S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 227–259 (2020) УДК 517.95
DOI 10.33048/semi.2020.17.017 MSC 35A05

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В ГАЛЕРКИНСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ О ТРЕХМЕРНОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ЖИДКОСТИ

А.Е. МАМОНТОВ, Д.А. ПРОКУДИН

Abstract. We study the initial-boundary value problem which describes the unsteady motion of a viscous compressible heat-conducting multicomponent fluid in a bounded domain of three-dimensional space. The passage to the limit is done in the Galerkin approximations of the regularized problem.

Keywords: Galerkin approximations, non-stationary boundary value problem, three-dimensional flow, viscous compressible heat-conducting fluid, homogeneous multi-velocity single-temperature multifluid.

В нашей предшествующей статье [4] было доказано глобальное существование решений регуляризованной задачи о пространственном нестационарном движении вязкой сжимаемой теплопроводной многокомпонентной жидкости. В данной работе совершается предельный переход по размерности галеркинских приближений.

Mamontov, A.E., Prokudin, D.A., Passage to the limit in the Galerkin approximations of the regularized problem of three-dimensional unsteady motion of a viscous compressible heat-conducting multifluid.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18–71–00024).

Поступила 19 декабря 2019 г., опубликована 28 февраля 2020 г.

1. Постановка задачи

1.1. **Формулировка уравнений динамики смесей.** Дана ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega$ класса $C^{2+\sigma_1}$, $\sigma_1 \in (0,1)$, и число $T > 0$. Движение в Ω теплопроводной смеси из двух вязких сжимаемых жидкостей с течением времени $t \in [0,T]$ описывается следующей системой уравнений в частных производных [5], [7] (см. также [2]):

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}_i) = 0, \quad i = 1,2, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial(\rho_i \boldsymbol{u}_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i) + \nabla p_i = \operatorname{div}\mathbb{S}_i + \boldsymbol{J}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1,2, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{2} \mathcal{E}_i \boldsymbol{u}_i\right) + \operatorname{div}\left(\boldsymbol{q} - \sum_{i=1}^{2} \mathbb{S}_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{i=1}^{2} p_i \boldsymbol{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{2} \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i + \rho g. \tag{1.3}$$

Данные уравнения представляют собой соответственно математические формулировки законов сохранения массы для каждой компоненты, законов сохранения импульса для каждой компоненты и закона сохранения полной энергии для смеси. Здесь $\rho_i \geqslant 0$ — плотность i-й компоненты; $\rho = \rho_1 + \rho_2$ — суммарная плотность; $\boldsymbol{u}_i$ — скорость i-й компоненты; $\mathcal{E}_i = \dfrac{\rho_i |\boldsymbol{u}_i|^2}{2} + \rho_i e_i(\rho_i, \theta)$ — полная энергия i-й компоненты, где $e_i(\rho_i,\theta)$ — внутренняя удельная энергия i-й компоненты, $\theta > 0$ — температура смеси; $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ — суммарная полная энергия; $p_i = p_i(\rho_i,\theta)$ — давление в i-й компоненте;

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_i &= \sum_{j=1}^{2} \left((\lambda_{ij} \operatorname{div} \boldsymbol{u}_j)\mathbb{I} + 2\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j)\right) = \\ &= \sum_{j=1}^{2} \left((\eta_{ij} \operatorname{div} \boldsymbol{u}_j)\mathbb{I} + 2\mu_{ij}\left(\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j) - \frac{1}{3}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}_j)\mathbb{I}\right)\right) \end{aligned} \tag{1.4}$$

— вязкая часть тензора напряжений в i-й компоненте, где $\mathbb{I}$ — единичный тензор, $\mathbb{D}(\boldsymbol{v}) = \dfrac{1}{2}\left((\nabla \otimes \boldsymbol{v}) + (\nabla \otimes \boldsymbol{v})^*\right)$ — тензор скоростей деформаций векторного поля $\boldsymbol{v}$ (верхний индекс $*$ означает транспонирование), а числовые коэффициенты вязкостей λ_{ij}, μ_{ij} и η_{ij} образуют следующие матрицы:

$$\mathbf{M} = \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^2 > 0, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^2, \quad \mathbf{H} = \{\eta_{ij}\}_{i,j=1}^2 = \boldsymbol{\Lambda} + \frac{2}{3}\mathbf{M} \geqslant 0, \tag{1.5}$$

откуда в частности следует, что

$$\mathbf{N} = \{\nu_{ij}\}_{i,j=1}^2 = \boldsymbol{\Lambda} + 2\mathbf{M} > 0; \tag{1.6}$$

далее,

$$\boldsymbol{J}_i = (-1)^i a(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) \tag{1.7}$$

— приток импульса в i-ю компоненту из другой компоненты; $\boldsymbol{f}_i$ — плотность внешних массовых сил, действующих из внешней среды на i-ю компоненту;

$$\boldsymbol{q} = -k(\theta)\nabla\theta \tag{1.8}$$

— суммарный тепловой поток, k — теплопроводность; наконец, g — плотность тепловых источников внешней среды.

1.2. **Определяющие уравнения.** Определяющие уравнения, связывающие термодинамические параметры между собой, обязаны удовлетворять определенным ограничениям, в частности, соотношениям Гиббса

$$\theta ds_i = de_i + p_i d\left(\frac{1}{\rho_i}\right) \quad \forall\, \rho_i,\, \theta > 0, \quad i = 1, 2, \tag{1.9}$$

где $s_i = s_i(\rho_i, \theta)$ — удельная энтропия i-й компоненты, что эквивалентно соотношениям Максвелла

$$\rho_i^2 \frac{\partial e_i}{\partial \rho_i} = p_i - \theta \frac{\partial p_i}{\partial \theta}, \quad i = 1, 2, \tag{1.10}$$

а также условиям термодинамической устойчивости

$$\frac{\partial p_i}{\partial \rho_i} > 0, \quad \frac{\partial e_i}{\partial \theta} > 0, \quad i = 1, 2. \tag{1.11}$$

Замечание 1. *Для гладких решений системы* (1.1), (1.2), (1.3) *уравнения* (1.3) (*ввиду* (1.1), (1.2), (1.10)) *можно записать в одной из следующих эквивалентных форм:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{2} \rho_i e_i + \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{2} \rho_i e_i \boldsymbol{u}_i\right) + \sum_{i=1}^{2} p_i \operatorname{div} \boldsymbol{u}_i + \operatorname{div} \boldsymbol{q} = \\ = \sum_{i=1}^{2} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) + a|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2 + \rho g, \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{2} \rho_i s_i + \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{2} \rho_i s_i \boldsymbol{u}_i\right) + \operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\right) = \\ = \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{2} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) - \frac{\boldsymbol{q} \cdot \nabla \theta}{\theta^2} + \frac{a|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2}{\theta} + \frac{\rho g}{\theta}, \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial e_i}{\partial \theta} \left(\frac{\partial(\rho_i \theta)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \theta \boldsymbol{u}_i)\right) + \operatorname{div} \boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^{2} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) - \\ - \theta \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial p_i}{\partial \theta} \operatorname{div} \boldsymbol{u}_i + a|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2 + \rho g. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Следуя подходу, предложенному в [1], будем предполагать, что

$$p_i(\rho_i, \theta) = p_{ei}(\rho_i) + \theta p_{\theta i}(\rho_i), \quad i = 1, 2 \tag{1.15}$$

с некоторыми функциями p_{ei}, $p_{\theta i}$. Тогда из (1.10) получаем

$$e_i(\rho_i, \theta) = P_{ei}(\rho_i) + Q_i(\theta), \quad i = 1, 2, \tag{1.16}$$

где

$$P_{ei}(\rho_i) = \int\limits_{1}^{\rho_i} \frac{p_{ei}(z)}{z^2}\, dz, \quad i = 1, 2, \tag{1.17}$$

и с точностью до несущественных аддитивных констант верно представление

$$Q_i(\theta) = \int_0^\theta c_{\theta i}(z)\, dz, \quad i = 1, 2 \tag{1.18}$$

с некоторыми функциями $c_{\theta i}$. Кроме того, далее нам потребуется функция

$$\mathcal{K}(\theta) = \int_0^\theta k(z)\, dz. \tag{1.19}$$

Условия (1.11) будут заведомо выполнены, если p'_{ei}, $p'_{\theta i}$ неотрицательны, причем p'_{ei} или $p'_{\theta i}$ положительны, а $c_{\theta i}(z) \geqslant c_1 = \mathrm{const} > 0 \quad \forall\, z \geqslant 0$. Теперь из (1.9) находим

$$s_i(\rho_i, \theta) = C_{\theta i}(\theta) - P_{\theta i}(\rho_i) + s_{0i}, \quad i = 1, 2, \tag{1.20}$$

где

$$C_{\theta i}(\theta) = \int_1^\theta \frac{c_{\theta i}(z)}{z} dz, \quad P_{\theta i}(\rho_i) = \int_1^{\rho_i} \frac{p_{\theta i}(z)}{z^2}\, dz, \quad i = 1, 2, \tag{1.21}$$

а s_{0i} — произвольные постоянные. Уравнение (1.14) в этом случае примет следующий вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^2 \rho_i Q_i(\theta) + \mathrm{div} \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i Q_i(\theta) \boldsymbol{u}_i \right) + \mathrm{div} \boldsymbol{q} + \theta \sum_{i=1}^2 p_{\theta i}(\rho_i) \mathrm{div} \boldsymbol{u}_i = \\ = \sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) + a|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2 + \rho g.\end{gathered} \tag{1.22}$$

1.3. **Формулировка Задачи $\mathcal{H}$.** Строгая математическая формулировка задачи о движении смесей в рамках вышеописанной модели выглядит следующим образом.

Задача $\mathcal{H}$. *В замыкании $\overline{Q}_T$ области $Q_T = (0, T) \times \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — область течения, $T > 0$ — произвольное действительное число, требуется найти скалярные поля $\rho_i \geqslant 0$, $i = 1, 2$, $\theta > 0$ и векторные поля $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, 2$, удовлетворяющие системе уравнений* (1.1), (1.2), (1.22) *и следующим начальным и краевым условиям:*

$$\rho_i|_{t=0} = \rho_{0i}, \quad \boldsymbol{u}_i|_{t=0} = \boldsymbol{u}_{0i}, \quad i = 1, 2, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0, \tag{1.23}$$

$$\boldsymbol{u}_i|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0, \quad i = 1, 2, \tag{1.24}$$

$$\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} = L(t, \boldsymbol{x}, \theta) \quad \text{на} \quad (0, T) \times \partial\Omega. \tag{1.25}$$

Здесь ρ_{0i} (начальные плотности), $\boldsymbol{u}_{0i}$ (начальные скорости), θ_0 (начальная температура) — заданные функции; величина граничного теплообмена (внешней теплопроводности) L задана как функция от времени, пространственной переменной и неизвестной температуры; $\boldsymbol{n}$ — внешняя единичная нормаль к границе $\partial\Omega$ области Ω.

Замечание 2. *Строго говоря, начальные условия должны быть заданы в терминах* $\rho_i(0,\cdot)$, $(\rho_i\boldsymbol{u}_i)(0,\cdot)$ *и* $\rho_i Q_i(\theta)(0,\cdot)$, *однако математически более удобно работать с начальными условиями, записанными в форме* (1.23).

Замечание 3. *И с физической точки зрения, и с математических позиций необходимо обеспечить неотрицательность производства энтропии. Общая энтропия системы*

$$S = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \rho_i s_i d\boldsymbol{x} \tag{1.26}$$

должна не убывать со временем в случае, когда система термодинамически замкнута, т. е. когда $g = 0$ *и* $L = 0$. *В общем (термодинамически незамкнутом) случае из* (1.8), (1.13), (1.24) *и* (1.25) *получаем*

$$\begin{gathered}\frac{dS}{dt} = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{2} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega} \frac{a|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2}{\theta} d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega} \frac{k(\theta)|\nabla\theta|^2}{\theta^2} d\boldsymbol{x} + \\ + \int\limits_{\Omega} \frac{\rho g}{\theta} d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{L(t,\boldsymbol{x},\theta)}{\theta} d\sigma.\end{gathered} \tag{1.27}$$

Таким образом, достаточно потребовать выполнения условий на коэффициенты

$$k \geqslant 0, \quad a \geqslant 0, \tag{1.28}$$

а также следующего условия для тензоров вязких напряжений:

$$\sum_{i=1}^{2} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) \geqslant 0. \tag{1.29}$$

Однако в рамках условий на матрицы вязкостей, перечисленных в (1.5), *выполнение* (1.29) *очевидно, ввиду равенства*

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{2} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) = \sum_{i,j=1}^{2} \Big(\eta_{ij} (\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i)(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_j) + \\ + 2\mu_{ij} \Big(\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) - \frac{1}{3}(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i)\mathbb{I}\Big) : \Big(\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j) - \frac{1}{3}(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_j)\mathbb{I}\Big)\Big).\end{gathered} \tag{1.30}$$

Кроме того, из условий (1.5) *(см.* (1.6)*), в силу* (1.24), *следует очень важное с математических позиций неравенство*

$$\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)\, d\boldsymbol{x} \geqslant B_0 \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i|^2\, d\boldsymbol{x} \tag{1.31}$$

с некоторой положительной постоянной $B_0 = B_0(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{M})$.

1.4. **Условия на определяющие функции.** На функции $p_{ei}, p_{\theta i}$ будем налагать следующие условия:

$$\left\{\begin{array}{l} p_{ei},\, p_{\theta i} \in C^1[0,\infty), \quad p_{ei}(0) = p_{\theta i}(0) = 0, \quad i=1,2, \\ \dfrac{1}{c_2} z^{\gamma-1} \leqslant p'_{ei}(z) \leqslant c_2 z^{\gamma-1} + c_3 \quad \forall\, z \geqslant 0, \quad i=1,2, \\ p_{\theta i}(z) \leqslant c_4 (1 + z^{\frac{\gamma}{3}}) \quad \forall\, z \geqslant 0, \quad i=1,2, \\ p'_{\theta i}(z) > 0 \quad \forall\, z \geqslant 0, \quad i=1,2, \end{array}\right. \tag{1.32}$$

где $c_2 = \mathrm{const} \geqslant 1$, $c_3, c_4 = \mathrm{const} > 0$,

$$\gamma = \mathrm{const} > 6. \tag{1.33}$$

О функции k будем предполагать следующее:

$$\left\{\begin{array}{l} k \in C^2[0,\infty), \\ \dfrac{1}{c_5}(1 + z^m) \leqslant k(z) \leqslant c_5(1+z^m) \quad \forall\, z \geqslant 0, \\ c_5 = \mathrm{const} \geqslant 1, \quad m = \mathrm{const} > 2. \end{array}\right. \tag{1.34}$$

Относительно функций $c_{\theta i}$ (см. (1.18)) примем следующие гипотезы:

$$\left\{\begin{array}{l} c_{\theta i} \in C^1[0,\infty), \quad i=1,2, \\ \dfrac{1}{c_6}\left(1 + z^{\frac{m}{2}-1}\right) \leqslant c_{\theta i}(z) \leqslant c_6 \left(1 + z^{\frac{m}{2}-1}\right) \quad \forall\, z \geqslant 0, \quad i=1,2, \\ c_6 = \mathrm{const} \geqslant 1. \end{array}\right. \tag{1.35}$$

Замечание 4. *Из* (1.17) *и* (1.32) *следует, что при всех* $i = 1,2$ *и* $z \geqslant 0$

$$\frac{1}{c_2\gamma} z^\gamma \leqslant p_{ei}(z) \leqslant \frac{c_2}{\gamma} z^\gamma + c_3 z, \tag{1.36}$$

$$B_1 z^\gamma - B_2 \leqslant z P_{ei}(z) \leqslant B_3 z^\gamma + B_4, \tag{1.37}$$

