S©MR ISSN 0000-0000

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 00, стр. 00–00 (2023) УДК 519.6
DOI 00.00000/semi.2023.00.xxx MSC 47A10

НАХОЖДЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ, ПОРОЖДЕННОЙ ВОЗМУЩЕННЫМИ САМОСОПРЯЖЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

С.Н. КАКУШКИН

Abstract. The article develops a technique for finding the eigenfunctions of perturbed self-adjoint operators given in a separable Hilbert space. It is shown that the eigenfunctions of the unperturbed spectral problem can be used as basis functions. A new computationally efficient algorithm for more accurate finding of the eigenfunctions of the spectral problems is presented. Examples of the results of computational experiments confirming the effectiveness of the developed method are shown.

Keywords: spectral theory, eigenfunctions, perturbed operators, Hilbert space.

Введение

В статье рассматривается обоснование численного метода решения широкого класса спектральных задач, порожденных возмущенными самосопряженными операторами, заданными в сепарабельном гильбертовом пространстве. К постановке таких задач приводит большое количество моделируемых процессов из различных областей знания. Например, задачи гидродинамической теории устойчивости, идентификации композитных материалов, обработки изображений, сейсморазведки, электрических колебаний в протяженной линии и многие другие. Особо перспективным представляется применение разработанной методики к спектральным задачам, заданным на компактных графах, теория которых активно развивается в настоящее время.

Kakushkin, S.N., Finding an approximate solution to the spectral problem generated by perturbed self-adjoint operators.

Поступила 00 января 2023 г., опубликована 00 февраля 2023 г.

При численном нахождении собственных функций линейных операторов, как правило, приходится сталкиваться со следующими трудностями. Для линейного оператора $T+P$, определенного в H строится последовательность конечномерных подпространств $H_k \subseteq H$, определенных бесконечной последовательностью параметров $k_1, ..., k_n, ...$. Если для любых $f \in H$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $\hat{k} = \hat{k}(f,\varepsilon) > 0$, что $\inf\limits_{f_i \in H_k} \|f - f_i\| < \varepsilon$, $i = \overline{1, N_k}$, $N_k = \dim H_k$ для всех $k < \hat{k}$, то последовательность подпространств $\{H_k\}$ полна в H [1]. Это означает, что любой элемент $f \in H$ может быть с необходимой степенью точности аппроксимирован элементами пространства H_k. Если удалось построить такую полную последовательность подпространств $\{H_k\}$, то в H_k выбирается базис $\{\varphi_n\}_{n=1}^{N_k}$, состоящий из конечного числа элементов, используя которые, линейный оператор $T+P$ определяется некоторой матрицей $\mathbf{A} = \|(A\varphi_k, \varphi_j)\|_{k,j=1}^{N_k}$ [2]. Далее вычисляются собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$. Разлагая компаненты этих векторов по элементам выбранного базиса, можно найти приближенное решение исходной спектральной задачи.

Стоит отметить, что размерность матрицы $\mathbf{A}$ характеризуется числом $N_k = \dim H_k$. Однако, известно, что матрицы высокой размерности обладают свойствами, существенно отличными от свойств матриц малой размерности – кроме собственных чисел у таких матриц есть *почти собственные числа* μ такие, что $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mu\mathbf{x}\| \le \varepsilon\|\mathbf{x}\|$ при $\|\mathbf{x}\| \ne 0$ и очень малом ε [3]. Найденные численными методами такие собственные значения могут и не являться решением исходной спектральной задачи.

Уникальность разработанного метода нахождения собственных функций возмущенных самосопряженных операторов, заданных в сепарабельном гильбертовом пространстве, состоит в том, что предлагается неитерационный численный метод, в основе которого лежат простые формулы, использующие информацию о спектральных характеристиках невозмущенного оператора и его возмущающем операторе. Аппроксимация возмущенного оператора матрицей не требуется. Кроме того, новый метод превосходит ранее разработанный метод регуляризованных следов нахождения собственных функций возмущенных дискретных операторов в плане вычислительной эффективности [4] – [6].

