S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 519.2
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 60X11

О МОДЕЛИРОВАНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ЗАДАННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.

С.В. ЧЕБОТАРЕВ

Abstract. The paper describes a method for modeling sequences of discrete random variables with a given dependence, as well as a method for checking the consistency of the obtained data with given theoretical parameters. An example of the application of the described method is given.

Keywords: discrete random variables, sequences with discrete random variables, generation of discrete dependent random variables.

1. Введение

При изучении дискретных случайных величин может возникнуть необходимость моделирования последовательностей зависимых случайные величины $\xi_{(n)} = (\xi_t),\ t = 1, 2, \dots, n$ с заданными параметраами. Например, стационарных последовательностей с заданными значениями $\mathbf{E}(\xi_t \cdot \xi_{t+1}) = \tau_1, \mathbf{E}(\xi_t \cdot \xi_{t+2}) = \tau_2, \mathbf{E}(\xi_t \cdot \xi_{t+3}) = \tau_3$ и так далее. Нассматриваемые в литературе методы моделирования зависимых случайных величин в основном ориентированы на случаи с непрерывными случайными величинами (см. например [1]-[5]). Применение их для моделирования дискретных случайных величин не всегда эффективно. В [6] для конечномерных последовательностей радемахеровских случайных величин были получены соотношения, которые определяют связь совместного

Chebotarev, S.V., About modeling sequences of dependent discrete random variables with given parameters.

© 2023 Чеботарев С.В.

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

распределения вероятностей последовательности с характеристиками случайных величин этой последовательности, а именно с их смешанными моментами. Полученные соотношения показывают, что совместное распределение последовательности радемахеровских случайных величин зависит от достаточно большого набора смешанных моментов этих случайных величин. При предъявлении требований ко всем параметрам, от которых зависит совместное распределение случайных величин, задача имеет экспоненциальный рост объема вычислений с ростом длины последовательности. Однако на практике часто требование предъявляют к ограниченному числу параметров, определяющих связи случайных величин. Но и в этом случае, если ориентироваться на создание функции распределения этих случайных величин, процедура получения самой функции распределения для этого вектора тоже имеет экспоненциальный рост вычислений в общем случае. Один из возможных решений этой проблемы предлагается в этой статье.

Ниже рассмотрен способ моделирования последовательностей случайных величин исходя из полученных в [6] результатов, позволяющий моделировать произвольные зависимости для указанных выше последовательностей случайных величин. Сам алгоритм очень прост в вычислительном отношении и может быть полезен для использования в том числе и в тех случаях, когда необходимо учитывать значения смешанных моментов более высокого порядка. Отметим, что при частичном задании вектора смешанных моментов важным элементом метода является то, что значение остальных смешанных моментов принимаются равными нулю, что позволяет избежать экспоненциального роста вычислений. Простейший способ проверки существования такого допустимого решения в статье приводится.

2. Описание метода.

В этой работе мы будем рассматривать последовательности радемахеровских случайных величин $\xi_{(n)} = (\xi_t)_{t\in I_{(n)}}$, $I_{(n)} = \{1,\ldots,n\}$, заданных на одинаковых пространствах элементарных исходов $\Omega = \Omega_1 = \Omega_2 = \ldots = \Omega_n$ со значениями $\xi_t(\omega) \in \mathfrak{X}_t$, где $\mathfrak{X}_t$ - множество значений t-й случайной величины, а именно - $\xi_t \in \mathfrak{X}(\theta) = \{-\theta, \theta\}$. Обозначим через v_I начальный смешанный момент случайных величин порядка $|I| = m$ здесь $I = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$:

$$v_I(\xi_{(n)}) = \mathbf{E}\xi_{t_1}\xi_{t_2}\ldots\xi_{t_m}$$

Определим суммарный смешанный момент порядка m:

$$v_m(\xi_{(n)}) = \sum_{|I|=m} v_I(\xi_{(n)}),\ \forall m = 1,\ldots,n,\ \text{положив } v_0 = 1,$$

а также усредненный смешанный момент порядка m:

$$\dot{v}_m(\xi_{(n)}) = \frac{v_m(\xi_{(n)})}{C_n^m}, \quad \forall m = 1,\ldots,n;$$

и

$$\ddot{v}_m(\xi_{(n)}) = \frac{v_m(\xi_{(n)})}{\sqrt{C_n^m}}, \quad \forall m = 1,\ldots,n.$$

Обозначим через :

$$\mathbf{zn}(\xi_{(n)}(\omega))_I = \prod_{t\in I} \xi_t(\omega).$$

В [6] доказан следующий результат:

Теорема 1. *Пусть задана произвольная последовательность случайных величин* $\xi_{(n)} = (\xi_t)_{t\in I_n} \in X_{(n)}(\theta)$ *на измеримом пространстве* $(\Omega_{(n)}, \mathfrak{A}_{(n)})$. *Тогда совместное распределение вероятностей случайных величин и значения смешанных моментов этих случайных величин* v_I, $I \in \mathcal{P}(n)$, *где* $\mathcal{P}(n) = \mathcal{P}(I_{(n)})$ *- множество всех подмножеств множества* $I_{(n)}$, *полностью определяют друг друга. При этом справедливы следующие соотношения:*

$$v_I = \sum_{\omega\in\Omega_{(n)}} \mathbf{zn}(\xi_{(n)}(\omega))_I \cdot \mathbf{P}_{\xi_{(n)}}(\omega); \tag{1}$$

$$\mathbf{P}_{\xi_{(n)}}(\omega) = \frac{1}{2^n} \sum_{I\in\Im(n)} \theta^{-2|I|}\mathbf{zn}(\xi_{(n)}(\omega))_I \cdot v_I. \tag{2}$$