где $B_1 = B_1(c_2, c_3, \gamma)$, $B_2 = B_2(c_2, c_3, \gamma)$, $B_3 = B_3(c_2, c_3, \gamma)$, $B_4 = B_4(c_2, c_3, \gamma)$. *Из* (1.21) *и* (1.32) *нетрудно получить, что при всех* $i = 1,2$ *и* $z \geqslant 0$

$$-B_5 \leqslant z P_{\theta i}(z) \leqslant B_6 z^{\frac{\gamma}{3}} + B_7, \tag{1.38}$$

где $B_5 = B_5(c_4, \gamma)$, $B_6 = B_6(c_4, \gamma)$, $B_7 = B_7(c_4, \gamma)$. *Наконец, из* (1.18), (1.21) *и* (1.35) *следует, что при всех* $i = 1,2$ *и* $z > 0$

$$C_{\theta i}(z) \leqslant Q_i(z) - Q_i(1), \tag{1.39}$$

$$B_8(c_6, m)\left(z + z^{\frac{m}{2}}\right) \leqslant Q_i(z) \leqslant B_9(c_6, m) z^{\frac{m}{2}} + B_{10}(c_6, m). \tag{1.40}$$

Кроме того, заметим что $\forall\, z > 0$ *верно, ввиду* (1.21), (1.35) *и* (1.40), *что*

$$C_{\theta i}(z) + \frac{1}{c_6}|\ln z| \leqslant B_{11}(B_8, c_6, m) Q_i(z), \quad i = 1,2. \tag{1.41}$$

Замечание 5. *Приведем простейший пример ситуации, когда предположения на давления и энергии выполнены:*

$$p_{ei}(\rho_i) = \rho_i^\gamma, \quad p_{\theta i}(\rho_i) = \rho_i, \quad c_{\theta i}(\theta) = 1 + \theta^{\frac{m}{2}-1}, \quad i = 1,2. \tag{1.42}$$

Тогда из (1.15)–(1.21) *следует, что*

$$p_i(\rho_i, \theta) = \rho_i^\gamma + \rho_i\theta, \quad e_i(\rho_i, \theta) = \frac{\rho_i^{\gamma-1}}{\gamma - 1} + \theta + \frac{2}{m}\theta^{\frac{m}{2}} - \frac{1}{\gamma-1}, \quad i = 1,2,$$

$$s_i(\rho_i,\theta) = \ln\left(\frac{\theta}{\rho_i}\right) + \frac{2}{m-2}\theta^{\frac{m}{2}-1} + s_{0i} - \frac{2}{m-2}, \quad m>2, \quad i=1,2,$$

$$s_i(\rho_i,\theta) = \ln\left(\frac{\theta^2}{\rho_i}\right) + s_{0i}, \quad m=2, \quad i=1,2.$$

Условия (1.32), (1.35) *очевидно выполнены, а уравнение* (1.14) *в этом случае примет следующий вид:*

$$\left(1+\theta^{\frac{m}{2}-1}\right)\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial(\rho_i\theta)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i\theta\boldsymbol{u}_i)\right) + \operatorname{div}\boldsymbol{q} + \theta\sum_{i=1}^{2}\rho_i\operatorname{div}\boldsymbol{u}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) + a|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2 + \rho g.$$

При предположениях (1.42) *с* $m=2$ *в стационарном случае существование слабых решений соответствующей краевой задачи доказано в* [3].

1.5. **Условия на входные данные.** Начальные данные в Задаче $\mathcal{H}$ будем брать из класса

$$\rho_{0i}\in L_\gamma(\Omega), \quad \rho_{0i}\geqslant 0, \quad \int\limits_\Omega \rho_{0i}d\boldsymbol{x}>0, \quad \theta_0\in L_\infty(\Omega),$$

(1.43)

$$\operatorname{ess\,inf}_\Omega \theta_0 > 0, \quad \boldsymbol{u}_{0i}\in L_\infty(\Omega), \quad i=1,2.$$

На внешние силы и источники наложим следующие требования:

(1.44) $$\boldsymbol{f}_i\in L_\infty(Q_T), \quad i=1,2, \quad g\in L_\infty(Q_T), \quad g\geqslant 0.$$

На функцию L будем налагать следующие требования:

(1.45) $$\begin{cases} L\in C\left([0,T]\times\partial\Omega\times\mathbb{R}\right), \quad L\geqslant 0 \quad \text{в} \quad [0,T]\times\partial\Omega\times\mathbb{R}, \\ \forall\,\theta_1,\,\theta_2, \quad \theta_1\leqslant\theta_2 \quad \Longrightarrow \quad L(\cdot,\cdot,\theta_1)\leqslant L(\cdot,\cdot,\theta_2). \end{cases}$$

Замечание 6. *Для удобства будем считать* L *продолженной по* $(t,\boldsymbol{x})$, *и в результате*

(1.46) $$L\in C\left(\mathbb{R}^5\right).$$

1.6. **Вариационное решение задачи $\mathcal{H}$ и его связь с классическими решениями.**

Определение 7. *Вариационным решением Задачи* $\mathcal{H}$ *называется набор функций* $\rho_i\geqslant 0$, $\boldsymbol{u}_i$, $i=1,2$, *и* $\theta>0$ *следующего класса*[1] (*см.* (1.19)):

$$\rho_i\in L_\infty\big(0,T;L_\gamma(\Omega)\big), \quad \boldsymbol{u}_i\in L_2\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\big),$$

$$\rho_i\boldsymbol{u}_i\in L_\infty\big(0,T;L_{\sigma_2}(\Omega)\big) \quad \text{с} \quad \sigma_2>\frac{6}{5}, \quad i=1,2,$$

$$\rho_i Q_i(\theta)\in L_\infty\big(0,T;L_1(\Omega)\big)\bigcap L_2\big(0,T;L_{\sigma_3}(\Omega)\big) \quad \text{с} \quad \sigma_3>\frac{6}{5}, \quad i=1,2,$$

$$\ln\theta,\ \theta p_{\theta i}(\rho_i)\in L_2(Q_T), \quad i=1,2,$$

[1]Последнее требование обеспечивает при п. в. $t\in(0,T)$ существование следа $\mathcal{K}(\theta)|_{\partial\Omega}\in W^{\frac{1}{6}}_{\frac{6}{5}}(\partial\Omega)\hookrightarrow L_{\frac{4}{3}}(\partial\Omega)$, о котором и идет речь в предыдущем требовании. Символы $\hookrightarrow$ и $\hookrightarrow\hookrightarrow$ здесь и далее обозначают соответственно непрерывное и компактное вложения пространств.

$$\mathcal{K}(\theta) \in L_1(Q_T), \quad L(\cdot,\cdot,\theta) \in L_1((0,T)\times\partial\Omega),$$

$$\mathcal{K}(\theta) \in W^1_{\frac{6}{5}}(\Omega) \quad \textit{при п. в. } t \in (0,T),$$

удовлетворяющих следующим условиям:

1) *для любых скалярных полей*[2] $\phi_i \in C^1_0\big([0,T); C^\infty(\overline{\Omega})\big)$ *выполняются интегральные тождества*

$$\int\limits_{Q_T} \Big(\rho_i \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \rho_i \boldsymbol{u}_i \cdot \nabla\phi_i\Big)\, d\boldsymbol{x}dt + \int\limits_{\Omega} \rho_{0i}\phi_i|_{t=0}\, d\boldsymbol{x} = 0, \quad i=1,2; \tag{1.47}$$

2) *для любых векторных полей* $\boldsymbol{\varphi}_i \in C^1_0([0,T); C^\infty_0(\Omega))$ *выполнены интегральные тождества*

$$\int\limits_{Q_T} \Big(\rho_i\boldsymbol{u}_i \cdot \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_i}{\partial t} + (\rho_i\boldsymbol{u}_i\otimes\boldsymbol{u}_i) : (\nabla\otimes\boldsymbol{\varphi}_i) + p_i \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}_i + \rho_i\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{\varphi}_i +$$
$$+\boldsymbol{J}_i\cdot\boldsymbol{\varphi}_i\Big)\, d\boldsymbol{x}\, dt + \int\limits_{\Omega} \rho_{0i}\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\boldsymbol{\varphi}_i|_{t=0}\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{Q_T} \mathbb{S}_i : (\nabla\otimes\boldsymbol{\varphi}_i)\, d\boldsymbol{x}\, dt,\ i=1,2; \tag{1.48}$$

3) *для любых скалярных полей* $\psi \in C^1_0\big([0,T); C^\infty(\overline{\Omega})\big)$, $\psi \geqslant 0$, $\nabla\psi\cdot\boldsymbol{n}|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0$ *выполняется интегральное неравенство*

$$\int\limits_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^{2} \rho_i Q_i(\theta)\right) \frac{\partial\psi}{\partial t}\, d\boldsymbol{x}dt + \int\limits_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^{2} \rho_i Q_i(\theta)\boldsymbol{u}_i\right)\cdot\nabla\psi\, d\boldsymbol{x}\, dt +$$
$$+\int\limits_{Q_T} \mathcal{K}(\theta)\Delta\psi\, d\boldsymbol{x}\, dt + \int\limits_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^{2} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)\right)\psi\, d\boldsymbol{x}\, dt +$$
$$+a\int\limits_{Q_T} |\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2|^2\psi\, d\boldsymbol{x}\, dt + \int\limits_{Q_T} \rho g\psi\, d\boldsymbol{x}\, dt + \tag{1.49}$$
$$+\int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{2} \rho_{0i}Q_i(\theta_0)\right)\psi|_{t=0}\, d\boldsymbol{x} \leqslant \int\limits_{Q_T} \theta\left(\sum_{i=1}^{2} p_{\theta i}(\rho_i)\operatorname{div}\boldsymbol{u}_i\right)\psi\, d\boldsymbol{x}\, dt +$$
$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega} L(t,\boldsymbol{x},\theta)\psi d\sigma dt;$$

[2] Элементы пространства $C^1_0([0,T),X)$ обращаются в нуль при $t=T$.

4) *для п. в.* $t \in (0,T)$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2}\rho_i(t)|\boldsymbol{u}_i(t)|^2 + \rho_i(t)P_{ei}(\rho_i)(t) + \rho_i(t)Q_i(\theta)(t) \right) d\boldsymbol{x} +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} L(\tau, \boldsymbol{x}, \theta)\, d\sigma\, d\tau \leqslant \int\limits_{Q_t} \rho g\, d\boldsymbol{x}\, d\tau + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{Q_t} \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i\, d\boldsymbol{x}\, d\tau + \tag{1.50}$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2}\rho_{0i}|\boldsymbol{u}_{0i}|^2 + \rho_{0i}P_{ei}(\rho_{0i}) + \rho_{0i}Q_i(\theta_0) \right) d\boldsymbol{x}.$$

Вариационное решение не является, вообще говоря, слабым — отличие состоит в том, что соотношение (1.49) представляет собой слабую формулировку супер-решения (а не решения) уравнения энергии (1.22). При этом уравнения неразрывности (1.1) и импульсов (1.2) выполнены в слабом смысле, причем вводится дополнительное требование — энергетическое неравенство (1.50) (для полной энергии). Таким образом, вариационное решение — это более обобщенное понятие чем так наз. подходящее[3] слабое решение (suitable weak solution). Однако оно, как и всякое обобщенное решение, удовлетворяет двум фундаментальным требованиям:

(1) Всякое классическое решение является обобщенным;
(2) Всякое обобщенное решение, обладающее всеми классическими производными, входящими в уравнения, является классическим.

Первый тезис очевиден (для классических решений все интегральные соотношения в Определении 7 выполнены в виде равенств), а для проверки второго достаточно показать, что если вариационное решение обладает «классической» гладкостью, то неравенство (1.49) превращается в равенство, т. е. решение является слабым (а потому и классическим, что показывается уже по стандартной схеме рассуждений).

Действительно, пусть имеется гладкое вариационное решение. Предположим, что неравенство (1.49) для некоторой ψ строгое, т. е. найдутся число $\eta > 0$ и функция

$$\psi^* \in C_0^1\big([0,T); C^\infty(\overline{\Omega})\big), \quad 0 \leqslant \psi^* \leqslant 1, \quad \nabla\psi^* \cdot \boldsymbol{n}|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0$$

такие, что

$$\int\limits_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^{2} \rho_i Q_i(\theta) \right) \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\, d\boldsymbol{x}dt + \int\limits_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^{2} \rho_i Q_i(\theta)\boldsymbol{u}_i \right) \cdot \nabla\psi^*\, d\boldsymbol{x}\, dt +$$

$$+ \int\limits_{Q_T} \mathcal{K}(\theta)\Delta\psi^*\, d\boldsymbol{x}\, dt + \int\limits_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^{2} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) \right) \psi^*\, d\boldsymbol{x}\, dt + a \int\limits_{Q_T} |\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2 \psi^*\, d\boldsymbol{x}\, dt +$$

$$+ \int\limits_{Q_T} \rho g \psi^*\, d\boldsymbol{x}\, dt + \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} Q_i(\theta_0) \right) \psi^*|_{t=0}\, d\boldsymbol{x} + \eta =$$

---

[3]Слабое решение, удовлетворяющее энергетическому неравенству.

$$= \int\limits_{Q_T} \theta \left(\sum_{i=1}^{2} p_{\theta i}(\rho_i) \mathrm{div} \boldsymbol{u}_i \right) \psi^* \, d\boldsymbol{x} \, dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} L(t, \boldsymbol{x}, \theta) \psi^* d\sigma dt.$$

Тогда для любой $\psi \geqslant \psi^*$ такой, что $\psi \in C_0^1\big([0,T); C^\infty(\overline{\Omega})\big)$, $\nabla\psi \cdot \boldsymbol{n}|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0$, функция $\psi := \psi - \psi^*$ годится в качестве тестовой для (1.49), и следовательно

(1.51)
$$\int\limits_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^{2} \rho_i Q_i(\theta) \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} \, d\boldsymbol{x} dt + \int\limits_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^{2} \rho_i Q_i(\theta) \boldsymbol{u}_i \right) \cdot \nabla\psi \, d\boldsymbol{x} \, dt +$$

$$+ \int\limits_{Q_T} \mathcal{K}(\theta) \Delta\psi \, d\boldsymbol{x} \, dt + \int\limits_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^{2} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) \right) \psi \, d\boldsymbol{x} \, dt + a \int\limits_{Q_T} |\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2 \psi \, d\boldsymbol{x} \, dt +$$

$$+ \int\limits_{Q_T} \rho g \psi \, d\boldsymbol{x} \, dt + \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} Q_i(\theta_0) \right) \psi|_{t=0} \, d\boldsymbol{x} + \eta \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{Q_T} \theta \left(\sum_{i=1}^{2} p_{\theta i}(\rho_i) \mathrm{div} \boldsymbol{u}_i \right) \psi \, d\boldsymbol{x} \, dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} L(t, \boldsymbol{x}, \theta) \psi d\sigma dt.$$

Обозначим

$$\zeta_\omega(z) = \frac{1}{\omega} \zeta\left(\frac{z}{\omega}\right), \tag{1.52}$$

где функция $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такова, что $\mathrm{supp}\,\zeta \subset \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\zeta(-x) = \zeta(x) \geqslant 0$, $\int\limits_{\mathbb{R}} \zeta(z) dz = 1$, $\zeta(z)$ — неубывающая при $z \geqslant 0$. Положим в (1.51)

$$\psi = 1 - \int\limits_{-\infty}^{t-T+\omega} \zeta_\omega(s) ds$$

с достаточно малым $\omega > 0$ (так чтобы было верно $\psi \geqslant \psi^*$). Устремив $\omega \to +0$, получим строгое неравенство

$$\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \rho_i(T) Q_i(\theta)(T) \, d\boldsymbol{x} > \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{Q_T} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) \, d\boldsymbol{x} \, dt +$$

(1.53)
$$+ a \int\limits_{Q_T} |\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2 \, d\boldsymbol{x} \, dt + \int\limits_{Q_T} \rho g \, d\boldsymbol{x} \, dt + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \rho_{0i} Q_i(\theta_0) \, d\boldsymbol{x} -$$

$$- \int\limits_{Q_T} \theta \left(\sum_{i=1}^{2} p_{\theta i}(\rho_i) \mathrm{div} \boldsymbol{u}_i \right) d\boldsymbol{x} \, dt - \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} L(t, \boldsymbol{x}, \theta) d\sigma dt.$$

Поскольку рассматриваемое вариационное решение удовлетворяет (1.1), (1.2) в классическом смысле, то выполняется энергетическое равенство (для кинетической энергии)

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\rho_i(t)|\boldsymbol{u}_i(t)|^2+\rho_i(t)P_{ei}(\rho_i)(t)\right)d\boldsymbol{x}+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_t}\mathbb{S}_i:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)\,d\boldsymbol{x}\,d\tau+$$

$$+a\int\limits_{Q_t}|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2|^2\,d\boldsymbol{x}\,d\tau=\int\limits_{Q_t}\theta\left(\sum_{i=1}^{2}p_{\theta i}(\rho_i)\operatorname{div}\boldsymbol{u}_i\right)d\boldsymbol{x}d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_t}\rho_i\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{u}_i\,d\boldsymbol{x}\,d\tau+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\rho_{0i}|\boldsymbol{u}_{0i}|^2+\rho_{0i}P_{ei}(\rho_{0i})\right)d\boldsymbol{x}\quad\forall\,t\in[0,T],$$

которое при $t=T$ вместе с (1.53) противоречит (1.50) (которое для гладких функций выполнено для всех $t\in[0,T]$, и потому можно положить $t=T$). Таким образом, сделанное предположение о возможности строгого неравенства (1.49) (для какой-либо ψ) неверно. Отметим, что попутно получается равенство в (1.50), что впрочем итак очевидно для классических решений.