В статье для цельного изложения метода все рассуждения приводятся в пространстве $\mathbf{L}_2(V)$, где $V = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_m, b_m]$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j \le b_j$, $j = \overline{1, m}$, $m \in \mathbb{N}$.

1. Нахождение собственных функций

Рассмотрим спектральную задачу

$$(T+P)u_n = \mu_n u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Здесь T – самосопряженный полуограниченный снизу дискретный, а P – ограниченный операторы, заданные в пространстве $\mathbf{L}_2(V)$. Оператор T, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, назовем дискретным, если существует некоторое комплексное число λ_0 такое, что $R_{\lambda_0} = (T - \lambda_0 E)^{-1}$ является вполне непрерывным оператором в H [7]. Обозначим через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственные числа оператора T, занумерованные в порядке неубывания, а через $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – соответствующие им собственные функции ($x \in V$). Следуя работам Садовничего В.А. и Дубровского В.В. (см., напр., [8]), обозначим через N – количество всех неравных друг другу собственных чисел λ_k, лежащих внутри окружности T_N радиуса $\rho_N = \dfrac{|\lambda_{N+1} + \lambda_N|}{2}$ с центром в начале координат комплексной плоскости. Если для всех $n \geq N$ выполняются неравенства $q_n = \dfrac{2\|P\|}{|\lambda_{n+1} - \lambda_n\|} < 1$, тогда оператор $T + P$ является дискретным, и внутри окружности T_N находится одинаковое количество собственных чисел операторов T и $T + P$ [7]. Через $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ обозначим собственные числа возмущенного оператора $T+P$, занумерованные в порядке неубывания их действительных частей, а через $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – соответствующие им собственные функции ($x \in V$).

Следуя общей схеме метода ортогональных проекций, точное решение спектральной задачи (1) будем искать в виде:

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Здесь a_k – неизвестные пока числовые коэффициенты, а функции $v_k(x)$ образуют счетный базис в $\mathbf{L}_2(V)$ с энергетической нормой $\|v_k(x)\|_{T+P}$, индуцированной энергетическим скалярным произведением $(v_k, v_m)_{T+P} = \Big((T + P)v_k, v_m\Big)$, $\forall k, m \in \mathbb{N}$. Обозначим пространство $\mathbf{L}_2(V)$ с энергетической нормой $\|v_k(x)\|_{T+P}$ через H_{T+P}. Справедлива теорема [9].

Теорема 1. *Пусть T – дискретный полуограниченный снизу оператор, а P – ограниченный оператор, действующие в пространстве $\mathbf{L}_2(V)$, тогда собственные функции оператора T образуют счетный базис в энергетическом пространстве H_{T+P}.*

Из теоремы 1 следует, что собственные функции оператора T, т.е. решения спектральной задачи $Tv_n = \lambda_n v_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), можно использовать в качестве базисных функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ решения (2).

Для нахождения *приближенного* решения $\widetilde{u}_n(x)$ спектральной задачи (1), ограничимся первыми N слагаемыми, входящими в (2): $\widetilde{u}_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} a_k v_k(x)$, $\forall N \in \mathbb{N}$. О сходимости приближенного решения $\widetilde{u}_n(x)$ к точному можно найти, например, в [10].

Опишем вычислительно эффективный способ нахождения коэффициентов a_k, входящих в (2), для спектральных задач, заданных в $\mathbf{L}_2(V)$. Разобьем область V на N подобластей, обозначим их через V_k, $k = \overline{1, N}$, причем $\bigcup\limits_{k=1}^{N} V_k = \widetilde{V}$, $V_k \cap V_l = \varnothing$ при $k \neq l$, а мера Лебега множества $V \setminus \widetilde{V}$ равна нулю. Введем функцию $z_j(x) = \begin{cases} 1, & x \in V_j; \\ 0, & x \in V \setminus V_j, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \end{cases}$ Умножим скалярно левую и правую части (1) на z_j. С учетом (2) получим:

$$\Big((T + P)u_n, z_j\Big) = \Big((T + P)\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k, z_j\Big) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k (T + P)v_k, z_j\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Big((T + P)v_k, z_j\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Big[(\lambda_k v_k, z_j) + (Pv_k, z_j)\Big] = \mu_n \sum_{k=1}^{\infty} a_k (v_k, z_j).$$