Из содержания теоремы имеем, что $|\mathcal{P}(n)| = |\Omega_n| = 2^n$. Положим $m = 2^n$. Запишем в векторной форме соотношения (1) и (2):

$$\vec{\mathbf{v}} = \mathbb{A}'_m \cdot \vec{\mathbf{P}}_n,$$

$$\vec{\mathbf{P}}_n = \frac{1}{2^n}\mathbb{Q}_m \cdot \mathbb{A}_m \cdot \vec{\mathbf{v}}. \tag{3}$$

где

$$\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} v_{I_1} \\ v_{I_2} \\ \vdots \\ v_{I_m} \end{pmatrix}; \quad \vec{\mathbf{P}}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\xi_{(n)}}(\omega_1) \\ \mathbf{P}_{\xi_{(n)}}(\omega_2) \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{\xi_{(n)}}(\omega_m) \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbb{A}_m = \{a_{k,l}\}_{m\times m}$, где $a_{k,l} = \mathbf{zn}(\xi_{(n)}(\omega_k))_{I_l}$. Здесь l - это номер множества $I \in \mathcal{P}(n)$, k - это номер элемента ω в $\Omega_{(n)}$. Через $\mathbb{Q}_m = (q_{k,l})$ обозначена диагональная матрица $m \times m$, такая что

$$q_{k,l} = \begin{cases} \theta^{-2|I_k|}, & \text{при } k = l; \\ 0, & \text{при } k \neq l. \end{cases}$$

Формирование матрицы $\mathbb{A}_m$ для произвольного n можно описать следующим алгоритмом(MatLab) в предположении, что $\theta = 1$:

```
J=0:1:m-1;
I=de2bi(J);
w=I+I-1;
a=ones(m,m);
for k=1:m
    for l=1:m
      for t=1:n
        if I(l,t)==1 a(k,l)=a(k,l)*w(k,t); end;
      end;
    end;
end;
```

В дальнейшем полагаем $\xi_t \in \mathfrak{X}(\theta = 1) = \{-1, 1\}$

Отметим также что матрица $\mathbb{A}_{m=2^{t+1}}$ имеет фрактальную структуру и , несложно показать, что

$$\mathbb{A}_{m=2^{t+1}} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{m=2^t} & -\mathbb{A}_{m=2^t} \\ \mathbb{A}_{m=2^t} & \mathbb{A}_{m=2^t} \end{pmatrix} \quad \mathbb{A}_{m=2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Отсюда легко вычислить способ получения элемента $a_{i,j}$ матрицы $\mathbb{A}_{m=2^t}$:

```
      s=de2bi(i-1,N); % двоичный код номера строки
      c=de2bi(j-1,N); % двоичный код номера столбца
      a(i,j)=1;
      for k=N:-1:1
         if s(k)==0 & c(k)==1 a(i,j)=-a(i,j); end
      end
```

При непосредственном применении **теоремы 1** требование к объему памяти и объему вычислений растет экспоненциально. Однако специфика вычислений позволяет снизить эту зависимость. Не претендуя на исчерпывающее изложение возможностей снижения требования к объему памяти и вычислений, приведем основные способы, которые были использованы в предлагаемом ниже алгоритме для снижения вычислительной сложности.

1. Опираясь на теорему умножения вероятностей

$$\boldsymbol{p}(\omega) = \boldsymbol{p}(\omega_1\omega_2\dots\omega_{n-1}\omega_n) = \boldsymbol{p}(\omega_1)\boldsymbol{p}(\omega_2/\omega_1)\cdots\boldsymbol{p}(\omega_n/\omega_1\omega_2\dots\omega_{n-1}),$$

будем последовательно генерировать значения случайных величин последовательности, что позволяет вычислять лишь вероятности отдельных элементарных событий.

2. связь нумерации с ее двоичным представлением дает простой способ формирования как состава подмножества так и состава элементарного события. Например, если $n = 4$, то элементарных событий $\omega \in \Omega_{(n)}$ и различных подмножеств $I \in \mathcal{P}(n)$ будет $2^n = 16$. Рассмотрим $\omega_i = \omega_5$ и подмножество $I_j = I_5$. Двоичное представление числа $i = 5_{10} = (0101)_2$ (здесь младшие разряды справа). В MatLab этот перевод осуществляется процедурой $de2bi(i)$. Если рассматривать состав события, то $\omega_{i=5} = 2 * de2bi(i) - 1 = (\xi_4 = -1, \xi_3 = 1, \xi_2 = -1, \xi_1 = 1)$, а если рассматривать состав множества I_5, то $I_{5_{10}} = I_{(0101)_2} = \{\xi_3, \xi_1\}$.