1.7. **Априорные оценки.** В статье [4] доказаны (причем, при условии $\gamma>3$ вместо (1.33)) априорные оценки классических решений Задачи $\mathcal{H}$ в случае, когда система термодинамически замкнута, т. е. $g=0$ и $L=0$, причем плотности неотрицательны, а температура положительна. В дальнейшем на эти оценки нет прямых ссылок, но их формулировка и доказательство существенно облегчают понимание процесса доказательства существования слабого решения посредством построения решений приближенных задач.

2. Формулировка приближенной Задачи $\mathcal{H}^{q,\varepsilon,\delta,\upsilon}$ и ее разрешимость

Зададим произвольно числа $q\in\mathbb{N}$, $0<\varepsilon\leqslant 1$, $0<\delta<1/2$, $0<\upsilon\leqslant 1$ и рассмотрим приближенную **Задачу** $\mathcal{H}^{q,\varepsilon,\delta,\upsilon}$ для функций ρ_i, $\boldsymbol{u}_i$, $i=1,2$, θ (все эти функции зависят от параметров q, ε, δ и υ, но пока для краткости опустим соответствующие индексы).

Нам потребуется операция усреднения $(\cdot)_\omega$, действующая по формуле

(2.1) $$h_\omega(z)=(h*\zeta_\omega)(z):=\int\limits_{\mathbb{R}}\zeta_\omega(z-s)h(s)ds$$

(см. (1.52)).

2.1. **Уравнения неразрывности.** Вместо (1.1) будем рассматривать уравнения

(2.2) $$\frac{\partial\rho_i}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho_i\boldsymbol{u}_i)=\varepsilon\Delta\rho_i,\quad i=1,2$$

с краевыми условиями

(2.3) $$\nabla\rho_i\cdot\boldsymbol{n}|_{(0,T)\times\partial\Omega}=0,\quad i=1,2,$$

а вместо (1.23) для плотностей поставим условия

(2.4) $$\rho_i|_{t=0}=\rho_{0i}^{\delta},\quad i=1,2$$

с некоторыми функциями[4] ρ_{0i}^{δ} такими, что

$$
\begin{gathered}
\rho_{0i}^{\delta} \in C^{2+\sigma_4}\left(\overline{\Omega}\right), \quad \nabla\rho_{0i}^{\delta}\cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \rho_{0i}^{\delta} \xrightarrow[\delta\to+0]{} \rho_{0i} \quad \text{в} \quad L_{\gamma}(\Omega), \\
\inf_{\Omega}\rho_{0i}^{\delta} > 0, \quad \int\limits_{\Omega}\rho_{0i}^{\delta}\,d\boldsymbol{x} \geqslant \int\limits_{\Omega}\rho_{0i}\,d\boldsymbol{x}, \quad \rho_{0i}^{\delta} \geqslant \delta, \quad i=1,2,
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

где $0<\sigma_4<1$.

2.2. **Уравнение энергии.** Вместо (1.22) будем рассматривать уравнение

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{2}(\rho_i+\upsilon)Q_i(\theta) + \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{2}\rho_i Q_i(\theta)\boldsymbol{u}_i\right) + \theta\sum_{i=1}^{2}p_{\theta i}(\rho_i)\operatorname{div}\boldsymbol{u}_i + \\
+\delta\theta^{m+1} + \operatorname{div}\boldsymbol{q} = (1-\delta)\sum_{i=1}^{2}\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) + a|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2|^2 + \rho g^{\delta},
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

а вместо (1.23) для температуры и (1.25) поставим соответственно условия

$$
\theta|_{t=0} = \theta_0^{\delta}
\tag{2.7}
$$

и

$$
k(\theta)\nabla\theta\cdot\boldsymbol{n} + L^{\delta}(t,\boldsymbol{x},\theta) = 0 \quad \text{на} \quad (0,T)\times\partial\Omega,
\tag{2.8}
$$

с некоторой функцией $\theta_0^{\delta} \in C^{2+\sigma_5}\left(\overline{\Omega}\right)$, $0<\sigma_5<1$ такой, что[5]

$$
\begin{gathered}
k(\theta_0^{\delta})\nabla\theta_0^{\delta}\cdot\boldsymbol{n} + L^{\delta}(0,\boldsymbol{x},\theta_0^{\delta}) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \\
\inf_{\Omega}\theta_0^{\delta} \geqslant \inf_{\Omega}\theta_0 + \delta, \quad \|\theta_0^{\delta}\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant 2\|\theta_0\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad \theta_0^{\delta} \xrightarrow[\delta\to+0]{} \theta_0 \quad \text{в} \quad L_1(\Omega)
\end{gathered}
\tag{2.9}
$$

и функциями g^{δ}, L^{δ} определенными следующим образом[6]:

$$
\begin{gathered}
g^{\delta} \in C^1(\overline{Q}_T), \quad g^{\delta} \geqslant 0, \quad g^{\delta} \xrightarrow[\delta\to+0]{} g \quad \text{в} \quad L_{\sigma_6}(Q_T) \\
\forall\,\sigma_6 < +\infty, \quad \|g^{\delta}\|_{L_\infty(Q_T)} \leqslant 2\|g\|_{L_\infty(Q_T)},
\end{gathered}
\tag{2.10}
$$

---

[4]Например, можно положить $\rho_{0i}^{\delta} = (\varphi_\delta\rho_{0i})*\tilde{\zeta}_\delta + \delta + \dfrac{1}{|\Omega|}\max\limits_{i=1,2}\left\{\int\limits_{\Omega}\rho_{0i}(1-\varphi_\delta)\,d\boldsymbol{x}\right\}$, где $\tilde{\zeta}_\delta$ — усредняющее ядро класса $C^3(\mathbb{R}^3)$, а φ_δ — срезающая функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, равная нулю в δ-окрестности $\partial\Omega$ и равная единице за пределами 2δ-окрестности $\partial\Omega$.

[5]Например, можно положить $\theta_0^{\delta} = \left\{\begin{array}{l}\inf\limits_{\Omega}\theta_0 \text{ в } 2\delta \text{ окрестн. } \partial\Omega, \\ \theta_0 \text{ вне } 2\delta \text{ окрестн. } \partial\Omega\end{array}\right\} * \tilde{\zeta}_\delta + \delta$, где $\tilde{\zeta}_\delta$ — усредняющее ядро класса $C^3(\mathbb{R}^3)$.

[6]Например, g^{δ}, L^{δ} — это усреднения от g, $L\psi_\delta$ по $(t,\boldsymbol{x})$ с ядрами классов $C^1(\mathbb{R}^4)$, $C^2(\mathbb{R}^4)$ соответственно, где ψ_δ — это срезающая функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^4)$, равная нулю в δ-окрестности многообразия $\{t=0\}\times\partial\Omega$ и равная единице за пределами 2δ-окрестности этого многообразия; в случае если L имеет гладкость ниже двух по последнему аргументу, требуется дополнительно усреднение по нему. В случае $L(t,\boldsymbol{x},\theta) = \ell(t,\boldsymbol{x})\mathcal{K}(\theta)$, $\ell\in C(\mathbb{R}^4)$, $\ell\geqslant 0$, это дает $L^{\delta}(t,\boldsymbol{x},\theta) = (\ell\psi_\delta)_\delta(t,\boldsymbol{x})\mathcal{K}(\theta)$ (где нижний индекс δ означает усреднение по $(t,\boldsymbol{x})$). На данном этапе нет необходимости обеспечивать условие согласования в (2.9), а это нужно только для задачи с регуляризующим параметром ω (см. построение решения задачи $\mathcal{H}^{q,\varepsilon,\delta,\upsilon}$ в [4]). Однако для ясности оказалось удобнее заранее обеспечить условие согласования в (2.9) за счет описанной конструкции.

$$L^\delta \in C^2(\mathbb{R}^5),\ L^\delta \geqslant 0,\ L^\delta \xrightarrow[\delta\to+0]{} L \text{ в } C(K)\ \forall K \subset \mathbb{R}^5,\ K \text{— компакт},$$
$$L^\delta(\cdot,\cdot,\theta) \text{ не убывает по } \theta. \tag{2.11}$$

2.3. **Уравнения импульсов.** Обозначим $X_q = \mathrm{Lin}\,\{\boldsymbol{\psi_i}\}_{i=1}^q \subset L_2(\Omega)$, где $\{\boldsymbol{\psi_i}\}_{i=1}^\infty$ — базис в $W_2^1(\Omega)$, ортонормированный в $L_2(\Omega)$, состоящий из гладких функций, имеющих компактный носитель в области Ω, для определенности норму в X_q положим равной норме в $L_2(\Omega)$. Обозначим через P_q ортогональный проектор из $L_2(\Omega)$ в X_q, и положим

$$\mathcal{M}_\xi = P_q(\xi(\cdot)) :\ X_q \to X_q, \quad \text{где} \quad \xi \in L_\infty(\Omega).$$

Легко видеть, что

$$(\mathcal{M}_\xi(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v})_{L_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega \xi \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}, \quad \forall\, \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in X_q,$$

и для всех $\xi > 0$ оператор $\mathcal{M}_\xi$ обратим (поскольку у него нулевое ядро). Вместо (1.2) будем рассматривать уравнения для $\boldsymbol{u}_i \in C([0,T], X_q)$

$$\frac{\partial(\rho_i\boldsymbol{u}_i)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_i\boldsymbol{u}_i\otimes\boldsymbol{u}_i) + \nabla p_i + \varepsilon(\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i)^*\nabla\rho_i =$$
$$= \mathrm{div}\mathbb{S}_i + \boldsymbol{J}_i + \rho_i\boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{h}_i, \quad i = 1,2, \tag{2.12}$$

где $\boldsymbol{h}_i \perp C_0^1([0,T), X_q)$ в $L_2(Q_T)$. Условия (1.23) для скоростей и (1.24) остаются прежними с точностью до проектирования на X_q. А именно, вместо прежних начальных условий положим

$$\boldsymbol{u}_i|_{t=0} = \mathcal{M}^{-1}_{\rho^\delta_{0i}} P_q\left(\rho^\delta_{0i}\boldsymbol{u}_{0i}\right) \in X_q. \tag{2.13}$$

Тогда легко проверить, что

$$\rho_i\boldsymbol{u}_i|_{t=0} - \rho^\delta_{0i}\boldsymbol{u}_{0i} \in X_q^\perp. \tag{2.14}$$

В интегральной записи описанные факты означают, что для любых пробных функций $\boldsymbol{\varphi}_i \in C_0^1([0,T), X_q)$ справедливы равенства

$$\int\limits_{Q_T}\Big(\rho_i\boldsymbol{u}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_i}{\partial t} + (\rho_i\boldsymbol{u}_i\otimes\boldsymbol{u}_i):(\nabla\otimes\boldsymbol{\varphi}_i) + p_i\mathrm{div}\boldsymbol{\varphi}_i +$$
$$+(\boldsymbol{J}_i + \rho_i\boldsymbol{f}_i)\cdot\boldsymbol{\varphi}_i\Big)d\boldsymbol{x}dt = \int\limits_{Q_T}\Big(\varepsilon[(\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{\varphi}_i]\cdot\nabla\rho_i +$$
$$+\mathbb{S}_i:(\nabla\otimes\boldsymbol{\varphi}_i)\Big)d\boldsymbol{x}dt - \int\limits_\Omega \rho^\delta_{0i}\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\boldsymbol{\varphi}_i|_{t=0}d\boldsymbol{x}, \quad i = 1,2. \tag{2.15}$$

Сформулированную задачу (2.2)–(2.15) будем называть Задачей $\mathcal{H}^{q,\varepsilon,\delta,\upsilon}$.

2.4. **План предельного перехода по параметрам q, ε, δ и υ.** Доказательство разрешимости Задачи $\mathcal{H}$ проводится по следующей схеме:

- Доказать разрешимость поставленной приближенной задачи при фиксированных q, ε, δ и υ (это сделано в [4] и описано ниже в разделе 2.5);
- Перейти к пределу при $q \to +\infty$, получив, в частности, в пределе уравнения (2.12) без слагаемых $\boldsymbol{h}_i$ (это делается ниже в разделах 3 и 4);
- Перейти к пределу по малым параметрам: сначала $\varepsilon \to +0$, потом $\delta \to +0$, и наконец $\upsilon \to +0$ (возможно, однако, при этом будет $\upsilon = \delta$) — это планируется сделать в следующей работе;
- На каждом этапе получать оценки решений, не зависящие от того параметра, по которому предполагается предельный переход.

2.5. **Разрешимость приближенной Задачи $\mathcal{H}^{q,\varepsilon,\delta,\upsilon}$.** В статье [4] доказано (причем, при условии $\gamma > 3$ вместо (1.33)), что Задача $\mathcal{H}^{q,\varepsilon,\delta,\upsilon}$ имеет решение следующего класса (см. (1.19)):

$$\boldsymbol{u}_i \in C([0,T],X_q), \quad \rho_i \in C\big([0,T];C^{2+\sigma_7}(\overline{\Omega})\big),$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} \in C\big([0,T];C^{\sigma_7}(\overline{\Omega})\big), \quad \rho_i > 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} \in L_2(Q_T), \quad \theta \in L_\infty(Q_T)\bigcap L_\infty\big(0,T;W_2^1(\Omega)\big),$$

$$\theta \geqslant 0, \quad \mathcal{K}(\theta) \in L_2\left(0,T;W_2^2(\Omega)\right).$$

Здесь $0 < \sigma_7 \leqslant \min\{\sigma_1,\sigma_4\}$. Более того, можно показать положительность температуры (но это существенно только при $\delta \to +0$, где и будет показано, и это требование входит в Определение 7 вариационного решения).