Отсюда получим однородную систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_k, необходимых для нахождения приближения собственной функции $\widetilde{u}_n$, соответствующей собственному числу μ_n оператора $T+P$:

$$\sum_{k=1}^{N} a_k\Big[(\lambda_k-\mu_n)\int\limits_{V_j} v_k dV_j+\int\limits_{V_j} Pv_k dV_j\Big]=0,\quad j=\overline{1,N}. \tag{3}$$

Однородная система (3) имеет бесконечное количество решений, что осложняет применение данной методики при программной реализации. Был получен простой, вычислительно эффективный алгоритм, позволяющий с высокой точностью найти собственные функции возмущенных самосопряженных операторов.

2. Алгоритм программной реализации

Разделим каждый отрезок $[a_j,b_j]$, $j=\overline{1,m}$ области V на N_j частей и занумеруем полученные области $V_{\widetilde{j}}$ одним индексом $\widetilde{j}$ так, чтобы каждому $\widetilde{j}$ ставился в соответствие один набор индексов i_j: $V_{\widetilde{j}}=[a_{i_1},b_{i_1}]\times[a_{i_2},b_{i_2}]\times\ldots\times[a_{i_m},b_{i_m}]$, $i_j=\overline{1,N_j}$, $\widetilde{j}=\overline{1,\widetilde{N}}$, $\widetilde{N}=\prod\limits_{k=1}^{m}N_k$. Количество разбиений N_k необходимо подбирать таким образом, чтобы $\widetilde{N}\le N$.

Перепишем систему (3) в виде матричного уравнения: $A(\mu_n)X=\mathbf{0}$, где $A(\mu_n)=\|b_{\widetilde{j}k}\|_{\widetilde{j},k=1}^{\widetilde{N}}$, $X=(a_1,a_2,\ldots,a_{\widetilde{N}})^T$,

$$b_{\widetilde{j}k}=(\lambda_k-\mu_n)\int\limits_{a_{i_1}}^{b_{i_1}}\ldots\int\limits_{a_{i_m}}^{b_{i_m}} v_k dx_1\ldots dx_m+\int\limits_{a_{i_1}}^{b_{i_1}}\ldots\int\limits_{a_{i_m}}^{b_{i_m}} Pv_k dx.$$

Для нахождения n-ой собственной функции $\widetilde{u}_n$, $1\le n\le\widetilde{N}$, $n\in\mathbb{N}$ в матрице $A(\mu_n)$ исключим n-ую строку, а n-ый столбец перенесем в правую часть матричного уравнения с противоположным знаком. Получим:

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & \ldots & b_{1,n-1} & b_{1,n+1} & \ldots & b_{1,\widetilde{N}}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ b_{n-1,1} & \ldots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n+1} & \ldots & b_{n-1,\widetilde{N}}\\ b_{n+1,1} & \ldots & b_{n+1,n-1} & b_{n+1,n+1} & \ldots & b_{n+1,\widetilde{N}}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ b_{\widetilde{N},1} & \ldots & b_{\widetilde{N},n-1} & b_{\widetilde{N},n+1} & \ldots & b_{\widetilde{N},\widetilde{N}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_1\\ \ldots\\ a_{n-1}\\ a_{n+1}\\ \ldots\\ a_{\widetilde{N}}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} b_{1,n}\\ \ldots\\ b_{n-1,n}\\ b_{n+1,n}\\ \ldots\\ b_{\widetilde{N},n}\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Система уравнений (4) дает возможность определить все коэффициенты a_j, кроме коэффициента a_n. Коэффициент a_n можно найти из условия нормировки $a_n=\pm\sqrt{C_a-\sum\limits_{\substack{k=1\\k\ne n}}^{\widetilde{N}}a_k^2}$, где C_a – норма собственного вектора $(a_1,\ \ldots,\ a_{\widetilde{N}})^T$ (см., напр., [11], [12]). Однако, на практике для большинства исследуемых математических моделей нахождение коэффициента a_n из этого условия либо давало слишком большое расхождение с искомым значением, либо вовсе не давало никаких результатов. Связано это, во-первых, с неопределенностью выбора знака перед коэффициентом a_n, во-вторых, с погрешностью, которая возникает при численном решении матричного уравнения: погрешность будет возрастать при увеличении количества базисных функций $\widetilde{N}$. Предложим другой, более точный способ нахождения коэффициента a_n.