3. Несложно показать, что при таком соотношении номеров с составом подмножеств и составом элементарных событий выполняется достаточно простое правило формирования строк a_{k_1}, a_{k_2} матрицы $\mathbb{A}_{m=2^{t+1}}$, соответствующих событиям $(\omega_{(t)}, \xi_{t+1} = -1)$ и $(\omega_{(t)}, \xi_{t+1} = 1)$ при моделировании $t+1$-го элемента последовательности. А именно, если мы смоделировали значение первых t элементов последовательности, получили событие $\omega_{(t)} = (\xi_1 = \pm 1, \xi_2 = \pm 1, \dots, \xi_t = \pm 1)$ и этому событию соответствует некоторая a_i-я строка матрицы $\mathbb{A}_{m=2^t}$, то для генерации значения случайной величины ξ_{t+1} необходимо вычислить условные вероятности событий

$$\boldsymbol{p}((\omega_{(t)}, \xi_{t+1} = -1)|\omega_t) \text{ и } \boldsymbol{p}((\omega_{(t)}, \xi_{t+1} = 1)|\omega_t)$$

Учитывая, что

$$\vec{a}_{k_1} = (\vec{a}_i, -\vec{a}_i), \text{ а } \vec{a}_{k_2} = (\vec{a}_i, \vec{a}_i) \text{ и}$$

$\vec{V}_{t+1} = [\vec{V}_t, \vartriangle\vec{V}_{t+1}]-$ суть первые 2^{t+1} координат вектора моментов $\vec{V}_m,$ где $m = 2^n$, причем вектор $\vec{V}_t$ - занимает первые 2^t координат, а вектор $\vartriangle\vec{V}_{t+1}$ занимает последующие координаты и содержит все смешанные моменты случайной величины ξ_{t+1} с предыдущими случайными величинами (см. нумерацию и строение вектора $\vec{V}_m$). Получаем, что

$$\boldsymbol{p}(\omega_{(t)}, \xi_{t+1} = -1) = \vec{a_{k_1}} * \vec{V}_{t+1} = \vec{a}_i * \vec{V}_t - \vec{a}_i * \vartriangle\vec{V}_{t+1},$$

$$\boldsymbol{p}(\omega_{(t)}, \xi_{t+1} = 1) = \vec{a_{k_2}} * \vec{V}_{t+1} = \vec{a}_i * \vec{V}_t + \vec{a}_i * \vartriangle\vec{V}_{t+1}.$$

Здесь символ $*$ - означает скалярное умножение векторов, получаем

$$\boldsymbol{p}((\omega_{(t)}, \xi_{t+1} = -1)|\omega_t) = \frac{\vec{a_{k_1}} * \vec{V}_{t+1}}{\vec{a_{k_1}} * \vec{V}_{t+1} + \vec{a_{k_2}} * \vec{V}_{t+1}} = \frac{\vec{a}_i * \vec{V}_t - \vec{a}_i * \vartriangle\vec{V}_{t+1}}{2 \cdot \vec{a}_i * \vec{V}_t}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{p}((\omega_{(t)}, \xi_{t+1} = 1)|\omega_t) = \frac{\vec{a_{k_2}} * \vec{V}_{t+1}}{\vec{a_{k_1}} * \vec{V}_{t+1} + \vec{a_{k_2}} * \vec{V}_{t+1}} = \frac{\vec{a}_i * \vec{V}_t + \vec{a}_i * \vartriangle\vec{V}_{t+1}}{2 \cdot \vec{a}_i * \vec{V}_t}. \tag{5}$$

4. Мы исключаем хранение в памяти всех векторов и матриц размерности 2^N, положив все неиспользуемые параметры нулевыми и будем проводить вычисления только с заведомо ненулевыми величинами.

Рассмотрим получения значений 1-й случайной величины (как вариант):

```
T=5;
on=100;
M=zeros(1,5);
Vtau=[0.1 0.2 -0.3];
rnd=rand(on,T);
G=length(Vtau);
N=1;              % получение значений первой сл. вел.
V=[1;M(1)];
a=[ 1 -1; 1 1 ];
p=(1/2)*a*V;     % расчет вектора вер-тей
for k=1:on       % ген. 1-й сл.вел. и форм-е инфор-ции для след. выч.
   if rnd(k,N)<=p(1) ks(k,1)=-1; it(k,1)=0; Vt(k)=p(1)*2;
      else ks(k,1)=1; it(k,1)=1; Vt(k)=p(2)*2;
   end
end
```

Здесь

on – число реализаций последовательности;

M – вектор математических ожиданий;

$Vtau$ = $[\tau_1, \tau_2, \tau_3]$;

ks – матрица, в k - й строке которой формируется текущее значение случайной величины k-й реализации;

it – матрица, в k - й строке которой запоминается очередной бит номера текущей строки матрицы $\mathbb{A}$ для k-й реализации;

Vt – вектор, в k - й строке которого хранится текущее значение $\vec{a}_i * \vec{V}_t$.