При этом построенное решение Задачи $\mathcal{H}^{q,\varepsilon,\delta,\upsilon}$ удовлетворяет, в частности, энергетическому равенству

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\rho_i(t)|\boldsymbol{u}_i(t)|^2+\rho_i(t)P_{ei}(\rho_i)(t)+(\rho_i(t)+\upsilon)Q_i(\theta)(t)\right)d\boldsymbol{x}+$$

$$+\delta\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_t}\mathbb{S}_i:(\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i)\,d\boldsymbol{x}\,d\tau+\varepsilon\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_t}\frac{p'_{ei}(\rho_i)}{\rho_i}|\nabla\rho_i|^2\,d\boldsymbol{x}\,d\tau+$$

$$+\delta\int\limits_{Q_t}\theta^{m+1}\,d\boldsymbol{x}\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_{\partial\Omega}L^\delta(\tau,\boldsymbol{x},\theta)\,d\sigma\,d\tau=\int\limits_{Q_t}\rho g^\delta\,d\boldsymbol{x}\,d\tau+ \tag{2.16}$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_t}\rho_i\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{u}_i\,d\boldsymbol{x}\,d\tau+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\Big(\frac{1}{2}\rho_{0i}^\delta|\boldsymbol{u}_{0i}|^2+\rho_{0i}^\delta P_{ei}\left(\rho_{0i}^\delta\right)+$$

$$+(\rho_{0i}^\delta+\upsilon)Q_i\left(\theta_0^\delta\right)\Big)d\boldsymbol{x}$$

при всех $t \in [0,T]$, и оценке

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i|\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x}+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_t}|\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x}\,d\tau \leqslant B_{12}\left(1+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_t}\rho_i|\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x}\,d\tau\right), \tag{2.17}$$

где положительная постоянная B_{12} зависит только от B_0, B_2, B_3, B_4, B_9, B_{10}, $\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty(Q_T)}\}$, $\|g^\delta\|_{L_\infty(Q_T)}$, $\Big\{\|\boldsymbol{u}_{0i}\|_{L_\infty(\Omega)}\Big\}$, $\Big\{\|\rho^\delta_{0i}\|_{L_\gamma(\Omega)}\Big\}$, $\|\theta^\delta_0\|_{L_\infty(\Omega)}$, T, m, γ, δ и $|\Omega|$, и следовательно

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i|\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x} \leqslant B_{13}(B_{12},T). \tag{2.18}$$

3. Предельный переход по $q\to+\infty$ в приближенных уравнениях неразрывности и импульсов

3.1. **Предельный переход в приближенных уравнениях неразрывности.** Получим оценки решений задачи (2.2)–(2.15), равномерные по q, на основании которых и будет происходить предельный переход по $q\to+\infty$. Сначала заметим, что из (1.37), (2.16), (2.17) и (2.18) следуют равномерные по q и ε оценки

$$\|\rho_i\|_{L_\infty(0,T;L_\gamma(\Omega))} \leqslant B_{14}(B_1,B_2,B_{13},T,\gamma),\quad i=1,2, \tag{3.1}$$

$$\|\sqrt{\rho_i}\boldsymbol{u}_i\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}+\|\boldsymbol{u}_i\|_{L_2(0,T;W^1_2(\Omega))} \leqslant B_{15}(B_{12},B_{13},\Omega),\quad i=1,2. \tag{3.2}$$

Привлекая (1.32), (2.16) и (2.18), получаем оценку ρ_i в $L_\gamma(0,T;L_{3\gamma}(\Omega))$, и поэтому при всех $\sigma_8\in[0,1]$

$$\|\rho_i\|_{L_{\frac{\gamma}{\sigma_8}}\left(0,T;L_{\frac{3\gamma}{3-2\sigma_8}}(\Omega)\right)} \leqslant B_{16}(B_{13},B_{14},c_2,T,\gamma,\varepsilon,\sigma_8,\Omega),\quad i=1,2, \tag{3.3}$$

откуда (при $\sigma_8=3/5$) получаем $\|\rho_i\|_{L_{\frac{5\gamma}{3}}(Q_T)}\leqslant B_{16}$, $i=1,2$. Из второй оценки в (3.2) и (3.3) при $\sigma_8=1$ следует

$$\|\sqrt{\rho_i}\boldsymbol{u}_i\|_{L_{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}\left(0,T;L_{\frac{6\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)\right)} \leqslant B_{17}(B_{15},B_{16},\Omega),\quad i=1,2,$$

а теперь, с привлечением первой оценки в (3.2), получаем при всех $\sigma_9\in[0,1]$

$$\|\sqrt{\rho_i}\boldsymbol{u}_i\|_{L_{\frac{2\gamma}{\sigma_9(\gamma+1)}}\left(0,T;L_{\frac{6\gamma}{(3-2\sigma_9)\gamma+\sigma_9}}(\Omega)\right)} \leqslant B_{18}(B_{15},B_{17},\sigma_9),\quad i=1,2. \tag{3.4}$$

Теперь умножим уравнения (2.2) на ρ_i и проинтегрируем результат по Q_t, получим

$$\|\sqrt{\varepsilon}\nabla\rho_i\|^2_{L_2(Q_T)} \leqslant \frac{1}{2}\Big(\|\rho^\delta_{0i}\|^2_{L_2(\Omega)}+\sqrt{T}\|\rho_i\|^2_{L_\infty(0,T;L_4(\Omega))}\|\operatorname{div}\boldsymbol{u}_i\|_{L_2(Q_T)}\Big),\quad i=1,2,$$

откуда (ввиду (1.33)) следуют равномерные по q и ε оценки

$$\|\sqrt{\varepsilon}\nabla\rho_i\|_{L_2(Q_T)} \leqslant B_{19}\left(B_{14},B_{15},T,\gamma,\left\{\|\rho^\delta_{0i}\|_{L_2(\Omega)}\right\},|\Omega|\right),\quad i=1,2. \tag{3.5}$$

На основании (3.1), (3.2) и (3.5) из последовательности $\boldsymbol{u}^q_i$, ρ^q_i, $q\in\mathbb{N}$ может быть выделена подпоследовательность (которую мы обозначим так же), для которой при $q \to +\infty$ для всех $i = 1, 2$ имеют место сходимости (далее у величин, зависящих от q, будем писать индекс q)

$$\rho_i^q \to \rho_i \quad * \text{-слабо в } L_\infty(0,T;L_\gamma(\Omega)), \tag{3.6}$$

$$\nabla\rho_i^q \to \nabla\rho_i \text{ слабо в } L_2(Q_T), \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{u}_i^q \to \boldsymbol{u}_i \text{ слабо в } L_2\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\big). \tag{3.8}$$

Докажем сильную сходимость плотностей. Из оценок (3.3) и (3.4) следует

$$\|\rho_i^q\boldsymbol{u}_i^q\|_{L_{\frac{2\gamma}{\sigma_9\gamma+\sigma_8+\sigma_9}}\left(0,T;L_{\frac{6\gamma}{(3-2\sigma_9)\gamma+\sigma_9-2\sigma_8+3}}(\Omega)\right)} \leqslant B_{20}(B_{16},B_{18}) \tag{3.9}$$

при любых $i = 1, 2$, $(\sigma_8, \sigma_9) \in [0,1]^2$. Из уравнений (2.2), ввиду (3.5) и (3.9) с $\sigma_8 = \sigma_9 = 0$, получаем

$$\left\|\frac{\partial\rho_i^q}{\partial t}\right\|_{L_2\left(0,T;W^{-1}_{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)\right)} \leqslant B_{21}(B_{19},B_{20},T,\gamma,|\Omega|), \quad i = 1,2.$$

Таким образом, последовательности $\{\rho_i^q\}$, $i = 1, 2$, равностепенно непрерывны по $t \in [0,T]$ со значениями в $W^{-1}_{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega) = \Big(\overset{\circ}{W}{}^1_{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}(\Omega)\Big)^*$ (верхний индекс $*$ означает сопряжение). Тогда благодаря (3.1) приходим (см. [6], Лемма 6.2, стр. 301) к сходимости (выделяя подпоследовательности и переобозначая их так же)

$$\rho_i^q \to \rho_i \text{ при } q \to +\infty \text{ в } C([0,T];L_{\gamma,\mathrm{weak}}(\Omega)), \quad i = 1,2. \tag{3.10}$$

Далее, т. к. имеют место вложения

$$W_2^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_{\sigma_{10}}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1}_{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega) \quad \text{при всех } \sigma_{10} \in \left[\frac{6\gamma}{5\gamma+3}, 6\right),$$

последовательности $\{\rho_i^q\}$ ограничены в $L_\infty(0,T;L_{\sigma_{10}}(\Omega)) \bigcap L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ (ввиду (1.33)), а $\left\{\dfrac{\partial\rho_i^q}{\partial t}\right\}$ ограничены в $L_2\big(0,T;W^{-1}_{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)\big)$, то, выбрав подходящие подпоследовательности и переобозначив их так же, получаем по теореме Лионса—Обена (см. [6], Теорема 1.71, стр. 59), что при $q \to +\infty$

$$\rho_i^q \to \rho_i \text{ сильно в } L_{\sigma_{11}}(0,T;L_{\sigma_{10}}(\Omega)) \quad \forall\, \sigma_{11} < +\infty, \quad i = 1,2. \tag{3.11}$$

Теперь, используя (3.3), получаем

$$\rho_i^q \to \rho_i \text{ при } q \to +\infty \text{ сильно в } L_{\sigma_{12}}(0,T;L_{\sigma_{13}}(\Omega)), \quad i = 1,2 \tag{3.12}$$

для всех $\sigma_{12} < \dfrac{\gamma}{\sigma_8}$, $\sigma_{13} < \dfrac{3\gamma}{3-2\sigma_8}$. Выбирая в (3.9) любые σ_8, σ_9, после выбора подпоследовательности, мы можем утверждать сходимости

$$\rho_i^q\boldsymbol{u}_i^q \to \rho_i\boldsymbol{u}_i \quad * \text{-слабо в пространстве (3.9)}. \tag{3.13}$$

Теперь, переходя к пределу по $q \to +\infty$ в слабом смысле в (2.2), получаем, что предельные функции $\boldsymbol{u}_i$, ρ_i, $i = 1, 2$, удовлетворяют уравнениям

$$\int\limits_{Q_T} \left(\rho_i\frac{\partial\phi_i}{\partial t} + (\rho_i\boldsymbol{u}_i - \varepsilon\nabla\rho_i)\cdot\nabla\phi_i\right)d\boldsymbol{x}dt + \int\limits_{\Omega}\rho_{0i}^\delta\phi_i|_{t=0}\,d\boldsymbol{x} = 0 \tag{3.14}$$
$$\forall\,\phi_i \in C_0^1\big([0,T);C^\infty\big(\overline{\Omega}\big)\big), \quad i = 1,2.$$

Докажем, что предельные функции $\boldsymbol{u}_i$, ρ_i, $i = 1, 2$ удовлетворяют п. в. уравнениям, начальным и граничным условиям (2.2)–(2.4). Из классических оценок решений параболических уравнений (см. [6], Лемма 7.38, стр. 344), получаем (ввиду (1.33)) равномерные по q и ε оценки

$$\varepsilon\|\nabla\rho_i^q\|_{L_{\sigma_{14}}(0,T;L_{\sigma_{15}}(\Omega))} \leqslant B_{22}(B_{20},\{\|\rho_{0i}^\delta\|_{L_\gamma(\Omega)}\},\sigma_8,\sigma_9,\gamma,\Omega), \quad i=1,2, \tag{3.15}$$

где

$$\sigma_{14}=\frac{2\gamma}{\sigma_9\gamma+\sigma_8+\sigma_9}, \qquad \sigma_{15}=\frac{6\gamma}{(3-2\sigma_9)\gamma+\sigma_9-2\sigma_8+3}$$

при любых $(\sigma_8,\sigma_9)\in[0,1]^2\backslash\{0,0\}$. Тогда при $i=1,2$

$$\begin{aligned}&\varepsilon\|(\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i^q)^*\nabla\rho_i^q\|_{L_{\sigma_{16}}\left(0,T;L_{\sigma_{17}}(\Omega)\right)}+\varepsilon\|\nabla\otimes(\rho_i^q\boldsymbol{u}_i^q)\|_{L_{\sigma_{16}}\left(0,T;L_{\sigma_{18}}(\Omega)\right)}\leqslant\\&\qquad\leqslant B_{23}(B_{15},B_{22},\sigma_8,\sigma_9,T,\gamma,\Omega),\end{aligned}\tag{3.16}$$

где $\sigma_{16}=\dfrac{2\gamma}{(\sigma_9+1)\gamma+\sigma_8+\sigma_9}$, $\sigma_{17}=\dfrac{6\gamma}{2(3-\sigma_9)\gamma+\sigma_9-2\sigma_8+3}$,
$\sigma_{18}=\dfrac{6\gamma}{2(2-\sigma_9)\gamma+\sigma_9-2\sigma_8+3}$, при любых

$$\sigma_8\in[0,1], \quad \sigma_9\in\left(\frac{3-2\sigma_8}{2\gamma-1},\frac{\gamma-\sigma_8}{\gamma+1}\right) \tag{3.17}$$

(эти ограничения обеспечивают $\sigma_{16}>1$, $\sigma_{17}>1$, а $\sigma_{18}>1$ автоматически). Снова обращаясь к классическим оценкам решений параболических уравнений (см. [6], Лемма 7.37, стр. 344), выводим

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{1-\frac{1}{\sigma_{16}}}\|\rho_i^q\|_{L_\infty\left(0,T;W_{\sigma_{18}}^{2-\frac{2}{\sigma_{16}}}(\Omega)\right)}+\\&+\left\|\frac{\partial\rho_i^q}{\partial t}\right\|_{L_{\sigma_{16}}\left(0,T;L_{\sigma_{18}}(\Omega)\right)}+\varepsilon\|\rho_i^q\|_{L_{\sigma_{16}}\left(0,T;W_{\sigma_{18}}^2(\Omega)\right)}\leqslant\\&\leqslant B_{24}(\sigma_8,\sigma_9,\gamma,\Omega)\left(\varepsilon^{1-\frac{1}{\sigma_{16}}}\|\rho_{0i}^\delta\|_{W_{\sigma_{18}}^{2-\frac{2}{\sigma_{16}}}(\Omega)}+\frac{B_{23}}{\varepsilon}\right), \quad i=1,2.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Из (3.16), (3.18) получаем, что предельные функции ρ_i, $\boldsymbol{u}_i$, $i=1,2$, принадлежат следующим функциональным классам:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\rho_i}{\partial t}\in L_{\sigma_{16}}\big(0,T;L_{\sigma_{18}}(\Omega)\big), \quad \rho_i\in L_{\sigma_{16}}\big(0,T;W_{\sigma_{18}}^2(\Omega)\big),\\&\nabla\otimes(\rho_i\boldsymbol{u}_i)\in L_{\sigma_{16}}\big(0,T;L_{\sigma_{18}}(\Omega)\big), \quad i=1,2,\end{aligned}\tag{3.19}$$

и удовлетворяют уравнениям (2.2) почти всюду в Q_T. Заметим, что из (3.19) вытекает $\rho_i\in C([0,T];L_{\sigma_{18}}(\Omega))$, $i=1,2$. Из (3.10) следует, что для всех $t\in[0,T]$ $\rho_i^q(t)\to\rho_i(t)$ при $q\to+\infty$ слабо в $L_\gamma(\Omega)$, $i=1,2$, в частности, при $t=0$ это позволяет утверждать, что начальные условия (2.4) выполняются п. в. в Ω и для предельных функций. Из (3.18) заключаем, что для п. в. $t\in(0,T)$ верно $\rho_i^q(t)\to\rho_i(t)$ при $q\to+\infty$ слабо в $W_{\sigma_{18}}^2(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow W_{\sigma_{19}}^1(\partial\Omega)$ $\forall\,\sigma_{19}<\dfrac{2\sigma_{18}}{3-\sigma_{18}}$, $i=1,2$, а т. к. граничное условие (2.3) выполняется для ρ_i^q, $i=1,2$, то $\nabla\rho_i\cdot\boldsymbol{n}=0$ для п. в. $(t,\boldsymbol{x})\in(0,T)\times\partial\Omega$, $i=1,2$.