Подставим решение $\widetilde{u}_n$, с найденными из уравнения (4) коэффициентами a_k, $k=\overline{1,\widetilde{N}}$, $k \neq n$, в уравнение (1) и проинтегрируем по области V:

$$\int\limits_V \Big[(T+P)u_n - \mu_n u_n\Big] dV = \int\limits_V \Big[\sum_{j=1}^{\widetilde{N}} a_j T v_j + \sum_{j=1}^{\widetilde{N}} a_j P v_j - \mu_n \sum_{j=1}^{\widetilde{N}} a_j v_j\Big] dV =$$

$$= \int\limits_V \sum_{j=1}^{\widetilde{N}} a_j \lambda_j v_j dV + \int\limits_V \sum_{j=1}^{\widetilde{N}} a_j P v_j dV - \mu_n \int\limits_V \sum_{j=1}^{\widetilde{N}} a_j v_j dV =$$

$$= a_n \Big[(\lambda_n - \mu_n)\int\limits_V v_n dV + \int\limits_V P v_n dV\Big] +$$

$$+ \int\limits_V \sum_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{\widetilde{N}} a_j \lambda_j v_j dV + \int\limits_V \sum_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{\widetilde{N}} a_j P v_j dV - \mu_n \int\limits_V \sum_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{\widetilde{N}} a_j v_j dV = 0.$$

Разрешив уравнение относительно a_n, получим:

$$a_n = \frac{\mu_n \int\limits_V \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{\widetilde{N}} a_j v_j dV - \int\limits_V \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{\widetilde{N}} a_j \lambda_j v_j dV - \int\limits_V \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{\widetilde{N}} a_j P v_j dV}{(\lambda_n - \mu_n)\int\limits_V v_n dV + \int\limits_V P v_n dV}. \tag{5}$$

Таким образом, для вычисления коэффициентов a_k, $k=\overline{1,\widetilde{N}}$, $k \neq n$, необходимо решить любым известным способом неоднородное матричное уравнение (4), а неизвестный коэффициент a_n вычислить по линейной формуле (5).

3. Вычислительный эксперимент

Для проверки описанной методики были проведены вычислительные эксперименты по нахождению собственных функций возмущенного оператора Лапласа, заданного на отрезке $[0;l]$ и на прямоугольнике $[0;a]\times[0;b]$ $(l,a,b \in \mathbb{R})$ с границей Г.

Рассмотрим спектральную задачу

$$\begin{gathered} (T+P)u = \mu u, \quad u \in \widetilde{H}, \\ \widetilde{H} = \{u | u \in \mathbf{C}^2(V) \bigcap \mathbf{C}(V),\ \Delta u \in \mathbf{L}_2(V),\ u\Big|_\Gamma = 0\}. \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $T=-\Delta$, а P – оператор умножения на некоторую функцию $p(x)$, $x \in V$.

Собственные числа μ_n возмущенного оператора $T+P$ вычислялись методом, описанным в работах С.И. Кадченко по формулам: $\mu_n = \lambda_n + (Pv_n, v_n) + \widetilde{\delta}(n)$, где для $\widetilde{\delta}(n)$ справедливы оценки $|\widetilde{\delta}(n)| \leq (2n-1)\rho_N \dfrac{q^2}{1-q}$, $q = \max\limits_{n\in\mathbb{N}} q_n$, $q_n = \dfrac{2\|P\|}{|\lambda_{n+1}-\lambda_n|} < 1$ (см., напр., [13]).