Для получения последующих значений случайных величин надо каждый раз пересчитывать вероятности по формулам (4),(5). Особенностью алгоритма является то, что для избавления от необходимости хранения вектора $\vec{a}_i$, размерность которого удваивается с каждым шагом, мы храним номер этой строки в двоичном представлении, а само значение любой координаты вектора вычисляем при помощи вышеуказанного алгорима получения элемента $a_{i,j}$ матрицы $\mathbb{A}_{m=2^t}$. Причем делаем это поэтапно по возрастанию порядка учитываемых смешанных моментов: сначала прибавляем ту часть, которая вносится моментами 1-го порядка(мат.ожиданиями)- строка 4 приведенного ниже алгоритма, затем моментами 2-го порядка(цикл в строках 5-10) и так далее(при необходимости учета моментов более высокого порядка необходимо добавить в алгоритм необходиое количество блоков учета влияния заданных моментов на $\triangle\vec{V}_{t+1}$. Учитывая, что количество заданных параметров ограничено, это приводит к существенному сокращению как объемов вычислений так и используемой памяти.

Несколько замечаний относительно самих алгоритмов учета веса смешанных моментов в формировании значения текущего $\Delta\vec{V}_{t+1}$(во фрагменте переменная dV):

- двоичное представление номера смешанного момента 1-го порядка в $\vec{V}_{t+1}$ всегда будет содержать только одну единицу и соответствующая ей координата строки матрицы $\mathbb{A}$ будет положительна (по правилам формирования двоичного представления строк и столбцов);
- двоичное представление номера смешанного момента 2-го порядка в $\vec{V}_{t+1}$ всегда будет содержать две единицы. Причем вторая единица и соответствующая ей координата строки матрицы $\mathbb{A}$ будет положительна (по тем же правилам, что и в первом случае), поэтому знак координаты строки матрицы $\mathbb{A}$ будет определяться положением первой единицы и это мы проверяем в цикле;

```
1      for N=2:T
2      Gt=min([G, N-1]);
3      itt=zeros(on,N);
4      dV=ones(1,on)*M(N);
5      for k=1:on
6         im=[it(k,:), 0 ];
7         ip=[it(k,:), 1 ];
8            for i=1:Gt
9               if ip(N-i)==0 dV(k)=dV(k)-Vtau(i); else dV(k)=dV(k)+Vtau(i);
                    end
10           end
11        pm=Vt(k)-dV(k);
12        pp=Vt(k)+dV(k);
13        pt=pm/(pm+pp);
14        if rnd(k,N)<=pt ks(k,N)=-1; itt(k,:)=im; Vt(k)=pm; else ks(k,N)=1;
              itt(k,:)=ip; Vt(k)=pp; end
15     end;
16     it=itt;
17  end
```

Здесь T - длина реализаций (число генерируемых элементов последовательности).

3. Оценка соответствия сгенерированных данных заданным теоретическим параметрам.

Остановимся на проверке соответствия полученной выборки заданным теоретическим параметрам моделируемой последовательности случайных величин. Некоторые вопросы статистического оценивания усредненных смешанных моментов автором рассматривались в [7]. Продолжим эти исследования применительно к этому случаю. Рассмотрим построение асимптотических доверительных интервалов (АДИ) для выбранных при моделировании значений, характеризующих случайные величины и их зависимости (на основании центральной предельной теоремы).

3.1. **Построение АДИ для $\mathbf{E}\xi_t$.** Здесь асимптотически верно следующее утверждение:

$$\mathbf{P}\left(\left|\sqrt{r}\frac{\frac{1}{r}\sum\limits_{i=1}^{r}\xi_t^i-\mathbf{E}\xi_t}{\sqrt{\mathbf{D}\xi_t}}\right|\leqslant\tau_{1-\epsilon/2}\right)=\gamma.$$

Откуда следует

$$\mathbf{P}(\hat{\theta}^-\leqslant\mathbf{E}\xi_t\leqslant\hat{\theta}^+)=\gamma,$$

где

$$\hat{\theta}^{\pm}=\hat{\xi}_t\pm\tau_{1-\epsilon/2}\frac{\sqrt{\mathbf{D}\xi_t}}{\sqrt{r}}.$$

Здесь

$$\begin{array}{rcl}
\xi_t^i & - & \text{значение случайной величины } \xi_t, \text{ полученное в } i-\text{й реализации;}\\
\tau_{1-\epsilon/2} & - & \text{квантиль стандартного нормального распределения уровня } 1-\epsilon/2;\\
\gamma & = & 1-\epsilon \text{ (уровень доверия);}\\
r & - & \text{число реализаций последовательности;}\\
\hat{\xi}_t & = & \dfrac{1}{r}\sum\limits_{i=1}^{r}\xi_t^i.
\end{array}$$

3.2. **Построение АДИ для $\ddot{v}_m(\xi)$.** В этом случае воспользуемся теоремой 2 (см. [7]), из которой следует, что случайная величина $\frac{\sqrt{r}}{\theta^m\cdot\sigma_m}\cdot(\hat{\ddot{v}}_m-\ddot{v}_m)$ слабо сходится к стандартному нормальному распределению $N_{0,1}$ Отсюда асимптотически верно следующее утверждение (в нашем случае $\theta=1$):