3.2. **Предельный переход в приближенных уравнениях импульсов.** Следующим этапом является предельный переход в (2.15) по $q \to +\infty$. Взяв в (2.15) для всех $q \in \mathbb{N}$ в качестве пробных функций $\boldsymbol{\varphi}_i = \chi_i \boldsymbol{\omega}_i$, $i = 1,2$, где $\chi_i \in C_0^1[0,T)$, $\boldsymbol{\omega}_i \in X_q$, $i = 1,2$, получим для п. в. $t \in (0,T)$ и всех $i = 1,2$ равенства

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial(\rho_i^q \boldsymbol{u}_i^q)}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\omega}_i \, d\boldsymbol{x} = \int\limits_\Omega \Big(-\mathbb{S}_i^q : (\nabla \otimes \boldsymbol{\omega}_i) + p_{ei}(\rho_i^q) \operatorname{div} \boldsymbol{\omega}_i +$$

$$+\theta^q p_{\theta i}(\rho_i^q) \operatorname{div} \boldsymbol{\omega}_i + (\rho_i^q \boldsymbol{u}_i^q \otimes \boldsymbol{u}_i^q) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\omega}_i) - \varepsilon\big((\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i^q)\boldsymbol{\omega}_i\big) \cdot \nabla \rho_i^q + \tag{3.20}$$

$$+ (\boldsymbol{J}_i^q + \rho_i^q \boldsymbol{f}_i) \cdot \boldsymbol{\omega}_i \Big) \, d\boldsymbol{x} =: \sum_{k=1}^{6} \langle \boldsymbol{I}_{ik}^q, \boldsymbol{\omega}_i \rangle.$$

Из оценок (2.16), (3.1), (3.2), (3.3), (3.9) и (3.16) следует, что для всех $i = 1,2$ величины $\boldsymbol{I}_{ik}^q$, $k = 1, \dots, 6$ ограничены равномерно по q соответственно в пространствах $L_2\big(0,T; W_2^{-1}(\Omega)\big)$, $L_{\frac{1}{\sigma_8}}\big(0,T; W^{-1}_{\frac{3}{3-2\sigma_8}}(\Omega)\big)$, $L_{\frac{3}{\sigma_8+1}}\big(0,T; W^{-1}_{\frac{9}{6-2\sigma_8}}(\Omega)\big)$, $L_{\sigma_{16}}\big(0,T; W_{\sigma_{18}}^{-1}(\Omega)\big)$, $L_{\sigma_{16}}\big(0,T; L_{\sigma_{17}}(\Omega)\big) \hookrightarrow L_{\sigma_{16}}\big(0,T; W^{-1}_{\frac{3\sigma_{17}}{3-\sigma_{17}}}(\Omega)\big)$ и $L_2(Q_T) \hookrightarrow L_2\big(0,T; W_2^{-1}(\Omega)\big)$. В результате, приходим к равномерной по q ограниченности $\dfrac{\partial(\rho_i^q \boldsymbol{u}_i^q)}{\partial t}$, $i = 1,2$ в пространстве $L_{\sigma_{20}}(0,T; W_{\sigma_{21}}^{-1}(\Omega))$, где

$$\sigma_{20} = \min\left\{ \frac{1}{\sigma_8}, \frac{3}{\sigma_8+1}, \sigma_{16} \right\},$$
$$\sigma_{21} = \min\left\{ 2, \frac{3}{3-2\sigma_8}, \frac{9}{6-2\sigma_8}, \sigma_{18}, \frac{3\sigma_{17}}{3-\sigma_{17}} \right\}. \tag{3.21}$$

Поскольку имеют место вложения $W_{\sigma_{18}}^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_{\sigma_{22}}(\Omega) \hookrightarrow W_1^{-1}(\Omega)$ при всех $\sigma_{22} \in \left[1, \dfrac{3\sigma_{18}}{3-\sigma_{18}}\right)$, последовательности $\{\rho_i^q \boldsymbol{u}_i^q\}$ ограничены в $L_{\sigma_{16}}(0,T; W_{\sigma_{18}}^1(\Omega))$, а $\left\{ \dfrac{\partial(\rho_i^q \boldsymbol{u}_i^q)}{\partial t} \right\}$ ограничены в $L_1(0,T; W_1^{-1}(\Omega))$, то, выбрав подходящие подпоследовательности и переобозначив их так же, получаем по теореме Лионса—Обена, что

$$\rho_i^q \boldsymbol{u}_i^q \to \rho_i \boldsymbol{u}_i \ \text{ при } \ q \to +\infty \ \text{ сильно в } \ L_{\sigma_{23}}(0,T; L_{\sigma_{22}}(\Omega)), \quad i = 1,2,$$

при всех $\sigma_{23} \in [1, \sigma_{16})$. Привлекая оценку (3.9), получаем

$$\rho_i^q \boldsymbol{u}_i^q \to \rho_i \boldsymbol{u}_i \ \text{ при } \ q \to +\infty \ \text{ сильно в } \ L_{\sigma_{24}}(0,T; L_{\sigma_{25}}(\Omega)), \quad i = 1,2, \tag{3.22}$$

где

$$1 \leqslant \sigma_{24} < \frac{2\gamma}{(\sigma_9 + \sigma_{26})\gamma + \sigma_8 + \sigma_9},$$

$$1 \leqslant \sigma_{25} < \frac{6\gamma}{(2 - \sigma_{26} - 2\sigma_9)\gamma + \sigma_9 - 2\sigma_8 + 3} \quad \forall\, \sigma_{26} \in (0,1].$$

Теперь в силу (3.8) заключаем, что при $q \to +\infty$

$$\rho_i^q \boldsymbol{u}_i^q \otimes \boldsymbol{u}_i^q \to \rho_i \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i \ \text{ слабо в } \ L_{\sigma_{27}}\big(0,T; L_{\sigma_{28}}(\Omega)\big), \quad i = 1,2, \tag{3.23}$$

где $\sigma_{27} < \dfrac{2\gamma}{(\sigma_9+\sigma_{26}+1)\gamma+\sigma_8+\sigma_9}$, $\sigma_{28} < \dfrac{6\gamma}{(3-\sigma_{26}-2\sigma_9)\gamma+\sigma_9-2\sigma_8+3}$, причем можно считать, что $\sigma_{28} > 1$ ввиду уже введенных условий, а $\sigma_{27} > 1$ при выполнении неравенства $\sigma_{26} < 1-\sigma_9-\dfrac{\sigma_8+\sigma_9}{\gamma}$, правая часть которого положительна ввиду (3.17).

Докажем теперь сильную сходимость градиентов плотностей в $L_2(Q_T)$. Из (2.2)–(2.4) следуют при $i=1,2$ равенства

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\|\rho_i^q(t)\|^2_{L_2(Q_T)}+\varepsilon\int_0^T(T-t)\|\nabla\rho_i^q(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt=\\ =\frac{T}{2}\|\rho_{0i}^\delta\|^2_{L_2(\Omega)}-\frac{1}{2}\int_0^T(T-t)\int_\Omega(\rho_i^q)^2(t)\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i^q(t)\,d\boldsymbol{x}dt.\end{gathered}\tag{3.24}$$

С другой стороны, при $i=1,2$ имеют место аналогичные тождества для предельных функций

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\|\rho_i(t)\|^2_{L_2(Q_T)}+\varepsilon\int_0^T(T-t)\|\nabla\rho_i(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt=\\ =\frac{T}{2}\|\rho_{0i}^\delta\|^2_{L_2(\Omega)}-\frac{1}{2}\int_0^T(T-t)\int_\Omega\rho_i^2(t)\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i(t)\,d\boldsymbol{x}dt.\end{gathered}\tag{3.25}$$

Переходя к пределу в (3.24) при $q\to+\infty$, используя (3.8), (3.12), и вычитая из получившихся тождеств (3.25), приходим к соотношениям

$$\lim_{q\to+\infty}\int_0^T(T-t)\|\nabla\rho_i^q(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt=\int_0^T(T-t)\|\nabla\rho_i(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt,\quad i=1,2.$$

Эти равенства вместе с (3.7) и (3.15) (ввиду (3.17) $\sigma_{14}>2$, $\sigma_{15}>2$) доказывают, что при $q\to+\infty$

$$\nabla\rho_i^q\to\nabla\rho_i \text{ сильно в } L_2(Q_T),\quad i=1,2,\tag{3.26}$$

а значит, снова благодаря (3.15), $\nabla\rho_i^q\to\nabla\rho_i$ сильно в $L_{\sigma_{29}}(0,T;L_{\sigma_{30}}(\Omega))$ при всех $\sigma_{29}\in(2,\sigma_{14})$, $\sigma_{30}\in(2,\sigma_{15})$, $i=1,2$. Отсюда, используя (3.8), получаем также, что при $q\to+\infty$ для всех $i=1,2$

$$\begin{gathered}(\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i^q)^*\nabla\rho_i^q\to(\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i)^*\nabla\rho_i \text{ слабо в } L_{\sigma_{31}}(0,T;L_{\sigma_{32}}(\Omega))\\ \forall\,\sigma_{31}\in\left(1,\frac{2\sigma_{14}}{2+\sigma_{14}}\right),\ \sigma_{32}\in\left(1,\frac{2\sigma_{15}}{2+\sigma_{15}}\right).\end{gathered}\tag{3.27}$$

Далее, докажем сходимость температуры. Сначала, действуя аналогично выводу(2.17) и (2.18), из (2.16) выводим, что

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\left(\rho_i^q+\upsilon\right)Q_i\left(\theta^q\right)\,d\boldsymbol{x}+\delta\int\limits_{Q_T}\left(\theta^q\right)^{m+1}\,d\boldsymbol{x}dt+$$
$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega}L^\delta\left(t,\boldsymbol{x},\theta^q\right)\,d\sigma dt\leqslant B_{25}\left(\text{арг }B_{12}\right), \tag{3.28}$$

откуда получаем (выделяя подпоследовательность и переобозначая ее так же), что при $q\to+\infty$

$$\theta^q\to\theta\ \text{ слабо в }\ L_{m+1}(Q_T). \tag{3.29}$$

Теперь предельный переход в уравнениях (2.15) по $q\to+\infty$ становится тривиальным. Действительно, умножая (3.20) на $\chi_i\in C_0^1[0,T)$ и интегрируя по $[0,T]$, находим

$$\int\limits_{Q_T}\Big(\rho_i^q\boldsymbol{u}_i^q\cdot\frac{\partial(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)}{\partial t}+(\rho_i^q\boldsymbol{u}_i^q\otimes\boldsymbol{u}_i^q):(\nabla\otimes(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i))+p_{ei}(\rho_i^q)\mathrm{div}(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)+$$
$$+\theta^q p_{\theta i}(\rho_i^q)\mathrm{div}(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)+\boldsymbol{J}_i^q\cdot(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)+\rho_i^q\boldsymbol{f}_i\cdot(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)\Big)\,d\boldsymbol{x}\,dt=$$
$$=\int\limits_{Q_T}\Big(\varepsilon((\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i^q)\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)\cdot\nabla\rho_i^q+\mathbb{S}_i^q:(\nabla\otimes(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i))\Big)\,d\boldsymbol{x}\,dt- \tag{3.30}$$
$$-\int\limits_{\Omega}\rho_{0i}^\delta\boldsymbol{u}_{0i}\cdot(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)|_{t=0}\,d\boldsymbol{x}\quad\forall\,\boldsymbol{\omega}_i\in X_{q_0}\quad\forall\,q_0\leqslant q,\quad i=1,2.$$

Переход к пределу в первом слагаемом в левой части (3.30) осуществляется благодаря (3.13), во втором — (3.23), третьем — (1.32), (3.12) (при $\sigma_8\in(0,1)$), четвертом — (1.32), (3.3), (3.12), (3.29), пятом — (3.8), шестом — (3.12), в первом слагаемом в правой части (3.30) переход возможен благодаря (3.27), во втором — (3.8). В результате предельного перехода получаем, что предельные функции ρ_i, $\boldsymbol{u}_i$, $i=1,2$, θ удовлетворяют аналогу (3.30) при всех $\boldsymbol{\omega}_i\in X_{q_0}$, $\forall\,q_0\in\mathbb{N}$, $\chi_i\in C_0^1[0,T)$, $i=1,2$, который мы запишем в следующем виде:

$$\int\limits_{Q_T}\Big(\rho_i\boldsymbol{u}_i\cdot\frac{\partial(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)}{\partial t}-(\mathrm{div}\,(\rho_i\boldsymbol{u}_i\otimes\boldsymbol{u}_i))\cdot(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)-\nabla p_i(\rho_i,\theta)\cdot(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)+$$
$$+(\boldsymbol{J}_i+\rho_i\boldsymbol{f}_i)\cdot(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)\Big)\,d\boldsymbol{x}\,dt=\int\limits_{Q_T}\Big(\varepsilon((\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i)\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)\cdot\nabla\rho_i- \tag{3.31}$$
$$-(\mathrm{div}\,\mathbb{S}_i)\cdot(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)\Big)\,d\boldsymbol{x}\,dt-\int\limits_{\Omega}\rho_{0i}^\delta\boldsymbol{u}_{0i}\cdot(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)|_{t=0}\,d\boldsymbol{x},\quad i=1,2,$$

где интегралы от обобщенных функций понимаются как их действия на соответствующие регулярные сомножители. Поскольку (при $\sigma_8 < 1$) все сомножители при $\boldsymbol{\omega}_i$ в (3.31) принадлежат пространству $L_1\big(0,T;W^{-1}_{\sigma_{33}}(\Omega)\big)$ (а последний принадлежит $L_\infty(\Omega)$), где

$$\sigma_{33}=\min\left\{\sigma_{28},\frac{\sigma_{13}}{\gamma},\frac{6\sigma_{13}}{\sigma_{13}+2\gamma},\frac{3\sigma_{32}}{3-\sigma_{32}},2\right\},$$

то формула (3.31) остается справедливой и если заменить $\boldsymbol{\omega}_i$ на произвольные функции $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\in \overset{\circ}{W}{}^1_{\sigma'_{33}}(\Omega)$ (здесь и далее штрих у показателя означает сопряжение по Лебегу).