В случае, когда $V = [0; l]$, собственные числа λ_n и соответствующие им собственные функции $v_n(x)$ невозмущенного оператора T имеют вид:

$$\lambda_n = \Big(\frac{\pi n}{l}\Big)^2, \quad v_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n} x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Отрезок V делился на N частей: $V_1 = [c_0 = 0; c_1]$, $V_2 = [c_1; c_2]$, ..., $V_N = [c_{N-1}; c_N = l]$ ($c_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{0, N}$).

В случае, когда $V = [0; a] \times [0; b]$, собственные элементы оператора T имеют вид:

$$\lambda_{nk} = \pi^2\Big(\frac{n^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\Big), \quad v_{nk}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{k\pi y}{b}, \quad \forall n, k \in \mathbb{N},$$

а область V делим на $N \times N$ частей. В вычислительном эксперименте нумерация областей V_k ($k = \overline{1, N^2}$) производилась по правилу:

$$V_{(i-1)\cdot N+j} = [a_{j-1}; a_j] \times [b_{i-1}; b_i], \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Аналогично, одним индексом были занумерованы в порядке неубывания собственные числа λ_{nk}, а также соответствующие им собственные функции $v_{nk}(x, y)$ ($x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$).

Собственные функции возмущенного оператора $T+P$ были найдены описанным методом и методом А.Н. Крылова; первые обозначены через $\widehat{u}_n$, вторые – $\widetilde{u}_n$. В таблицах 1, 3 приведены значения разницы в процентах между левой и правой частями спектральной задачи (6) при подстановке в уравнение первых собственных функций $\widehat{u}_n$, найденных новым методом, и первых собственных функций $\widetilde{u}_n$, найденных методом А.Н. Крылова. В таблицах 2 и 4 – пример сравнения значений нормированных собственных функций в узлах дискретизации, полученных разными методами.

Таблица 1. Значения невязки уравнения (6) в процентах при $V = [0; \frac{\pi}{3}]$ и $p(x) = \sin(\frac{x}{3}) + x \cdot i$.

n	$\Big\lvert \frac{\lVert (T+P)\widehat{u}_n - \mu_n \widehat{u}_n \rVert}{\lVert \mu_n \widehat{u}_n \rVert} \Big\rvert \times 100\%$	$\Big\lvert \frac{\lVert (T+P)\widetilde{u}_n - \mu_n \widetilde{u}_n \rVert}{\lVert \mu_n \widetilde{u}_n \rVert} \Big\rvert \times 100\%$
1	0,022211582	0,049325018
2	0,001205399	0,088682602
3	0,000255294	0,037295943
4	0,000110375	0,010753444
5	0,000047613	0,002057378
6	0,000023213	0,000242708
7	0,000013997	0,000012252
8	0,000006057	0,000007082
9	0,000007506	0,000004872
10	0,000015661	0,000035467

Таблица 2. Сравнение значений восьмой собственной функции в узлах дискретизации, полученных разными методами, при $V = [0; \frac{\pi}{3}]$ и $p(x) = \sin(\frac{x}{3}) + x \cdot i$.

x	$\widehat{u}_8(x)$	$\widetilde{u}_8(x)$	$\lvert\widehat{u}_8 - \widetilde{u}_8\rvert$	$\left\lvert\frac{\widehat{u}_8 - \widetilde{u}_8}{\widetilde{u}_8}\right\rvert \times 100\%$
0	0	0	0	0
0,149	$-0,600228694 - 0,001361781i$	$-0,600022443 - 0,001667832i$	0,000369062	0,061507849
0,299	$1,081210974 + 0,001750061i$	$1,081062189 + 0,001971675i$	0,000266926	0,024691093
0,449	$-1,347638124 - 0,000911717i$	$-1,347708957 - 0,000782587i$	0,000147282	0,010928363
0,598	$1,346979545 - 0,000565024i$	$1,347147583 - 0,000929429i$	0,000401282	0,029787555
0,748	$-1,079707477 + 0,001476272i$	$-1,079790213 + 0,001898312i$	0,000430074	0,039829308
0,898	$0,599026547 - 0,001479458i$	$0,598984305 - 0,001494872i$	0,000044966	0,007507062
1,047	0	0	0	0

