k_2 = ix(1 - ix), \quad k_3 = -ix(1 + ix), \quad k_4 = (1 + y^2), \\ k_5 = iy(1 - iy), \quad k_6 = -iy(1 + iy), \quad k_7 = 1 + x^2 - xy + y^2, \quad k_8 = 1 + x^2 + xy + y^2,$$

что даёт интеграл

$$H(x, y) = \frac{(x + y)^2(x - y)^2}{x^2y^2(1 + x^2)(1 + y^2)}.$$

При этом $c = 0, c = 1, c = \infty$ — его замечательные значения.

Инварианты системы (27) суть

$$L_1 = x, \quad L_2 = x+i, \quad L_3 = x-i, \quad L_4 = y, \quad L_5 = y+1, \quad L_6 = y-1, \quad L_7 = x+iy, \quad L_8 = x-iy$$

с кофакторами

$$k_1 = 1 + x^2, \quad k_2 = x(x - i), \quad k_3 = x(x + i), \quad k_4 = 1 - y^2, \\ k_5 = y(y - 1), \quad k_6 = -y(1 + y), \quad k_7 = 1 + x^2 - y^2 - ixy, \quad k_8 = 1 + x^2 - y^2 + ixy,$$

что даёт интеграл

$$H(x, y) = \frac{x^2(1 - y^2)}{y^2(1 + x^2)}.$$

По-прежнему $c = 0, c = 1, c = \infty$ — его замечательные значения.

Фазовые портреты систем (26), (27) приведены на рис. 6, 7.

Пример 6. Система

$$(28) \quad \dot{x} = x - y^3, \quad \dot{y} = y + xy^2$$

имеет рациональный интеграл

$$(29) \quad H(x, y) = \frac{x^2y + y^3 + 2x}{y}.$$

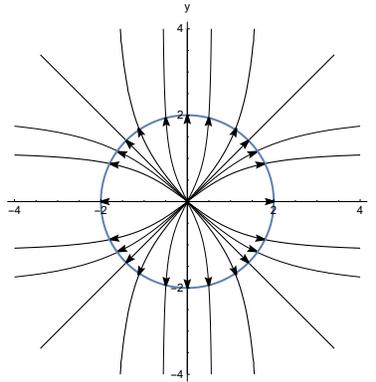


Рис. 6. Фазовый портрет системы (26)

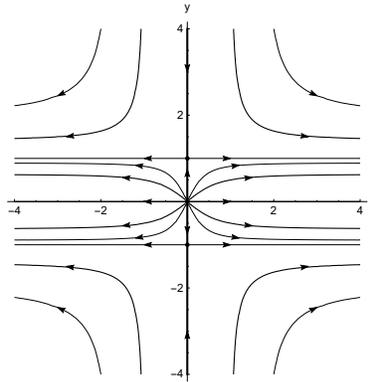


Рис. 7. Фазовый портрет системы (27)

Интеграл получен использованием *двух* инвариантов $L_1 = x^2y + y^3 + 2x$, $L_2 = y$ с кофакторами $k_1 = 1 + xy$, $k_2 = 1 + xy$. Поскольку $k_1 - k_2 = 0$ получаем интеграл (29)

$$H(x, y) = L_1 L_2^{-1} = \frac{x^2y + y^3 + 2x}{y}.$$

Имеется единственное состояние равновесия начало координат $O(0, 0)$, дикритический узел.

Две бесконечно удалённые особые точки расположены на пересечении экватора Пуанкаре с осью Ox , они являются негиперболическими и имеют тип седло-узел.

Фазовый портрет системы (28) приведён на рис. 8.

Нетрудно показать, что многочлен $x^2y + y^3 + 2x + cy$ ни при каких значениях c не разлагается на множители.

Таким образом, интеграл (29) не имеет замечательных значений.

Автор выражает признательность рецензенту за то, что он сообщил о работе [3].