Ввиду (3.9) с $\sigma_8=\sigma_9=0$ и вышеупомянутой ограниченности $\dfrac{\partial(\rho_i^q\boldsymbol{u}_i^q)}{\partial t}$ в пространстве $L_{\sigma_{20}}(0,T;W^{-1}_{\sigma_{21}}(\Omega))$ можно считать (см. [6], Лемма 6.2, стр. 301), что $\rho_i^q\boldsymbol{u}_i^q\to\rho_i\boldsymbol{u}_i$ в $C([0,T];L_{\frac{2\gamma}{\gamma+1},\mathrm{weak}}(\Omega))$, $i=1,2$, т. е. $\rho_i\boldsymbol{u}_i\in C([0,T];L_{\frac{2\gamma}{\gamma+1},\mathrm{weak}}(\Omega))$, $i=1,2$ и принимают значения $\rho_{0i}^\delta\boldsymbol{u}_{0i}$, $i=1,2$ в смысле этого пространства. Поэтому (3.31) можно переписать в виде

$$\int\limits_{Q_T}\Big[-\frac{\partial(\rho_i\boldsymbol{u}_i)}{\partial t}\cdot(\chi_i\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i)-(\operatorname{div}(\rho_i\boldsymbol{u}_i\otimes\boldsymbol{u}_i))\cdot(\chi_i\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i)-\nabla p_i(\rho_i,\theta)\cdot(\chi_i\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i)+$$
$$+(\boldsymbol{J}_i+\rho_i\boldsymbol{f}_i)\cdot(\chi_i\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i)\Big]d\boldsymbol{x}\,dt=\int\limits_{Q_T}\Big(\varepsilon((\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i)\chi_i\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i)\cdot\nabla\rho_i-$$
$$-(\operatorname{div}\mathbb{S}_i)\cdot(\chi_i\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i)\Big)\,d\boldsymbol{x}\,dt,\quad \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\in\overset{\circ}{W}{}^1_{\sigma'_{33}}(\Omega),\quad \chi_i\in C_0^1[0,T),\quad i=1,2.$$

Теперь ясно, что интегральные тождества (2.15) (для предельных функций) справедливы для всех $\boldsymbol{\varphi}_i\in C_0^1([0,T);C_0^1(\Omega))$, $i=1,2$. Отметим, что (см. [6], Упражнение 6.3, стр. 302) существуют векторные поля $\boldsymbol{q}_i\in C\big([0,T];L_{\frac{2\gamma}{\gamma+1},\mathrm{weak}}(\Omega)\big)$, $i=1,2$, такие, что для п. в. $t\in(0,T)$ имеют место равенства $\boldsymbol{q}_i(t)=\rho_i(t)\boldsymbol{u}_i(t)$ п. в. в Ω, $i=1,2$. Тогда (см. [6], Лемма 7.17, стр. 321), в результате изменения поля скоростей $\boldsymbol{u}_i$ каждой составляющей смеси на множестве нулевой меры в $(0,T)$, получаем

$$\rho_i\boldsymbol{u}_i\in C\big([0,T];L_{\frac{2\gamma}{\gamma+1},\mathrm{weak}}(\Omega)\big),\quad i=1,2. \tag{3.32}$$

4. Предельный переход по $q\to+\infty$ в приближенном уравнении энергии

4.1. **Оценки тепловых энергий.** Умножая (2.6) на $\dfrac{1}{1+\theta^q}$ и интегрируя результат по Q_t, приходим к равенству

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}(\rho_i^q+\upsilon)\left(\int\limits_0^{\theta^q}\frac{c_{\theta i}(z)}{1+z}dz\right)d\boldsymbol{x}+\delta\int\limits_{Q_t}\frac{(\theta^q)^{m+1}}{1+\theta^q}\,d\boldsymbol{x}\,d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\partial\Omega}\frac{L^\delta(t,\boldsymbol{x},\theta^q)}{1+\theta^q}\,d\sigma\,d\tau=\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\left(\rho_{0i}^\delta+\upsilon\right)\left(\int\limits_0^{\theta_0^\delta}\frac{c_{\theta i}(z)}{1+z}dz\right)d\boldsymbol{x}+ \tag{4.1}$$

$$+\int\limits_{Q_t}\frac{k(\theta^q)|\nabla\theta^q|^2}{(1+\theta^q)^2}\,d\boldsymbol{x}\,d\tau+(1-\delta)\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_t}\frac{\mathbb{S}_i^q:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i^q)}{1+\theta^q}\,d\boldsymbol{x}\,d\tau+$$

$$+a\int\limits_{Q_t}\frac{|\boldsymbol{u}_1^q-\boldsymbol{u}_2^q|^2}{1+\theta^q}\,d\boldsymbol{x}\,d\tau-\int\limits_{Q_t}\frac{\theta^q}{1+\theta^q}\sum_{i=1}^{2}p_{\theta i}\left(\rho_i^q\right)\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i^q\,d\boldsymbol{x}\,d\tau-$$

$$-\varepsilon\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_t}\frac{Q_i(\theta^q)}{(1+\theta^q)^2}\nabla\rho_i^q\cdot\nabla\theta^q\,d\boldsymbol{x}\,d\tau+\int\limits_{Q_t}\frac{\rho^q g^\delta}{1+\theta^q}\,d\boldsymbol{x}\,d\tau\quad\forall\,t\in[0,T].$$

Поскольку все слагаемые в правой части (4.1) кроме двух последних неотрицательны, то с учетом (1.34) и (3.28) получаем, что

$$\frac{1}{c_5}\int\limits_{Q_T}\frac{\left(1+(\theta^q)^m\right)|\nabla\theta^q|^2}{(1+\theta^q)^2}\,d\boldsymbol{x}\,dt\leqslant\int\limits_{Q_T}\frac{\theta^q}{1+\theta^q}\sum_{i=1}^{2}p_{\theta i}\left(\rho_i^q\right)|\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i^q|\;d\boldsymbol{x}\,d\tau+$$

$$+\varepsilon\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_T}\frac{Q_i(\theta^q)}{(1+\theta^q)^2}|\nabla\rho_i^q|\,|\nabla\theta^q|\,d\boldsymbol{x}+B_{25},\tag{4.2}$$

откуда, ввиду (1.32), (1.35), (3.1), (3.2) и (3.5), следует оценка[7]

$$\begin{gathered}\|\nabla\theta^q\|_{L_2(Q_T)}+\left\|\nabla\left((\theta^q)^{\frac{m}{2}}\right)\right\|_{L_2(Q_T)}\leqslant\\ \leqslant B_{26}\left(B_{14},B_{15},B_{19},B_{25},c_4,c_5,c_6,m,T,\gamma,|\Omega|\right).\end{gathered}\tag{4.3}$$

Следовательно (см. (3.28)),

$$\|Q_i(\theta^q)\|_{L_2\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right)}\leqslant B_{27}\left(B_{25},B_{26},c_6,m,T,\delta,|\Omega|\right),\quad i=1,2.\tag{4.4}$$

4.2. **Сильная сходимость последовательности температур.** Докажем, что

$$\theta^q\to\theta\ \text{ при }\ q\to+\infty\ \text{ сильно в }\ L_{\sigma_{34}}(Q_T)\tag{4.5}$$

при всех $\sigma_{34}<m+1$. Для этого можно предложить два способа:

(1) иметь дело с уравнением энергии в форме соотношения для тепловой энергии (реализовано в разделе 4.3);
(2) перейти к уравнению для температуры (реализовано в разделе 4.4).

Первый способ[8] означает работу с уравнением (2.6). В общем случае (произвольных $c_{\theta i}$) это приводит к непреодолимым трудностям при выводе аналога соотношения (4.10), и работает только для линейно зависимых $c_{\theta i}$. С другой стороны, второй способ, хотя и не требует линейной зависимости $c_{\theta i}$, но вызывает более громоздкую работу с уравнением в форме (4.18) и налагает дополнительные ограничения (4.19).

---

[7] В дальнейшем при ссылке на формулу (4.3) и ее аналоги, возникающие в процессе следующих предельных переходов, подразумевается оценка в пространстве $L_m(0,T;L_{3m}(\Omega))$.

[8] Именно так делается в случае однокомпонентной среды [1].

Замечание 8. *В процессе предельного перехода $q \to +\infty$ мы имеем возможность выбирать любой из двух предложенных способов. В дальнейшем, в процессе предельного перехода $\varepsilon \to +0$, будет наложено ограничение* (4.9), *и тем самым в требованиях* (4.19) *нет необходимости. Тем самым мы возвращаемся в рамки исходных требований на m наложенных в* (1.34).

В результате, реализуя тот или иной вариант, мы приходим к (4.5).

4.3. **Вывод сильной сходимости температур при помощи уравнения для Q_i и в предположении, что $c_{\theta i} = k_i c_\theta$.** Из (4.4) следуют следующие сходимости при $q \to +\infty$:

$$Q_i(\theta^q) \to \overline{Q_i(\theta)} \ \text{ слабо в } \ L_2\left(0,T; W_2^1(\Omega)\right), \quad i = 1,2 \tag{4.6}$$

$\left(\overline{Q_i(\theta)}, i = 1,2\right.$ обозначают слабые пределы последовательностей $Q_i(\theta^q)$, $i = 1,2$ в пространстве $\left.L_2\left(0,T; W_2^1(\Omega)\right)\right)$. Привлекая (3.1), (3.12) и (4.4), тогда получаем при $i = 1,2$, что при $q \to +\infty$

$$\rho_i^q Q_i(\theta^q) \to \rho_i \overline{Q_i(\theta)} \ \text{ слабо в } \ L_2\left(0,T; L_{\sigma_{35}}(\Omega)\right) \quad \forall\, \sigma_{35} \leqslant \frac{6\gamma}{6+\gamma}. \tag{4.7}$$

Далее, из уравнения энергии (2.6) следует, что $\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\sum_{i=1}^{2}(\rho_i^q + \upsilon)Q_i(\theta^q)$ равномерно по q ограничены в пространстве $L_1\Big(0,T; W_{\frac{3}{2}}^{-3}(\Omega)\Big)$. Поэтому, из (3.28), (4.6), (4.7) и Леммы 6.3, стр. 131 из [1] при $\sigma_{35} > \dfrac{6}{5}$ имеем при $q \to +\infty$

$$\sum_{i=1}^{2}(\rho_i^q + \upsilon)Q_i(\theta^q) \to \sum_{i=1}^{2}(\rho_i + \upsilon)\overline{Q_i(\theta)} \ \text{ сильно в } \ L_2\left(0,T; W_2^{-1}(\Omega)\right). \tag{4.8}$$

В дополнение к (1.35) примем, что

$$c_{\theta i}(z) = k_i c_\theta(z), \ \text{ где } k_i = \mathrm{const} > 0, \quad i = 1,2, \tag{4.9}$$

а функция c_θ обладает теми же свойствами, что и $c_{\theta i}$ (см. (1.35)). Тогда из (4.6) и (4.8) следует, что при $q \to +\infty$

$$|Q(\theta^q)|^2 \sum_{i=1}^{2} k_i(\rho_i^q + \upsilon) \to \left|\overline{Q(\theta)}\right|^2 \sum_{i=1}^{2} k_i(\rho_i + \upsilon) \ \text{ в } \ D'((0,T)\times\Omega), \tag{4.10}$$

где

$$Q(\theta) = \int\limits_0^\theta c_\theta(z)\,dz, \tag{4.11}$$

а $\overline{Q(\theta)}$ — это слабый предел $Q(\theta^q)$ в пространстве $L_2\left(0,T; W_2^1(\Omega)\right)$ $\Big($отметим, что $\overline{Q_i(\theta)} = k_i\overline{Q(\theta)}$, $i = 1,2\Big)$. С другой стороны, поскольку очевидно

$$\sqrt{\rho_i^q} \to \sqrt{\rho_i} \ \text{ при } \ q \to +\infty \ \text{ сильно в } \ L_2(Q_T), \quad i = 1,2,$$

то

$$\sqrt{\rho_i^q}Q_i(\theta^q) \to \sqrt{\rho_i}\overline{Q_i(\theta)} \ \text{ слабо в } \ L_1(Q_T), \quad i = 1,2.$$

Поэтому, и из того, что $\sqrt{\rho_i^q}Q_i(\theta^q)$, $i=1,2$ равномерно по q ограничены в пространстве $L_2\big(0,T;L_{\frac{6\gamma}{\gamma+3}}(\Omega)\big)$, получаем сходимости

$$\sqrt{\rho_i^q}Q_i(\theta^q)\to\sqrt{\rho_i}\overline{Q_i(\theta)}\ \text{ слабо в }\ L_2(Q_T),\quad i=1,2 \tag{4.12}$$

и вследствие чего оценки

$$\int\limits_{Q_T}\rho_i\big|\overline{Q_i(\theta)}\big|^2\,d\boldsymbol{x}dt\leqslant\liminf_{q\to+\infty}\int\limits_{Q_T}\rho_i^q\big|Q_i(\theta^q)\big|^2\,d\boldsymbol{x}dt,\quad i=1,2. \tag{4.13}$$

Можно и иначе (аналогично выводу неравенства (7.65) на стр. 170 в [1]) получить оценки (4.13). Поскольку функция

$$\Phi(z,s)=\begin{cases}\dfrac{s^2}{z}, & z>0,\\[2mm] 0, & z=s=0,\\[2mm] +\infty, & z\leqslant 0,\quad s\neq 0\end{cases}$$

является выпуклой и полунепрерывной снизу, то применяя (3.12), (4.7) и Следствие 2.2, стр. 36 Теоремы 2.11, стр. 34 из [1] с $O=Q_T$, $M=3$, $N=2$, $n=q$, $\boldsymbol{v}_n=((\rho_i^q+\omega),(\rho_i^q+\omega)Q_i(\theta^q))$, $\boldsymbol{v}=\big((\rho_i+\omega),(\rho_i+\omega)\overline{Q_i(\theta)}\big)=(z,s)$, $\omega>0$ получаем, что

$$\int\limits_{Q_T}\rho_i\big|\overline{Q_i(\theta)}\big|^2\,d\boldsymbol{x}dt\leqslant\liminf_{q\to+\infty}\int\limits_{Q_T}(\rho_i^q+\omega)\big|Q_i(\theta^q)\big|^2\,d\boldsymbol{x}dt\quad\forall\,\omega>0,\quad i=1,2, \tag{4.14}$$

откуда очевидно следует (4.13).

Таким образом, соотношения (4.13) вместе с (4.10) дают

$$\lim_{q\to+\infty}\int\limits_{Q_T}|Q(\theta^q)|^2\,d\boldsymbol{x}dt=\int\limits_{Q_T}|\overline{Q(\theta)}|^2\,d\boldsymbol{x}dt, \tag{4.15}$$

откуда мы можем сделать вывод о том, что при $q\to+\infty$

$$Q(\theta^q)\to\overline{Q(\theta)}\ \text{ сильно в }\ L_2(Q_T). \tag{4.16}$$

Значит в силу (1.35)

$$\begin{aligned}&\lim_{q_1,q_2\to+\infty}\int\limits_{Q_T}|\theta^{q_1}-\theta^{q_2}|^2\,d\boldsymbol{x}dt\leqslant\\ &\leqslant c_6\lim_{q_1,q_2\to+\infty}\int\limits_{Q_T}(Q(\theta^{q_1})-Q(\theta^{q_2}))(\theta^{q_1}-\theta^{q_2})\,d\boldsymbol{x}dt=0,\end{aligned} \tag{4.17}$$

что с учетом (3.28) дает (4.5).

4.4. **Вывод сильной сходимости температур при помощи уравнения для θ для общих $c_{\theta i}$, но с повышенными требованиями на m.** Перепишем уравнение энергии (2.6) в виде

$$\frac{\partial\theta^q}{\partial t} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{2}(\rho_i^q+\upsilon)c_{\theta i}(\theta^q)}\left[-\varepsilon\sum_{i=1}^{2}Q_i(\theta^q)\Delta\rho_i^q - \sum_{i=1}^{2}\rho_i^q c_{\theta i}(\theta^q)\boldsymbol{u}_i^q\nabla\theta^q + \right.$$

$$(4.18)\qquad +\mathrm{div}\,(k(\theta^q)\nabla\theta^q) - \theta^q\sum_{i=1}^{2}p_{\theta i}(\rho_i^q)\,\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i^q - \delta(\theta^q)^{m+1} +$$

$$\left. +(1-\delta)\sum_{i=1}^{2}\mathbb{S}_i^q : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i^q) + a|\boldsymbol{u}_1^q - \boldsymbol{u}_2^q|^2 + \rho^q g^\delta\right].$$

Заметим, что

$$\frac{\mathrm{div}\,(k(\theta^q)\nabla\theta^q)}{\sum\limits_{i=1}^{2}(\rho_i^q+\upsilon)c_{\theta i}(\theta^q)} = \mathrm{div}\left(\frac{k(\theta^q)\nabla\theta^q}{\sum\limits_{i=1}^{2}(\rho_i^q+\upsilon)c_{\theta i}(\theta^q)}\right) +$$

$$+\frac{k(\theta^q)\nabla\theta^q\sum\limits_{i=1}^{2}\big((\nabla\rho_i^q)c_{\theta i}(\theta^q) + (\rho_i^q+\upsilon)c'_{\theta i}(\theta^q)\nabla\theta^q\big)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{2}(\rho_i^q+\upsilon)c_{\theta i}(\theta^q)\right)^2}.$$

В силу (1.32), (1.33), (1.34), (1.35), (1.40), (2.10), (3.1), (3.2), (3.17), (3.18), (3.28), (4.3) и дополнительных ограничений[9,10]

$$(4.19)\qquad m \geqslant 27, \quad |c'_{\theta i}(z)| \leqslant c_7(1+z^{m-4}), \quad i=1,2, \quad c_7 = \mathrm{const} > 0,$$

правая часть (4.18) равномерно по q ограничена в пространстве $L_1\big(0,T;W_1^{-1}(\Omega)\big)$. Поскольку имеют место вложения

$$W_2^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_{\sigma_{36}}(\Omega) \hookrightarrow W_1^{-1}(\Omega) \quad \text{при всех } \sigma_{36}\in[1,6),$$

последовательность $\{\theta^q\}$ ограничена в $L_{m+1}\big(0,T;L_{\sigma_{36}}(\Omega)\big)\bigcap L_1(0,T;W_2^1(\Omega))$ (см. (3.28), (4.3)), а $\left\{\dfrac{\partial\theta^q}{\partial t}\right\}$ ограничена в $L_1(0,T;W_1^{-1}(\Omega))$, то, выбрав подходящую подпоследовательность и переобозначив ее так же, получаем по теореме

---

[9]Наиболее жесткое ограничение на m возникает в процессе предельного перехода в слагаемом, содержащем $(\theta^q)^{\frac{m}{2}+1}\nabla\theta^q\cdot\nabla\rho_i^q$. А именно, требуется $\dfrac{6}{2\gamma-1}+\dfrac{12}{m}<1$. Если не ужесточать требования на γ по сравнению с (1.33), то это означает $m>\dfrac{132}{5}$.