Таблица 3. Значения невязки уравнения (6) в процентах при $V = [0; \frac{\pi}{6}] \times [0; 0,42]$ и $p(x, y) = x^2 + xy + 2y$.

n	$\left\lvert\frac{\lVert(T+P)\widehat{u}_n - \mu_n\widehat{u}_n\rVert}{\lVert\mu_n\widehat{u}_n\rVert}\right\rvert \times 100\%$	$\left\lvert\frac{\lVert(T+P)\widetilde{u}_n - \mu_n\widetilde{u}_n\rVert}{\lVert\mu_n\widetilde{u}_n\rVert}\right\rvert \times 100\%$
1	0,00011415	0,000235647
2	0,000070489	0,000079876
3	0,00388655	0,000006501
4	0,000029408	0,000224659
5	0,000014949	0,00016657
6	0,000012842	0,000143982
7	0,000001456	0,000126637
8	0,000011626	0,000025412
9	0,000006124	0,000021634

Заключение

Разработанная методика нахождения собственных функций возмущенных дискретных полуограниченных операторов достаточно эффективна в применении к пространству $\mathbf{L}_2(V)$. Наиболее перспективное ее использование – спектральные задачи, заданные на компактных графах. При этом способ составления системы уравнений (4) путем разбиения области V на подобласти также успешно работает в случае, если заданная область имеет сложную форму. Из вычислительного эксперимента видно, что и в случае когда искомые функции заданы на прямоугольной области, результаты вычислений хорошо согласуются с известными методами.

References

[1] Marchuk G.I. *Metody vychislitel'noj matematiki* [Methods of Computational Mathematics]. Moscow, Nauka, 1977, 456 p.

Таблица 4. Сравнение значений пятнадцатой собственной функции в узлах дискретизации, полученных разными методами, при $V = [0; \dfrac{\pi}{6}] \times [0; 0,42]$ и $p(x, y) = x^2 + xy + 2y$.

x	y	$\widehat{u}_{15}(x, y)$	$\widetilde{u}_{15}(x, y)$	$\lvert\widehat{u}_{15} - \widetilde{u}_{15}\rvert$	$\left\lvert\frac{\widehat{u}_{15} - \widetilde{u}_{15}}{\widetilde{u}_{15}}\right\rvert \times 100\%$
$0,105$	$0,084$	$-2,384135493$	$-2,381678639$	$0,002456853$	$0,103156367$
$0,105$	$0,168$	$3,857609159$	$3,855400845$	$0,002208313$	$0,057278439$
$0,105$	$0,252$	$-3,857615668$	$-3,857329138$	$0,000286529$	$0,007428164$
$0,105$	$0,336$	$2,384083634$	$2,385051772$	$0,000968138$	$0,040591894$
$0,209$	$0,084$	$1,473483125$	$1,473301791$	$0,000181334$	$0,012307974$
$0,209$	$0,168$	$-2,384140314$	$-2,384873588$	$0,000733274$	$0,03074688$
$0,209$	$0,252$	$2,384157454$	$2,385964076$	$0,001806622$	$0,075718731$
$0,209$	$0,336$	$-1,4734228$	$-1,475238591$	$0,001815791$	$0,123084563$
$0,314$	$0,084$	$1,473466065$	$1,47113296$	$0,002333105$	$0,15859239$
$0,314$	$0,168$	$-2,384106212$	$-2,381781075$	$0,002325137$	$0,097621777$
$0,314$	$0,252$	$2,384298084$	$2,38336341$	$0,000934674$	$0,039216619$
$0,314$	$0,336$	$-1,473140387$	$-1,473889541$	$0,000749154$	$0,050828345$
$0,419$	$0,084$	$-2,384132295$	$-2,382909555$	$0,001222739$	$0,051312879$
$0,419$	$0,168$	$3,857636557$	$3,85782335$	$0,000186793$	$0,004841927$
$0,419$	$0,252$	$-3,85732048$	$-3,860241125$	$0,002920644$	$0,075659638$
$0,419$	$0,336$	$2,384719424$	$2,387118428$	$0,002399004$	$0,100497892$

[2] Kakushkin S.N., Ryazanova L.S. *Metody vychisleniya spektrov operatorov* [Methods for Calculating Operator Spectrums]. Magnitogorsk, Nosov Magnitogorsk State Technical University, 2016, 48 p.