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{\sqrt{r}}{\sigma_m}\cdot(\hat{\ddot{v}}_m-\ddot{v}_m)\right|\leqslant\tau_{1-\epsilon/2}\right)=\gamma.$$

Откуда следует

$$\mathbf{P}(\hat{\theta}^-\leqslant\ddot{v}_m\leqslant\hat{\theta}^+)=\gamma,$$

где

$$\hat{\theta}^{\pm}=\hat{\ddot{v}}_m\pm\tau_{1-\epsilon/2}\frac{\sigma_m}{\sqrt{r}}.$$

Здесь

$$\hat{\ddot{v}}_m = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{T} r_k \cdot \frac{B_T(m,k)}{\sqrt{T^m}} \quad m = 1, \ldots, T, \tag{6}$$

причем вектор $\vec{B}_T(m) = (B_T(m,0),\ B_T(m,1), \ldots, B_T(m,T))$ - суть система ортогональных функций дискретного переменного $k = 0, 1, \ldots, T$ (см. [9]);

$$r_k = \sum_{i=1}^{r} I\left(\sum_{t=1}^{T} \xi_t^i = 2k - T\right), \text{ где } I \text{ - индикаторная функция;}$$

$$\sigma_m = \sqrt{\vec{B}_T(m) \cdot \Lambda \cdot \vec{B}'_T(m)};$$

а матрица $\Lambda = (\lambda_{i,j})$ с элементами

$$\lambda_{i,j} = \begin{cases} \mathbf{P}_T(i) \cdot (1 - \mathbf{P}_T(i)), & \text{для } i = 0, \ldots, T, \\ -\mathbf{P}_T(i) \cdot \mathbf{P}_T(j) & \text{для } i \neq j; \end{cases}$$

суть - ковариационная матрица, рассмотренная в [7], а $\mathbf{P}_T(i) = \mathbf{P}\Big(\sum\limits_{k=1}^{T} \xi_k = 2i - T\Big)$.

В ([9], [10]) показано, что равномерно по всем $x \in R$ при $x_n = \frac{2k_n - n}{\sqrt{n}}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ справедливо

$$\lim_{T\to\infty} \frac{B_T(m,k)}{\sqrt{T^m}} = \frac{1}{m!} H_m(x) = h(x),$$

где $H_m(x)$ и $h(x)$ - суть система ортогональных и ортонормированных многочленов Эрмита.

В этом случае замена $\frac{B_T(m,k)}{\sqrt{T^m}}$ на $h(x)$ в формуле (6) не изменит асимптотических соотношений, поэтому

$$\hat{\ddot{v}}_m \backsimeq \sum_{k=0}^{T} \frac{r_k}{r} \cdot h_m(x_k), \text{ где } x_k = \frac{2k - T}{\sqrt{T}} \text{ и } \ m = 1, \ldots, T,$$

Алгоритмически процесс вычисления доверительных интервалов для $\ddot{v}_m(\xi)$ включает в себя процедуры вычисления $\vec{B}_T(m)$; $\vec{\mathbf{P}}_T$ и σ_m например, следующим образом:

```
n=T+1;
   for к = 1:n
      Bnm(k) = 0;
       for s = 1:m+1
         if  (s-1)<=(к-1) & (m-s+1)<=(n-к);
            Bnm( к)=Bnm(к) +
                 (-1)^(s-1)*пchooseк(k-1,s-1)*пchooseк(n-к,m-s+1);
         end
      end
   end
Bnm=(-1)^m*Bnm/sqrt(T^m);
```

Здесь m - задано заранее. Вычисление осуществляется непосредственно по формуле, определяющей эту функцию в ([9]):

$$B_n(m,k) = (-1)^m \sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_k^i \cdot C_{n-k}^{m-i}.$$

Окончательное значение вектора: $Bnm = \frac{\vec{B}_T(m)}{\sqrt{T^m}}$.

```
m=2^T;
J=0:1:m-1;
I=de2bi(J);
li=sum(I,2);
for r=1:T+1
   Ps(r)=0;
   for k = 1:m
      if li(k)==r -1; Ps(r) = Ps(r) + Pt(k); end
   end
end
```

Здесь $Ps(r+1) = \mathbf{P}_T(r)$, а $Pt(k) = \boldsymbol{p}(\omega_k)$. Вектор li суть количество единиц в элементах множества I (или, что то же самое, количество единиц в элементарных событиях) после чего в цикле суммируются все вероятности элементарных событий, имеющих одно и то же число единиц среди элементарных событий. Для вычисления σ_m^2 можно воспользоваться следующим алгоритмом:

```
for i =1:n
   for j =1:n
      if i==j; L(i,j) = Ps(i)*(1-Ps(i); else L(i,j) )= -Ps(i)*Ps(j); end
   end
end
Sigma2=Bnm*L*transpose(Bnm);
```

Здесь также как и ранее $n = T+1$ и $Sigma2 = \sigma_m^2$.