[10]Можно потребовать $\dfrac{1}{c_6}\left(\dfrac{m}{2}-1\right)z^{\frac{m}{2}-2} \leqslant c'_{\theta i}(z) \leqslant c_6\left(\dfrac{m}{2}-1\right)z^{\frac{m}{2}-2}$, $\dfrac{1}{c_6}\leqslant c_{\theta i}(0)\leqslant c_6$, тогда $(1.35)_2$ следует автоматически, но недостаток этого подхода в том, что налагается дополнительное ненужное требование монотонности $c_{\theta i}$.

Лионса—Обена, что

$$\text{(4.20)}\quad \theta^q \to \theta \ \text{ при } \ q \to +\infty \ \text{ сильно в } \ L_{\sigma_{37}}\big(0,T;L_{\sigma_{36}}(\Omega)\big) \quad \forall\, 1 \leqslant \sigma_{37} < m+1,$$

откуда и из (3.28) следует (4.5).

4.5. **Ренормализованное уравнение энергии.** Рассмотрим произвольную регуляризующую функцию $\widehat{h}$ такую, что[11]

$$\text{(4.21)}\qquad \begin{gathered} \widehat{h} \in C^2[0,+\infty), \quad \widehat{h}(0) > 0, \quad \lim_{z\to+\infty} \widehat{h}(z) = 0, \quad \widehat{h}'(z) \leqslant 0, \\ \widehat{h}''(z)\widehat{h}(z) \geqslant 2\left(\widehat{h}'(z)\right)^2 \quad \forall\, z \geqslant 0. \end{gathered}$$

Заметим, что

$$\text{(4.22)}\qquad 0 \leqslant -\widehat{h}'(z) < \frac{\widehat{h}(0) - B_{28}\widehat{h}'(0)}{z + B_{28}} \quad \text{при всех } z \geqslant 0 \text{ и } B_{28} \geqslant 0,$$

т. к. $((z+B_{28})\widehat{h}'(z))' \geqslant \widehat{h}'(z)$. В частности, $z\widehat{h}'(z) > -\widehat{h}(0)$.

Умножив уравнение (2.6) на $\widehat{h}(\theta)$, получим так называемое ренормализованное уравнение энергии (см. раздел 4.3.3, стр. 78 в [1])

$$\text{(4.23)}\qquad \begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{2}(\rho_i^q + \upsilon)\widehat{Q}_i(\theta^q) + \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{2}\rho_i^q \widehat{Q}_i(\theta^q)\boldsymbol{u}_i^q\right) - \Delta\widehat{\mathcal{K}}(\theta^q) + \\ + \delta\widehat{h}(\theta^q)(\theta^q)^{m+1} = (1-\delta)\widehat{h}(\theta^q)\sum_{i=1}^{2}\mathbb{S}_i^q : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i^q) + a\widehat{h}(\theta^q)|\boldsymbol{u}_1^q - \boldsymbol{u}_2^q|^2 + \\ + \widehat{h}(\theta^q)\rho^q g^\delta - \theta^q\widehat{h}(\theta^q)\sum_{i=1}^{2}p_{\theta i}(\rho_i^q)\operatorname{div}\boldsymbol{u}_i^q - \\ - k(\theta^q)\widehat{h}'(\theta^q)|\nabla\theta^q|^2 + \varepsilon\sum_{i=1}^{2}\Delta\rho_i^q\left(\widehat{Q}_i(\theta^q) - \widehat{h}(\theta^q)Q_i(\theta^q)\right), \end{gathered}$$

где

$$\text{(4.24)}\qquad \widehat{Q}_i(\theta^q) = \int\limits_0^{\theta^q}\widehat{h}(z)c_{\theta i}(z)\,dz, \quad i = 1,2, \quad \widehat{\mathcal{K}}(\theta^q) = \int\limits_0^{\theta^q}\widehat{h}(z)k(z)\,dz.$$

Теперь умножим уравнение (4.23) на тестовую функцию ψ такую, что

$$\text{(4.25)}\qquad \psi \in C^2(\overline{Q}_T), \quad \psi \geqslant 0, \quad \psi(T,\cdot) = 0, \quad \nabla\psi\cdot\boldsymbol{n}|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0$$

---

[11]Например, можно взять $\widehat{h} = \dfrac{c_8}{1+\varphi}$ с любыми $c_8 > 0$ и $\varphi \in C^2[0,+\infty)$ такой, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi' \geqslant 0$, $\varphi'' \leqslant 0$, $\varphi(s) \to +\infty$ при $s \to +\infty$.

и проинтегрируем результат по Q_T, получим

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_T}(\rho_i^q+\upsilon)\widehat{Q}_i(\theta^q)\frac{\partial\psi}{\partial t}\,d\boldsymbol{x}dt+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_T}\rho_i^q\widehat{Q}_i(\theta^q)\boldsymbol{u}_i^q\cdot\nabla\psi\,d\boldsymbol{x}dt+$$

$$+\int\limits_{Q_T}\widehat{\mathcal{K}}(\theta^q)\Delta\psi\,d\boldsymbol{x}dt-\delta\int\limits_{Q_T}\widehat{h}(\theta^q)(\theta^q)^{m+1}\psi\,d\boldsymbol{x}dt=$$

$$=(\delta-1)\int\limits_{Q_T}\widehat{h}(\theta^q)\left(\sum_{i=1}^{2}\mathbb{S}_i^q:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i^q)\right)\psi\,d\boldsymbol{x}dt-$$

$$-\int\limits_{Q_T}\widehat{h}(\theta^q)\rho^q g^\delta\psi\,d\boldsymbol{x}dt+\int\limits_{Q_T}\theta^q\widehat{h}(\theta^q)\sum_{i=1}^{2}p_{\theta i}(\rho_i^q)\,(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i^q)\psi\,d\boldsymbol{x}dt+ \tag{4.26}$$

$$+\int\limits_{Q_T}k(\theta^q)\widehat{h}'(\theta^q)|\nabla\theta^q|^2\psi\,d\boldsymbol{x}dt-\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}(\rho_{0i}^\delta+\upsilon)\widehat{Q}_i(\theta_0^\delta)\psi|_{t=0}\,d\boldsymbol{x}+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega}\widehat{h}(\theta^q)L^\delta(t,\boldsymbol{x},\theta^q)\psi\,d\sigma dt-a\int\limits_{Q_T}\widehat{h}(\theta^q)|\boldsymbol{u}_1^q-\boldsymbol{u}_2^q|^2\psi\,d\boldsymbol{x}dt+$$

$$+\varepsilon\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_T}\nabla\rho_i^q\cdot\nabla\left(\left(\widehat{Q}_i(\theta^q)-\widehat{h}(\theta^q)Q_i(\theta^q)\right)\psi\right)\,d\boldsymbol{x}dt.$$

4.6. **Предельный переход в ренормализованном уравнении энергии.**

Замечание 9. *Переходя далее к пределу (по ε, δ и υ), мы будем делать это для конкретных $\widehat{h}$, выделяя соответствующие подпоследовательности решений для каждой из них. Это возможно (используя при необходимости диагональный процесс) сразу для всех необходимых $\widehat{h}$, если они образуют не более чем счетное множество. А именно, мы будем использовать следующие регуляризирующие функции:*

- $\widehat{h}(z)=\dfrac{1}{(1+z)^\omega}$, $0<\omega\leqslant 1$,
- $\widehat{h}(z)=\dfrac{1}{z+\omega}$, $0<\omega\leqslant 1$.

Пока же, в процессе предельного перехода по q, используются только общие ограничения (4.21).

Перейдем в (4.26) к нижнему пределу при $q\to+\infty$. Из (4.4), (4.5) и (4.21) следует, что

$$\widehat{Q}_i(\theta^q)\to\widehat{Q}_i(\theta)\ \text{ сильно в }\ L_{\sigma_{38}}(Q_T),\quad i=1,2,\quad\forall\,\sigma_{38}\in[1,2), \tag{4.27}$$

а значит в силу (1.35), (3.28) и (4.21)

$$\widehat{Q}_i(\theta^q)\to\widehat{Q}_i(\theta)\ \text{ сильно в }\ L_{\sigma_{39}}(Q_T),\quad i=1,2 \tag{4.28}$$

для всех $\sigma_{39} < 2 + \dfrac{2}{m}$ и, следовательно, из (3.12), (3.13) (при $\sigma_8 = \sigma_9 = \dfrac{1}{2}$) выводим

$$(\upsilon+\rho_i^q)\widehat{Q}_i(\theta^q) \to (\upsilon+\rho_i)\widehat{Q}_i(\theta) \text{ сильно в } L_1(Q_T), \quad i=1,2,$$
$$\rho_i^q\widehat{Q}_i(\theta^q)\boldsymbol{u}_i^q \to \rho_i\widehat{Q}_i(\theta)\boldsymbol{u}_i \text{ слабо в } L_{\frac{2\sigma_{39}}{\sigma_{39}+2}}(Q_T), \quad i=1,2, \tag{4.29}$$

при условии, что $\sigma_{39} > 2$. Из (1.34), (3.28), (4.5), (4.21) и (4.24) имеем[12] при $q \to +\infty$, что

$$\widehat{\mathcal{K}}(\theta^q) \to \widehat{\mathcal{K}}(\theta) \text{ сильно в } L_1(Q_T), \tag{4.30}$$

$$\widehat{h}(\theta^q)(\theta^q)^{m+1} \to \widehat{h}(\theta)\theta^{m+1} \text{ сильно в } L_1(Q_T). \tag{4.31}$$

Так как правая часть (1.30) является неотрицательно определенной квадратичной формой от компонент тензоров $\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i$, $i=1,2$, а функция

$$\Phi(z,s) = \begin{cases} \widehat{h}(z)s^2, & z \geqslant 0, \\ +\infty, & z<0 \end{cases}$$

является (нестрого) выпуклой и полунепрерывной снизу (см. (4.21)), то применяя Следствие 2.2, стр. 36 Теоремы 2.11, стр. 34 из [1] и сходимости (3.8), (3.29) (или (4.5)), получаем, что

$$\int\limits_{Q_T} \widehat{h}(\theta)\left(\sum_{i=1}^{2}\mathbb{S}_i:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)\right)\psi\,d\boldsymbol{x}dt \leqslant \liminf_{q\to+\infty}\int\limits_{Q_T}\widehat{h}(\theta^q)\left(\sum_{i=1}^{2}\mathbb{S}_i^q:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i^q)\right)\psi\,d\boldsymbol{x}dt, \tag{4.32}$$

$$a\int\limits_{Q_T}\widehat{h}(\theta)|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2|^2\psi\,d\boldsymbol{x}dt \leqslant a\liminf_{q\to+\infty}\int\limits_{Q_T}\widehat{h}(\theta^q)|\boldsymbol{u}_1^q-\boldsymbol{u}_2^q|^2\psi\,d\boldsymbol{x}dt. \tag{4.33}$$

Замечание 10. *Неравенство* (4.32) *можно получить рассматривая полунепрерывную снизу, выпуклую функцию непосредственно от тензорных аргументов*

$$\widetilde{\Phi}(z,\mathbb{A}_1,\mathbb{A}_2) = \begin{cases} \widehat{h}(z)\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2}\left(2\mu_{ij}\mathbb{A}_i:\mathbb{A}_j+\lambda_{ij}(\mathrm{tr}\mathbb{A}_i)(\mathrm{tr}\mathbb{A}_j)\right), & z\geqslant 0, \\ +\infty, & z<0. \end{cases}$$

Далее, из (4.5), (4.21) и теоремы Витали (см., например [6], Теорема 1.18, стр. 15) следует, что при $q\to+\infty$

$$\widehat{h}(\theta^q) \to \widehat{h}(\theta) \text{ сильно в } L_{\sigma_{40}}(Q_T) \tag{4.34}$$

при всех $\sigma_{40} < +\infty$. Из (3.12) получаем, что

$$\rho_i^q \to \rho_i \text{ при } q\to+\infty \text{ сильно в } L_{\sigma_{41}}(Q_T) \tag{4.35}$$

---

[12] Функция $\widetilde{\Psi}(z) = z^{m+1}\widehat{h}(z)$ в силу (4.21) является N-функцией, растущей медленнее чем z^{m+1}. Поэтому (3.28) и (4.5) гарантируют (4.31). Аналогично (4.30). Другими словами, работает теорема Витали (см., например [6], Теорема 1.18, стр. 15).

при всех $\sigma_{41} < \dfrac{5\gamma}{3}$, а значит, в силу (1.32), при $i = 1, 2$ имеем

$$p_{\theta i}(\rho_i^q) \to p_{\theta i}(\rho_i) \text{ при } q \to +\infty \text{ сильно в } L_{\sigma_{42}}(Q_T) \quad \forall\, \sigma_{42} < 5. \tag{4.36}$$

Тогда, благодаря[13] (3.8), (4.5), (4.34), (4.35), (4.36), приходим к сходимостям

$$\widehat{h}(\theta^q)\rho^q \to \widehat{h}(\theta)\rho \text{ при } q \to +\infty \text{ сильно в } L_{\sigma_{43}}(Q_T) \text{ при всех } \sigma_{43} < \frac{5\gamma}{3}, \tag{4.37}$$

где $\rho = \rho_1 + \rho_2$,

$$\begin{gathered} \theta^q \widehat{h}(\theta^q) \sum_{i=1}^{2} p_{\theta i}(\rho_i^q)\,\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i^q \to \theta\widehat{h}(\theta) \sum_{i=1}^{2} p_{\theta i}(\rho_i)\,\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i \\ \text{при} \quad q \to +\infty \text{ слабо в } L_{\sigma_{44}}(Q_T) \end{gathered} \tag{4.38}$$

с любым $\sigma_{44} > 1$.