[3] Bakhvalov N.S., ZHidkov N.P., Kobel'kov G.M. *CHislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Binom. Lab. Znanij, 2003, 632 p.

[4] Kadchenko S.I., Kakushkin S.N. The method of regularized traces. *Differencial'nye uravneniya i smezhnye voprosy* [Differential equations and related problems]. Sterlitamak, Bashkir State University, 2013, pp. 47 – 54 (in Russian).

[5] Kadchenko S.I., Kakushkin S.N. Finding of Values for Sums of Functional Rayleigh-Schredinger Series for Perturbed Self-Adjoint Operators. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie* [Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software], 2016, vol. 9, no. 3, pp. 137 – 143 (in Russian).

[6] Kakushkin S.N., Kadchenko S.I. Mathematical Modeling the Values of Eigenfunctions Finding for Orr-Sommerfeld's Problem of Hydrodynamical Stability Theory Via the Method of Regularized Traces. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: komp'yuternye tekhnologii, upravlenie, radioelektronika* [Bulletin of the South Ural State University. Series: Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics], 2013, vol. 13, no. 3, pp. 30 – 36 (in Russian).

[7] Sadovnichii V.A. *Teoriya operatorov* [Operator theory]. Moscow, Drofa, 2004, 384 p.

[8] Sadovnichii V.A., Dubrovskii V.V. Remark on a new method of calculation of eigenvalues and eigenfunctions for discrete operators. *Journal of Mathematical Sciences*, 1995, vol. 75, no. 3, pp. 1770 – 1772.

[9] Kadchenko S.I., Kakushkin S.N., Zakirova G.A. Spectral Problems on Compact Graphs. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2017, vol. 10, no. 3, pp. 156-162.

[10] Mihlin S.G. *Variacionnye metody v matematicheskoj fizike* [Variational methods in mathematical physics]. Moscow, 1970, 512 p.

[11] Kakushkin S.N. Development of a New Method for Finding Eigenfunctions of Perturbed Discrete Operators Given on Compact Graphs. *Ufimskaya osennyaya matematicheskaya shkola - 2021 : MATERIALY MEZHDUNARODNOJ NAUCHNOJ KONFERENCII* [Ufa Autumn

Mathematical School - 2021 : MATERIALS OF THE INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE]. Ufa, Limited Liability Company Aeterna, 2021, pp. 46 – 49 (in Russian).

[12] Kakushkin S.N. Algorithm of Finding Eigenfunctions of Perturbed Self-Adjoint Operators Given on Compact Graphs. *Matematicheskoe modelirovanie processov i sistem: Materialy XI Mezhdunarodnoj molodezhnoj nauchno-prakticheskoj konferencii* [Mathematical modeling of processes and systems: Materials of the XI International Youth Scientific and Practical Conference]. Sterlitamak, Sterlitamak branch of the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Professional Education „Bashkir State University“, 2021, pp. 234 - 238 (in Russian).

[13] Kadchenko S.I., Kakushkin S.N. *CHislennye metody regulyarizovannykh sledov spektral'nogo analiza* [Numerical Methods of Regularized Traces of Spectral Analysis]. Chelyabinsk, Izdatel'skij centr YUUrGU, 2015, 206 p.

Sergey Nikolaevich Kakushkin

Administration of the municipal district Beloretskiy district of the Republic of Bashkortostan,

Lenin st., 71,

453511, Beloretsk, Russia

Email address: kakushkin-sergei@mail.ru