Ответ на рецензию на статью

«НАХОЖДЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ, ПОРОЖДЕННОЙ ВОЗМУЩЕННЫМИ САМОСОПРЯЖЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ»

Автор: С.Н. Какушкин

Благодарю Вас за детальное изучение статьи. С замечаниями по теоретической части работы согласен, ответы на них приведены ниже.

1. *Что такое V? Это обозначение не определено.*

По всему тексту работы предполагается, что $V = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_m, b_m]$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j \le b_j$, $j = \overline{1, m}$, $m \in \mathbb{N}$.

Изменения в текст статьи внесены.

2. *Автору необходимо дать определение „дискретного оператора“, поскольку этот термин может иметь разные значения в литературе. Например, «дискретным Лапласианом» называется разностный аналог оператора Лапласа.*

С замечанием согласен. Оператор T, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, назовем „дискретным оператором“, если существует некоторое комплексное число λ_0 такое, что $R_{\lambda_0} = (T - \lambda_0 E)^{-1}$ является вполне непрерывным оператором в H. Другими словами, если резольвента оператора T при некотором числе λ_0 является вполне непрерывным оператором ([1], стр. 327).

Изменения в текст статьи внесены.

3. *Необходимо явно указать в статье, что оператор T является самосопряженным (если это так).*

С замечанием согласен. По всему тексту статьи предполагается, что оператор T является самосопряженным оператором.

Изменения в текст статьи внесены.

4. *Почему операторы T и $T+P$ имеют бесконечное число собственных значений? Желательно привести объяснение со ссылкой на литературу.*

Обозначения собственных чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ невозмущенного оператора T и $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ возмущенного оператора $T + P$ для данного вопроса означают, что их число счетно, т.е. все собственные числа можно представить в виде бесконечной последовательности $\{\lambda_k\}$, причем по тексту работы предполагается $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le ... \le |\lambda_n| \le ...$ (см., напр., [2], следствие 4.5, ч. 2, §4.6). Согласно лемме 1.2.2 [3], внутри окружности T_N при достаточно больших N находится одинаковое количество собственных чисел операторов T и $T + P$, следовательно, собственные числа μ_k оператора $T + P$ можно занумеровать в порядке неубывания, используя индексы от 1 до N.

Пояснения в текст статьи внесены.

5. *Определение числа N не совсем корректно. Это значение определяется через радиус $\rho_N = \dfrac{|\lambda_N + \lambda_{N+1}|}{2}$ с использованием самого себя. Нужно переформулировать это определение.*

С замечанием согласен. Введем число N такое, что для всех $n \ge N$ выполняются неравенства $q_n = \dfrac{2\|P\|}{|\lambda_{n+1} - \lambda_n\|} < 1$, тогда линейный оператор $T + P$ является дискретным, и внутри окружности T_N находится одинаковое количество собственных чисел операторов T и $T + P$ (см., напр., гл. 5, §4, лемма 3 [1]; лемма 1.2.2 [3]).

Изменения в текст статьи внесены.

6. *Доказательство теоремы 1 почти дословно совпадает с доказательством из статьи: S.I. Kadchenko, S.N. Kakushkin, G.A. Zakirova, «Spectral problems on compact graphs», Вестн. ЮУрГУ.*

Сер. Матем. моделирование и программирование, 10:3 (2017), 156–162. В таких случаях теорема должна приводиться без доказательства со ссылкой на статью. Либо можно оставить доказательство, но указать, что оно аналогично доказательству из статьи и приводится для полноты изложения.

С замечанием согласен, оставил только формулировку теоремы.

7. *Почему «система собственных функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ оператора T является замкнутой в пополнении пространства $L_2(V)$ по энергетической норме»?*

Функции v_k являются собственными элементами оператора T и образуют в $L_2(V)$ ортогональный базис. Поэтому система этих функций является замкнутой в $L_2(V)$, а значит, и в H_{T+P}, поскольку $L_2(V)$ является всюду плотным в H_{T+P} (см. определение 4.11 и теорему 4.23 [2]).

8. *Алгоритм программной реализации описан для $V = [0, l]$, однако при рассмотрении примера применяется к прямоугольной области $[0, a] \times [0, b]$. Рекомендую автору привести описание алгоритма в разделе 2 для произвольной области V, чтобы в дальнейшем алгоритм можно было применять к различным областям.*

С замечанием согласен, в разделе 2 будет приведен алгоритм для произвольной области.

9. *Коэффициенты $a_1, ..., a_{n-1}, a_{n+1}, ..., a_N$ находятся из системы линейных уравнений (4), построенной в предположении, что $a_n = 1$. Однако далее для вычисления коэффициента a_n приводятся довольно сложные формулы. Возникает вопрос: почему бы просто не положить $a_n = 1$? Тогда набор коэффициентов $a_1, ..., a_N$ даст точное решение системы $A(\mu_n)X = 0$. Автору стоит использовать эту очевидную идею, либо пояснить, почему она не работает.*

С замечанием согласен, в работе опечатка: вариант алгоритма, где $a_n = 1$ ранее был применим к некоторым частным задачам. В статье рассматривается алгоритм применимый для более широкого класса задач. Для отыскания единственного решения, используемого при построении собственной функции, при программной реализации алгоритма предлагается исключить одно уравнение однородной системы алгебраических уравнений, тем самым сделав ее неоднородной. Решения полученной системы используются в вычислении компаненты, номер которой соответствует номеру отброшенного уравнения, по формулам (5).

Список литературы

[1] Садовничий, В.А. Теория операторов : учеб. для вузов с углубленным изучением математики. – 5-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2004. – 384 с.

[2] Власова, Е.А. Приближенные методы математической физики: учеб. для вузов. – 2-е изд., стереотип. / Е.А. Власова, В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 704 с.

[3] Кадченко, С.И. Новый метод вычисления собственных чисел возмущенных самосопряженных операторов : специальность 05.13.18 „Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ“ : диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук / Кадченко Сергей Иванович. — Магнитогорск, 2003. — 301 с. – EDN NMYJYH.