На основании (3.28) и (4.3) из последовательности θ^q может быть выделена подпоследовательность (которую мы обозначим так же), для которой при $q \to +\infty$ имеет место сходимость

$$\theta^q \to \theta \text{ слабо в } L_2\big(0, T; W_2^1(\Omega)\big). \tag{4.39}$$

Более того, привлекая (4.5), получаем, что

$$\theta^q \to \theta \text{ сильно в } L_{\sigma_{45}}\big(0, T; L_{\sigma_{46}}(\partial\Omega)\big), \tag{4.40}$$

где

$$\sigma_{45} = \frac{2\sigma_{34}}{\sigma_{34}\sigma_{47} + 2(1-\sigma_{47})}, \quad \sigma_{46} = \frac{4\sigma_{34}}{\sigma_{34}\sigma_{47} + 6(1-\sigma_{47})} \quad \forall\, \sigma_{47} \in [0, 1).$$

Лемма 11. *Из оценки граничного интеграла в* (3.28), *сходимости* (4.40) *и свойств* (2.11), (4.21) *следует* (*для подпоследовательности*) *сходимость*

$$\widehat{h}(\theta^q)L^\delta(\cdot,\cdot,\theta^q) \to \widehat{h}(\theta)L^\delta(\cdot,\cdot,\theta) \textit{ при } q \to +\infty \textit{ сильно в } L_1((0,T)\times\partial\Omega). \tag{4.41}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой Витали о сходящейся последовательности. Сходимость $\widehat{h}(\theta^q)L^\delta(\cdot,\cdot,\theta^q) \to \widehat{h}(\theta)L^\delta(\cdot,\cdot,\theta)$ почти всюду на $(0,T)\times\partial\Omega$ можно (для подпоследовательности) утверждать в силу (4.40) и непрерывности функций L^δ и $\widehat{h}$ (см. (2.11), (4.21)). Для проверки равностепенной интегрируемости зададим произвольно $\varepsilon_1 > 0$ и найдем такое $M > 0$, что $\widehat{h}(z) < \dfrac{\varepsilon_1}{2B_{25}}$ для всех $z > M$. Далее, в силу непрерывности L^δ определена величина $B_{29}(M) = \max\limits_{t\in[0,T],\, \boldsymbol{x}\in\partial\Omega,\, z\leqslant M} L^\delta(\cdot,\cdot,z)$. Теперь положим $\delta_1 = \dfrac{\varepsilon_1}{2\widehat{h}(0)B_{29}(M)}$. Тогда для любого измеримого множества $E \subset (0,T)\times\partial\Omega$ такого что $\mu(E) < \delta_1$, имеем $\displaystyle\int\limits_E \widehat{h}(\theta^q)L^\delta(t,\boldsymbol{x},\theta^q)d\sigma\,dt < \varepsilon_1$, как это легко видеть, разбив интеграл на множества где $\theta^q \leqslant M$ и $\theta^q > M$.

---

[13] Необходимо также использовать интерполяцию пространств $L_{m+1}(Q_T)\bigcap L_m\big(0,T;L_{3m}(\Omega)\big)$ и $L_\infty\big(0,T;L_3(\Omega)\big)\bigcap L_3\big(0,T;L_9(\Omega)\big)$.

Замечание 12. *Возможен другой (вместо Леммы 11) способ доказательства сходимости* (4.41). *А именно, наложим дополнительные (т. е. сверх* (1.45), (1.46)) *требования на функцию L:*

$$L(\cdot,\cdot,z) \leqslant c_9(1+z^m) \quad \forall\, z \in \mathbb{R}, \tag{4.42}$$

где $c_9 = \mathrm{const} > 0$. Тогда (при условии, например, конструкции в сноске к (2.10), (2.11)) *получаем в дополнение к* (2.11), *что*

$$L^\delta(\cdot,\cdot,z) \leqslant B_{30}(c_9)(1+z^m) \quad \forall\, z \in \mathbb{R}. \tag{4.43}$$

В результате, благодаря (3.28) *и* (4.3) *имеем ограниченность θ^q в $L_m(0,T,L_{2m}(\partial\Omega))$, что ввиду* (4.21), (4.40) *и теоремы Витали влечет* (4.41).

Ввиду (1.35), (3.26), (4.3), (4.24), (4.5), (4.21), (4.22) получаем, что при $q \to +\infty$

$$\begin{gathered}\nabla\rho_i^q \cdot \nabla\left(\left(\widehat{Q}_i(\theta^q) - \widehat{h}(\theta^q)Q_i(\theta^q)\right)\psi\right) \to \\ \to \nabla\rho_i \cdot \nabla\left(\left(\widehat{Q}_i(\theta) - \widehat{h}(\theta)Q_i(\theta)\right)\psi\right) \text{ слабо в } L_1(Q_T), \quad i=1,2.\end{gathered} \tag{4.44}$$

Так как в силу (1.34), (3.28), (4.3) и (4.22) последовательность $\sqrt{-\widehat{h}'(\theta^q)k(\theta^q)}\nabla\theta^q$ равномерно по q ограничена в пространстве $L_{\frac{2(m+1)}{m+2}}(Q_T)$, то при $q \to +\infty$

$$\sqrt{-\widehat{h}'(\theta^q)k(\theta^q)}\nabla\theta^q \to \overline{\sqrt{-\widehat{h}'(\theta)k(\theta)}\nabla\theta} \quad \text{слабо в} \quad L_{\frac{2(m+1)}{m+2}}(Q_T). \tag{4.45}$$

С другой стороны, из (1.34), (4.5) и (4.21) следует, что при $q \to +\infty$

$$\sqrt{-\widehat{h}'(\theta^q)k(\theta^q)} \to \sqrt{-\widehat{h}'(\theta)k(\theta)} \quad \text{п. в. в} \quad Q_T, \tag{4.46}$$

откуда и из (1.34), (3.28), теоремы Витали приходим к тому, что при $q \to +\infty$

$$\sqrt{-\widehat{h}'(\theta^q)k(\theta^q)} \to \sqrt{-\widehat{h}'(\theta)k(\theta)} \quad \text{сильно в} \quad L_{\sigma_{48}}(Q_T) \tag{4.47}$$

при любых $\sigma_{48} < \dfrac{2(m+1)}{m-1}$. Тогда из (4.39), (4.47) получаем, что при $q \to +\infty$

$$\begin{gathered}\sqrt{\psi}\,\sqrt{-\widehat{h}'(\theta^q)k(\theta^q)}\nabla\theta^q \to \sqrt{\psi}\,\sqrt{-\widehat{h}'(\theta)k(\theta)}\nabla\theta \\ \text{слабо в} \quad L_{\sigma_{49}}(Q_T), \quad \forall\, \sigma_{49} < \frac{m+1}{m}.\end{gathered} \tag{4.48}$$

Теперь мы готовы воспользоваться Следствием 2.2, стр. 36 Теоремы 2.11, стр. 34 из [1] и заключить, что

$$\int\limits_{Q_T} \left(-\widehat{h}'(\theta)\right) k(\theta)|\nabla\theta|^2\psi\, d\boldsymbol{x}dt \leqslant \liminf_{q\to+\infty} \int\limits_{Q_T} \left(-\widehat{h}'(\theta^q)\right) k(\theta^q)|\nabla\theta^q|^2\psi\, d\boldsymbol{x}dt. \tag{4.49}$$

Правая, а следовательно и левая части (4.49) (неотрицательны и) конечны в силу того, что для всех остальных слагаемых в (4.26) получены соответствующие оценки, имеется нужный знак, и совершен предельный переход. В результате перехода в (4.26) к нижнему пределу при $q \to +\infty$ получаем

$$
\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{2} \int_{Q_T} (\rho_i + \upsilon)\widehat{Q}_i(\theta)\frac{\partial \psi}{\partial t}\, d\boldsymbol{x}dt + \sum_{i=1}^{2} \int_{Q_T} \rho_i \widehat{Q}_i(\theta)\boldsymbol{u}_i \cdot \nabla\psi\, d\boldsymbol{x}dt + \\
+ \int_{Q_T} \widehat{\mathcal{K}}(\theta)\Delta\psi\, d\boldsymbol{x}dt - \delta \int_{Q_T} \widehat{h}(\theta)\theta^{m+1}\psi\, d\boldsymbol{x}dt \leqslant \\
\leqslant (\delta - 1) \int_{Q_T} \widehat{h}(\theta) \left(\sum_{i=1}^{2} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) \right) \psi\, d\boldsymbol{x}dt - \\
-a \int_{Q_T} \widehat{h}(\theta)|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2 \psi\, d\boldsymbol{x}dt - \int_{Q_T} \widehat{h}(\theta)\rho g^{\delta}\psi\, d\boldsymbol{x}dt + \\
+ \int_{Q_T} \theta\widehat{h}(\theta) \sum_{i=1}^{2} p_{\theta i}(\rho_i)\,(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i)\psi\, d\boldsymbol{x}dt + \int_{Q_T} k(\theta)\widehat{h}'(\theta)|\nabla\theta|^2\psi\, d\boldsymbol{x}dt - \\
- \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} (\rho_{0i}^{\delta} + \upsilon)\widehat{Q}_i(\theta_0^{\delta})\psi|_{t=0}\, d\boldsymbol{x} + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \widehat{h}(\theta)L^{\delta}(t, \boldsymbol{x}, \theta)\psi\, d\sigma dt + \\
+\varepsilon \sum_{i=1}^{2} \int_{Q_T} \nabla\rho_i \cdot \nabla\left(\left(\widehat{Q}_i(\theta) - \widehat{h}(\theta)Q_i(\theta) \right)\psi \right)\, d\boldsymbol{x}dt
\end{gathered} \tag{4.50}
$$

для всех функций ψ удовлетворяющих условиям, перечисленным в (4.25).

4.7. **Энергетическое неравенство.** Последним этапом в разделе 4 является получение энергетического неравенства для предельных функций ρ_i, $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, 2$, θ. Для этого возьмем в слабой формулировке (2.6) в качестве пробной функции произвольную $\chi \in C_0^1[0, T)$, а в (2.15) положим $\boldsymbol{\varphi}_i = \chi\boldsymbol{u}_i^q$, $i = 1, 2$, и получим (с учетом (2.2), (2.3)) после интегрирования и суммирования равенство

$$
\begin{gathered}
- \sum_{i=1}^{2} \int_{Q_T} \left(\frac{1}{2}\rho_i^q|\boldsymbol{u}_i^q|^2 + \rho_i^q P_{ei}(\rho_i^q) + (\rho_i^q + \upsilon)Q_i(\theta^q) \right) \frac{d\chi}{dt}\, d\boldsymbol{x}dt + \\
+\delta \sum_{i=1}^{2} \int_{Q_T} \mathbb{S}_i^q : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i^q)\chi\, d\boldsymbol{x}\, dt + \varepsilon \sum_{i=1}^{2} \int_{Q_T} \frac{{p_{ei}}'(\rho_i^q)}{\rho_i^q}|\nabla\rho_i^q|^2\chi\, d\boldsymbol{x}\, dt + \\
+\delta \int_{Q_T} (\theta^q)^{m+1}\chi\, d\boldsymbol{x}\, dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} L^{\delta}(t, \boldsymbol{x}, \theta^q)\chi\, d\sigma\, dt = \int_{Q_T} \rho^q g^{\delta}\chi\, d\boldsymbol{x}\, dt +
\end{gathered} \tag{4.51}
$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_T}\rho_i^q\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{u}_i^q\chi\,d\boldsymbol{x}\,dt+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\Big(\frac{1}{2}\rho_{0i}^{\delta}|\boldsymbol{u}_{0i}|^2+\rho_{0i}^{\delta}P_{ei}\left(\rho_{0i}^{\delta}\right)+$$

$$+(\rho_{0i}^{\delta}+\upsilon)Q_i\left(\theta_0^{\delta}\right)\Big)\chi(0)\,d\boldsymbol{x}.$$

Пусть теперь $\chi(0)=1$, $\chi\geqslant 0$. Используя Следствие 2.2, стр. 36 Теоремы 2.11, стр. 34 из [1] и соотношения (1.17), (1.18), (1.32), (1.35), (1.44), (2.10), (3.8), (3.12), (3.22), (3.23), (3.28), (3.29), (4.35), (4.40) и (4.5), в результате перехода к нижнему пределу в (4.51) при $q\to+\infty$ приходим[14] к энергетическому неравенству

$$(4.52)\quad \begin{aligned}&-\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_T}\left(\frac{1}{2}\rho_i|\boldsymbol{u}_i|^2+\rho_iP_{ei}(\rho_i)+(\rho_i+\upsilon)Q_i(\theta)\right)\frac{d\chi}{dt}\,d\boldsymbol{x}dt+\\&+\delta\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_T}\mathbb{S}_i:(\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i)\chi\,d\boldsymbol{x}\,dt+\delta\int\limits_{Q_T}\theta^{m+1}\chi\,d\boldsymbol{x}\,dt+\\&+\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega}L^{\delta}(t,\boldsymbol{x},\theta)\chi\,d\sigma\,dt\leqslant\int\limits_{Q_T}\rho g^{\delta}\chi\,d\boldsymbol{x}\,dt+\\&+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_T}\rho_i\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{u}_i\chi\,d\boldsymbol{x}\,dt+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\Big(\frac{1}{2}\rho_{0i}^{\delta}|\boldsymbol{u}_{0i}|^2+\rho_{0i}^{\delta}P_{ei}\left(\rho_{0i}^{\delta}\right)+\\&+(\rho_{0i}^{\delta}+\upsilon)Q_i\left(\theta_0^{\delta}\right)\Big)d\boldsymbol{x},\end{aligned}$$

из которого следует[15] неравенство (для п. в. $t\in(0,T)$):

$$(4.53)\quad \begin{aligned}&\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\rho_i(t)|\boldsymbol{u}_i(t)|^2+\rho_i(t)P_{ei}(\rho_i)(t)+(\rho_i+\upsilon)(t)Q_i(\theta)(t)\right)d\boldsymbol{x}+\\&+\delta\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_t}\mathbb{S}_i:(\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i)\,d\boldsymbol{x}\,d\tau+\delta\int\limits_{Q_t}\theta^{m+1}\,d\boldsymbol{x}\,d\tau+\\&+\int\limits_0^t\int\limits_{\partial\Omega}L^{\delta}(\tau,\boldsymbol{x},\theta)\,d\sigma\,d\tau\leqslant\int\limits_{Q_t}\rho g^{\delta}\,d\boldsymbol{x}\,d\tau+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_t}\rho_i\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{u}_i\,d\boldsymbol{x}\,d\tau+\end{aligned}$$

---

[14] Для предельного перехода в интеграле, содержащем L^{δ}, воспользуемся теоремой Фату (см., например, [6], стр. 14). Конечность результата гарантируется знаком и оценками остальных интегралов. Заметим, что при выводе (4.50) предельный переход в граничном интеграле не может быть осуществлен таким же образом, ввиду другого знака перед интегралом.

[15] И наоборот, из (4.53) следует (4.52) при дополнительном ограничении $\chi'\leqslant 0$. Для доказательства достаточно умножить (4.53) на $-\chi'(t)$ и взять $\int\limits_0^T dt$.

$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\rho_{0i}^{\delta}|\boldsymbol{u}_{0i}|^2+\rho_{0i}^{\delta}P_{ei}\left(\rho_{0i}^{\delta}\right)+(\rho_{0i}^{\delta}+\upsilon)Q_i\left(\theta_0^{\delta}\right)\right)d\boldsymbol{x}.$$

В самом деле, взяв произвольное $\tau \in (0,T)$, положим

$$\chi(t)=\chi^{\omega}(t):=1-\int\limits_{-\infty}^{t}\zeta_{\omega}(s-\tau)ds$$

с $\omega < \min\{\tau, T-\tau\}$ (см. (1.52)) и устремим $\omega \to +0$, что дает (4.53) при п. в. $t := \tau$.

References

[1] E. Feireisl, *Dynamics of viscous compressible fluids*, Oxford University Press, Oxford, 2004. Zbl 1080.76001

[2] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-D existence*, Methods Appl. Anal., **20**:2 (2013), 179–196. Zbl 1290.35203

[3] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solubility of a stationary boundary-value problem for the equations of motion of a one-temperature mixture of viscous compressible heat–conducting fluids*, Izv. Math., **78**:3 (2014), 554–579. Zbl 1359.76244

[4] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Global estimates and solvability of the regularized problem of the three-dimensional unsteady motion of a viscous compressible heat-conductive multifluid*, Sib. Electron Mat. Izv., **16** (2019), 547–590. Zbl 1421.35285

[5] R.I. Nigmatulin, *Dynamics of multiphase media, Vol. 1*, Hemisphere, N.Y., 1990.

[6] A. Novotný, I. Straškraba, *Introduction to the mathematical theory of compressible flow*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, **27**, Oxford University Press, Oxford, 2004. Zbl 1088.35051

[7] K.L. Rajagopal, L. Tao, *Mechanics of mixtures*, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, **35**, World Scientific, River Edge, NJ, 1995. MR1370661

Alexander Evgenyevich Mamontov,
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,
15, Lavrent'eva ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: aem@hydro.nsc.ru

Dmitriy Alexeyevich Prokudin
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,
15, Lavrent'eva ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: prokudin@hydro.nsc.ru