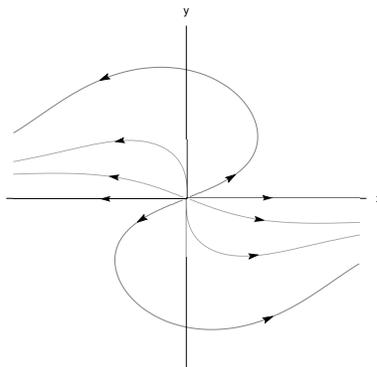


Рис. 8. Фазовый портрет системы (28)

REFERENCES

- [1] G. Darboux, *Mémoire sur les équations différentielles algébrique du premier ordre et du premier degré (Mélanges)*, Darboux Bull.(2) II (1878), 60–96, 123–144, 151–200.
- [2] H. Poincaré, *Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré*, Rend. Circ. Mat. Palermo 5 (1891), 161–191.
- [3] Горбузов В. Н., Самодуров А. А. *Уравнения Дарбу и его аналоги. Учебное пособие по спецкурсу*. Гродно: ГрГУ, 1985.
- [4] J. Llibre, X. Zhang, *A survey on algebraic and explicit non-algebraic limit cycles in planar differential systems*, Expositioes Mathematicae, **39**:1 (2021), 48–61.
- [5] A. Bendjeddou, J. Llibre, T. Salhi, *Dynamics of the polynomial differential systems with homogeneous nonlinearities and a star node*, J. Diff. Equ., **254**:8 (2013), 3530–3537.
- [6] Волокитин Е. П., Чересиз В. М., *Качественное исследование плоских полиномиальных систем типа Дарбу*, СЭМИ, **13** (2016), 1170–1186.
- [7] V. M. Cheresiz, E. P. Volokitin, *The algebraic curves of planar polynomial differential systems with homogeneous nonlinearities*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, **51** (2021), 1–12.
- [8] Alarcón B., Castro S. B. S. D., Labouriau I. S. *Global planar dynamics with star nodes: beyond Hilbert's 16th problem*, arXiv:2106.0756v2.
- [9] J. Giné, M. Grau, *Coexistence of algebraic and non-algebraic limit cycles, explicitly given, using Riccati equations*, Nonlinearity, **19**:8 (2006), 1939–1950.
- [10] I. A. Garcia, M. Grau M, *A survey on the inverse integrating factor*, Qualitative Theory of Dynamical Systems, **9** (2010), 115–166.
- [11] J. Chavarriga, H. Giacomini, J. Giné, J. Llibre, *Darboux integrability and the inverse integrating factor*, J. Diff. Equ., **194** (2003), 116–139
- [12] A. Ferragut, J. Llibre, *On the remarkable values of the rational first integrals of polynomial vector fields*, J. Diff. Equ., **241** (2007), 399–417.
- [13] P. Mardesić, C. Rousseau, B. Toni, *Linearization of isochronous centers*, J. Diff. Equ., **121**:1 (1995), 67–108.
- [14] E. P. Volokitin, *Algebraic first integrals of the polynomial systems satisfying the Cauchy–Riemann conditions*, Qualitative Theory of Dynamical Systems, **15**:2 (2016), 575–596.
- [15] Волокитин Е. П., Чересиз В. М., *Интегрирующий множитель дифференциальных систем типа Дарбу*, СЭМИ, **16** (2019), 1260–1275.
- [16] J. Llibre, N. Vulpe, *Planar cubic polynomial differential systems with the maximum number of invariant straight lines*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, **6**:4 (2006), 1301–1373.
- [17] C. Bujac, J. Llibre, N. Vulpe, *First integrals and phase portraits of planar differential cubic systems with the maximum number of invariant straight lines*, Qual. Theory Dyn. Syst., **15**:2 (2016), 1–22.

Волокитин Евгений Павлович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга, 4,
630090, Новосибирск, Россия.
Email address: volok@math.nsc.ru

Чересиз Владимир Михайлович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга, 4,
630090, Новосибирск, Россия.