3.3. **Построение АДИ для** $R(\tau)$**.** Введем в рассмотрение сл.в. $\zeta_{i,\tau} = \xi_i \cdot \xi_{i+\tau}$, $\zeta_{i,\tau} \in \mathfrak{X}(1)$, $i = 1,\dots,T-\tau$. Тогда

$$v_{m=1}(\zeta) = \sum_{i=1}^{T-\tau} \mathbf{E}\xi_i\xi_{i+\tau} = \sum_{i=1}^{T-\tau} \mathbf{E}\zeta_i = (\sqrt{T-\tau}) \cdot \ddot{v}_1(\zeta) = (T-\tau)R(\tau).$$

Отсюда

$$\ddot{v}_1(\zeta) = (\sqrt{T-\tau})R(\tau) \text{ и } R(\tau) = \frac{\ddot{v}_1(\zeta)}{\sqrt{T-\tau}} = \frac{v_1(\zeta)}{T-\tau} = \dot{v}_1(\zeta).$$

Это позволяет свести оценивание $R(\tau)$ к оцениванию $v_1(\zeta)$ по уже полученным соотношениям. В результате из [7] с учетом того, что $(m=1)$, имеем следующее асимптотическое соотношение

$$\mathbf{P}\left(\frac{\hat{\ddot{v}}_1(\zeta)}{\sqrt{T-\tau}} - \tau_{1-\epsilon/2}\frac{\hat{\sigma}_1(\zeta)}{\sqrt{r(T-\tau)}} \leqslant R(\tau) \leqslant \frac{\hat{\ddot{v}}_1(\zeta)}{\sqrt{T-\tau}} + \tau_{1-\epsilon/2}\frac{\hat{\sigma}_1(\zeta)}{\sqrt{r(T-\tau)}}\right) = \gamma$$

$$\hat{\theta}^{\pm} = \hat{R}(\tau) \pm \tau_{1-\epsilon/2}\frac{\hat{\sigma}_1(\zeta)}{\sqrt{r(T-\tau)}}, \text{ где } \hat{R}(\tau) = \frac{\hat{\ddot{v}}_1(\zeta)}{\sqrt{T-\tau}}.$$

Статистическое оценивание других смешанных моментов можно таким же образом свести к $v_1(\zeta')$ где ζ' - надлежащим образом сформированная последовательность случайных величин радемахеровского типа.

4. Пример.

4.1. **Описание параметров и их корректность:**

$T = 5$; $\mathbf{E}\xi_1 = \mathbf{E}\xi_2 = \mathbf{E}\xi_3 = \mathbf{E}\xi_4 = \mathbf{E}\xi_5 = 0$; $\quad R(1) = 0.1, R(2) = 0.2, R(3) = -0.3.$

Простейшая проверка на допустимость (вариант алгоритма) состоит из расчета вероятностей всех элементарных событий используя для расчета соотношение (2). При этом для каждого элементарного события (цикл по i) формируются коэффициенты при $R(i) = \tau_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ (циклы по k и t) а затем считается вероятность события (переменная p). Так как все случайные величины центрированы вектор математический ожиданий не используется.

```
Vtau=[0.1; 0.2; -0.3; 0];
T=5;
m=2^T;
for i=1:m
   I=de2bi(i-1,5);
   w=I+I-1;
   A=zeros(1,T-1);
   for k=1:T-1
     for t=1:T-k
          A(k)=A(k)+w(t).*w(t+k);
     end
   end
p(i)=1+A*Vtau;
end
p=p/m;
```

При корректном задании параметров должно выполняться $1 + A * Vtau \geqslant 0$. В результате вычислений получаем:

$$
\begin{array}{lcllcl}
\boldsymbol{p}(\omega_0) & = & (1+4\tau_1+3\tau_2+2\tau_3)/32 \geqslant 0; & \boldsymbol{p}(\omega_{16}) & = & (1+2\tau_1+1\tau_2+0\tau_3)/32 \geqslant 0;\\
\boldsymbol{p}(\omega_1) & = & (1+2\tau_1+1\tau_2+0\tau_3)/32 \geqslant 0; & \boldsymbol{p}(\omega_{17}) & = & (1+0\tau_1-1\tau_2-2\tau_3)/32 \geqslant 0;\\
\boldsymbol{p}(\omega_2) & = & (1+0\tau_1+1\tau_2+0\tau_3)/32 \geqslant 0; & \boldsymbol{p}(\omega_{18}) & = & (1-2\tau_1-1\tau_2+2\tau_3)/32 \geqslant 0;\\
\boldsymbol{p}(\omega_3) & = & (1+2\tau_1-1\tau_2-2\tau_3)/32 \geqslant 0; & \boldsymbol{p}(\omega_{19}) & = & (1+0\tau_1-3\tau_2+0\tau_3)/32 \geqslant 0;\\
\boldsymbol{p}(\omega_4) & = & (1+0\tau_1-1\tau_2+2\tau_3)/32 \geqslant 0; & \boldsymbol{p}(\omega_{20}) & = & (1-2\tau_1+1\tau_2+0\tau_3)/32 \geqslant 0;\\
\boldsymbol{p}(\omega_5) & = & (1-2\tau_1+1\tau_2+0\tau_3)/32 \geqslant 0; & \boldsymbol{p}(\omega_{21}) & = & (1-4\tau_1+3\tau_2-2\tau_3)/32 \geqslant 0;\\
\boldsymbol{p}(\omega_6) & = & (1+0\tau_1-3\tau_2+0\tau_3)/32 \geqslant 0; & \boldsymbol{p}(\omega_{22}) & = & (1-2\tau_1-1\tau_2+2\tau_3)/32 \geqslant 0;\\
\boldsymbol{p}(\omega_7) & = & (1+2\tau_1-1\tau_2-2\tau_3)/32 \geqslant 0; & \boldsymbol{p}(\omega_{23}) & = & (1+0\tau_1+1\tau_2+0\tau_3)/32 \geqslant 0;\\
\boldsymbol{p}(\omega_8) & = & (1+0\tau_1+1\tau_2+0\tau_3)/32 \geqslant 0; & \boldsymbol{p}(\omega_{24}) & = & (1+2\tau_1-1\tau_2-2\tau_3)/32 \geqslant 0;\\
\boldsymbol{p}(\omega_9) & = & (1-2\tau_1-1\tau_2+2\tau_3)/32 \geqslant 0; & \boldsymbol{p}(\omega_{25}) & = & (1+0\tau_1-3\tau_2+0\tau_3)/32 \geqslant 0;\\
\boldsymbol{p}(\omega_{10}) & = & (1-4\tau_1+3\tau_2-2\tau_3)/32 \geqslant 0; & \boldsymbol{p}(\omega_{26}) & = & (1-2\tau_1+1\tau_2+0\tau_3)/32 \geqslant 0;\\
\boldsymbol{p}(\omega_{11}) & = & (1-2\tau_1+1\tau_2+0\tau_3)/32 \geqslant 0; & \boldsymbol{p}(\omega_{27}) & = & (1+0\tau_1-1\tau_2+2\tau_3)/32 \geqslant 0;\\
\boldsymbol{p}(\omega_{12}) & = & (1+0\tau_1-3\tau_2+0\tau_3)/32 \geqslant 0; & \boldsymbol{p}(\omega_{28}) & = & (1+2\tau_1-1\tau_2-2\tau_3)/32 \geqslant 0;\\
\boldsymbol{p}(\omega_{13}) & = & (1-2\tau_1-1\tau_2+2\tau_3)/32 \geqslant 0; & \boldsymbol{p}(\omega_{29}) & = & (1+2\tau_1+1\tau_2+0\tau_3)/32 \geqslant 0;\\
\boldsymbol{p}(\omega_{14}) & = & (1+0\tau_1-1\tau_2-2\tau_3)/32 \geqslant 0; & \boldsymbol{p}(\omega_{30}) & = & (1+2\tau_1+1\tau_2+0\tau_3)/32 \geqslant 0;\\
\boldsymbol{p}(\omega_{15}) & = & (1+2\tau_1+1\tau_2+0\tau_3)/32 \geqslant 0; & \boldsymbol{p}(\omega_{31}) & = & (1+4\tau_1+3\tau_2+2\tau_3)/32 \geqslant 0;
\end{array}
$$

Где $\omega_0 = (-1, -1, -1, -1, -1), \omega_1 = (1, -1, -1, -1, -1), \omega_2 = (-1, 1, -1, -1, -1)$ и т.д.

Подчеркнем, что допустимость заданных параметров определяется в том числе и длинной последовательности. Так, например, для $T = 9$ при тех же значениях $\mathbf{E}\xi_i$ и τ_i из соотношения 2 следует, что

$$\boldsymbol{p}(1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1) = (1 + 0\tau_1 - 7\tau_2 + 0\tau_3)/512 = -0.4/512 < 0,$$

что означает недопустимость заданных параметров для выбранного случая. С помощью приведенного алгоритма нетрудно проверить, что даже и при $n = 6$ эти значения уже недопустимы, то есть при $n = 6$ и $Vtau = [0.1;\ 0.2;\ -0.3;\ 0;\ 0]$ $\vec{1}\ +\ A * Vtau \ngeq 0$.

4.2. **Результаты статистического анализа данных при $\gamma = 0.95$:**

Полученные асимптотические доверительные интервалы для математического ожидания случайных величин:

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5
θ^+	0.0138	0.2764	0.0550	0.1366	0.1568
$\hat{\xi}$	-0.1800	0.0800	-0.1400	-0.0600	-0.0400
θ^-	-0.3738	-0.1164	-0.3350	-0.2566	-0.2368

Полученные асимптотические доверительные интервалы для автоковариации i-го порядка $R(i) = \tau_i$, $i = 1, 2, 3, 4$

	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
θ^+	0.3184	0.3630	-0.0686	0.1760
$\hat{\tau}_i$	0.1050	0.1733	-0.2400	-0.0200
θ^-	-0.1084	-0.0163	-0.4114	-0.2160

Сгенерированная выборка $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)$:

N	1	2	3	4	5	N	1	2	3	4	5	N	1	2	3	4	5	N	1	2	3	4	5
1	-1	-1	-1	1	1	26	-1	-1	-1	1	1	51	-1	-1	-1	1	1	76	1	1	1	-1	-1
2	-1	1	-1	1	-1	27	-1	1	1	1	1	52	-1	1	1	1	-1	77	1	1	1	-1	1
3	-1	1	1	1	1	28	1	1	1	1	1	53	1	-1	1	-1	1	78	-1	1	-1	1	-1
4	-1	-1	-1	-1	1	29	-1	1	-1	1	1	54	-1	-1	1	-1	-1	79	-1	-1	1	-1	1
5	1	-1	-1	-1	-1	30	1	1	1	-1	1	55	-1	-1	-1	1	1	80	1	1	1	1	-1
6	1	-1	-1	1	1	31	-1	-1	-1	1	-1	56	-1	-1	-1	-1	1	81	-1	1	1	-1	-1
7	-1	1	-1	-1	-1	32	1	-1	-1	-1	-1	57	-1	1	1	1	1	82	1	-1	1	-1	1
8	-1	1	1	1	-1	33	-1	1	1	1	-1	58	1	1	1	1	-1	83	1	1	-1	-1	-1
9	1	1	-1	1	1	34	1	-1	1	-1	-1	59	-1	-1	1	1	1	84	1	1	-1	-1	-1
10	1	1	-1	1	-1	35	-1	-1	1	1	1	60	-1	1	-1	-1	-1	85	-1	1	-1	-1	-1
11	-1	1	-1	1	-1	36	1	1	-1	1	-1	61	1	-1	-1	1	1	86	1	-1	-1	-1	-1
12	-1	1	1	1	1	37	-1	-1	1	-1	1	62	-1	-1	-1	-1	-1	87	-1	-1	1	1	1
13	-1	1	-1	-1	-1	38	-1	1	-1	1	-1	63	1	1	-1	-1	1	88	1	-1	1	-1	-1
14	1	1	-1	-1	-1	39	1	1	1	-1	1	64	-1	1	-1	-1	-1	89	-1	-1	1	-1	1
15	1	1	-1	-1	-1	40	-1	-1	-1	-1	1	65	-1	-1	1	-1	1	90	1	1	1	1	1
16	-1	1	1	1	1	41	1	1	-1	-1	1	66	1	1	1	-1	1	91	-1	1	-1	1	-1
17	-1	1	-1	1	-1	42	-1	-1	-1	-1	1	67	-1	1	-1	1	-1	92	1	1	-1	-1	-1
18	-1	-1	-1	1	-1	43	-1	-1	-1	-1	1	68	1	-1	-1	1	1	93	-1	1	1	1	1
19	-1	-1	-1	-1	1	44	1	1	1	-1	-1	69	1	-1	-1	-1	-1	94	-1	1	-1	1	-1
20	1	1	1	1	-1	45	1	-1	1	1	1	70	-1	-1	-1	-1	-1	95	-1	-1	1	-1	-1
21	-1	-1	-1	1	1	46	-1	1	1	1	1	71	-1	-1	-1	1	-1	96	-1	-1	-1	-1	-1
22	-1	-1	-1	-1	-1	47	-1	1	1	1	1	72	-1	-1	-1	-1	-1	97	1	1	-1	1	-1
23	-1	1	1	1	1	48	-1	1	1	-1	-1	73	1	1	1	-1	-1	98	-1	1	1	-1	-1
24	1	-1	-1	-1	1	49	-1	-1	-1	-1	1	74	1	-1	1	-1	-1	99	1	-1	-1	-1	1
25	1	1	1	1	-1	50	1	-1	-1	-1	1	75	1	-1	-1	-1	1	100	-1	1	-1	1	-1

Отсюда видно, что статистический анализ результатов моделирования хорошо согласуютя с заданными теоретическими параметрами.

References

[1] Nelsen Roger B. An Introduction to Copulas. Lectures Notes in Statistics, 2nd Edition. New York: Springer-Verlag. 2006. 276p.

[2] Fantazzini D. Modeling multivariate distributions using copula functions. I. Applied econometrics,**2**,(22), 2011, 98—134.

[3] Blagoveshchensky Yu. N. Basic elements of the theory of copulas. Applied econometrics,**2**,(26), 2012, 113—130.

[4] Kovalevsky A.P.b Kostin V.S.b Khitsenko V.E. Modeling and identification of a sequence of dependent random variables with a symmetric stable distribution. - Siberian Journal of Industrial Mathematics, 2010. Volume XIII, **4**. 25–37.
[5] Garbar SV Modeling of stationary Markov random processes with a given distribution density by the autoregressive method. - Bulletin of NovSU, 2012. **67**. 13–15.
[6] Chebotarev S.V. On sequences of random variables with average connections. - Vestnik AltGPA, series: natural and exact sciences. 2011. **7**. 28–37.
[7] Chebotarev S.V. Statistical estimates of the average mixed moments. - Vestnik AltGPA, series: natural and exact sciences. 2014. **20**, 27–28.
[8] Borovkov A.A. Probability Theory. M.: Book house "LIBROKOM", 2009, 656p.
[9] Chebotarev S.V. On the properties of Kravchuk polynomials. - Vestnik BSPU, series: natural and exact sciences. **2** (2002), 53–58.
[10] G. Sego. Orthogonal polynomials. M. Fizmatgiz, 1962, 333p.

Sergey Vsevolodovich Chebotarev
Altay State Pedagogical University,
Molodeznaja st., 55,
656031, Barnaul, Russia
Email address: svcheb@gmail.com