Рецензия на статью

«НАХОЖДЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ, ПОРОЖДЕННОЙ ВОЗМУЩЕННЫМИ САМОСОПРЯЖЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ»

Автор: С.Н. Какушкин

В статье разработан метод нахождения собственных функций операторов вида $T + P$, где T — дискретный полуограниченных снизу оператор, P — ограниченный оператор, заданные в некотором пространстве $L_2(V)$. Метод развивает идеи предыдущих работ автора и С.И. Кадченко по нахождению собственных значений. Основные результаты статьи состоят в следующем:

1. Доказана теорема о базисности собственных фунций оператора T в энергетическом пространстве H_{T+P}.

2. Разработан практический алгоритм нахождения собственных функций.

3. Проведен вычислительный эксперимент на тестовых примерах. Найдены собственные функции для возмущенного оператора Лапласа на отрезке и на прямоугольнике. Выполнено сравнение с методом А.Н. Крылова. Авторский метод дает более точные результаты.

Актуальность исследования обусловлена возможностью применения разработанного метода для вычисления собственных функций дифференциальных операторов на геометрических графах. Такие операторы моделируют многие физические процессы в сетеподобных структурах и в последние годы играют важную роль в развитии науки о материалах. Поэтому данная тематика является перспективной как с теоретической, так и с практической точек зрения. Разработанный метод, насколько я могу судить, является новым и на тестовых примерах дает достаточно точные результаты. Однако у меня имеется ряд вопросов по теоретической части работы:

1. Что такое V? Это обозначение не определено.

2. Автору необходимо дать определение «дискретного оператора», поскольку этот термин может иметь разные значения в литературе. Например, «дискретным Лапласианом» называется разностный аналог оператора Лапласа.

3. Необходимо явно указать в статье, что оператор T является самосопряженным (если это так).

4. Почему операторы T и $T + P$ имеют бесконечное число собственных значений? Желательно привести объяснение со ссылкой на литературу.

5. Определение числа N не совсем корректно. Это значение определяется через радиус $\rho_N = \frac{|\lambda_N + \lambda_{N+1}|}{2}$ с использованием самого себя. Нужно переформулировать это определение.

6. Доказательство теоремы 1 почти дословно совпадает с доказательством из статьи: S. I. Kadchenko, S. N. Kakushkin, G. A. Zakirova, “Spectral problems on compact graphs”, Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование, 10:3 (2017), 156–162. В таких случаях теорема должна приводиться без

доказательства со ссылкой на статью. Либо можно оставить доказательство, но указать, что оно аналогично доказательству из статьи и приводится для полноты изложения.

7. Почему «система собственных функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ оператора T является замкнутой в пополнении пространства $L_2(V)$ по энергетической норме»?

8. Алгоритм программной реализации описан для $V = [0, l]$, однако при рассмотрении примера применяется к прямоугольной области $[0, a] \times [0, b]$. Рекомендую автору привести описание алгоритма в разделе 2 для произвольной области V, чтобы в дальнейшем алгоритм можно было применять к различным областям.

9. Коэффициенты $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_{n+1}, \ldots, a_N$ находятся из системы линейных уравнений (4), построенной в предположении, что $a_n = 1$. Однако далее для вычисления коэффициента a_n приводятся довольно сложные формулы. Возникает вопрос: почему бы просто не положить $a_n = 1$? Тогда набор коэффициентов $a_1, \ldots, a_N$ даст точное решение системы $A(\mu_n)X = 0$. Автору стоит использовать эту очевидную идею, либо пояснить, почему она не работает.

Вывод: статья может быть повторно рассмотрена в журнале после доработки в соответствии с указанными замечаниями.