S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2023) УДК 519.8
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 49K35,
90C46

ОБОБЩЕНИЕ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЛИНЕЙНОЙ МАКСИМИННОЙ ЗАДАЧЕ СО СВЯЗАННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

А.Р. МАМАТОВ

Abstract. We consider a linear maximin problem with connected variables, which is interpreted as a linear game of two persons (players), choosing their strategies alternately, first the first player, then, knowing him, the second player with opposite goals. The problem under consideration is investigated using the dual problem, which is also a linear maximin problem with bound variables. The main tool for studying the problem under consideration is the concept of support introduced by R. Gabasov and F.M. Kirillova for solving linear programming problems and further developed by him and their students for solving various optimization problems. With the help of the introduced concept of conditionally equal supports, the necessary optimality conditions are formulated and proved. These conditions can be used in the development of algorithms for solving the problem under consideration. An illustrative example is given, in which it was also possible to switch from one locally optimal strategy of the first player to another, which makes it possible to improve the value of the objective function if the condition of the proved theorem is not met.

Keywords: maximin problem, dual problem, support, optimality conditions.

Mamatov A.R., Generalization of Necessary Optimality Conditions in the Linear Maximin Problem with connected Variables.

Поступила 10 сентября 2022 г., опубликована 2023 г.

1. Введение

Наряду с общей теорией условий оптимальности в негладких задачах оптимизации [1-8], немаловажным является получение специальных условий оптимальности,учитывающих специфику задач и предназначенных для построения численных методов решения экстремальных задач [9-14].

Важным при разработке алгоритмов решения многоэкстремальных задач является составление блока алгоритма, осуществляющего переход с одного локально-оптимального плана к другому плану, позволяющий улучшить значение целевой функции.

Наряду с прямыми методами исследования экстремальных задач, важную роль играют двойственные методы [15, 16], которые позволяют осуществить переход к лучшему плану в смысле оптимизации целевой функции. Зачастую такое улучшение крайне сложно при использовании прямых методов.

Понятие двойственной задачи (двойственной полуигры) для линейной максиминной задачи со связанными переменными было введено в работе [17]. Там же было доказано, что оптимальные значения целевых функций этих задач (цены этих полуигр) совпадают. Аналогичное утверждение для линейной максиминной задачи со связанными переменными, относящееся к играм с запрещенными ситуациями [18], было доказано в [19]. В работах [9, 20] исследованы отношения между максимином и минимаксом.

Из теории двойственности линейного программирования известно [15, 16], что если при некоторых планах прямой и двойственной задач значения их целевых функций совпадают, то эти планы являются оптимальными планами этих задач соответственно. Аналогичное утверждение, для линейных максиминных задач со связанными переменными, вообще говоря, неверно. Более того, здесь не всегда можно говорить о локальной оптимальности. В работе [21] для линейной максиминной задачи со связанными переменными, доказаны теоремы, при выполнении условий которых, из совпадения значений целевых функций взаимно двойственных задач следует локальная оптимальность соответствующих стратегий (планов) первых игроков этих задач. Аналогичные теоремы для линейной максиминной задачи со связывающими ограничениями неравенствами доказаны в работе [22]. В работе [23] теоремы из работы [21] обобщены на случай необходимого условия глобальной оптимальности. В данной работе доказывается теорема, являющаяся обобщением необходимого условия оптимальности "высокого порядка"[23]. Приведен иллюстративный пример, в котором также удалось перейти с одной локально-оптимальной стратегии первого игрока к другой, позволяющий улучшить значение целевой функции.

2. Постановка задачи,необходимые сведения

На множествах

$$X = \{x \mid f_* \le x \le f^*\} \quad \text{и}$$

$$Y(x) = \{y \mid g_* \le y \le g^*, Ax + By = b\}$$

где $x = x(J), f_* = f_*(J), f^* = f^*(J) - n$ - векторы, $y = y(K), g_* = g_*(K)$, $g^* = g^*(K) - l$ - векторы, $b = b(I) - m$ - вектор, $A = A(I,J), B = B(I,K)$ - соответственно $m \times n$ и $m \times l$ матрицы; $rankB = m < l, I = \{1, 2, ..., m\}$,

$J = \{1,2,...,n\}, K = \{1,2,...,l\}, \forall x \in X, Y(x) \neq \emptyset$, рассмотрим линейную максиминную задачу со связанными переменными [17,21,23]:

$$\varphi(x) = \min_{y \in Y(x)} (c'x + d'y) \rightarrow \max_{x \in X} \tag{1}$$

Здесь $c = c(J), x = x(J) - n$ - векторы,$'$ (штрих) знак транспонирования, $x = x(J) = (x_j, j \in J)$.

Задача (1) интерпретируется как игра двух лиц (игроков), которые выбирают векторы x и y соответственно из множеств X и $Y(x)$ поочередно, сначала первый игрок выбирает x, затем, зная x, второй игрок выбирает y с целями : первого игрока - максимизировать функцию $\varphi(x), x \in X$, второго игрока - минимизировать $d'y, y \in Y(x)$.

Вектор $x \in X$ называется стратегией (планом) первого игрока.

Вектор $y \in Y(x)$ называется стратегией второго игрока, соответствующей стратегии первого игрока x (коротко, x - стратегией второго игрока).

Отметим, что слабая задача линейного двухуровневого программирования [24, 25] с одинаковыми целевыми функциями на верхнем и нижнем уровне является линейной максиминной (минимаксной) задачей со связанными переменными типа (1).

Функция $\varphi(x), x \in X$, является выпуклой и кусочно - линейной [9, 20]. Поэтому, в общем случае, задача (1) многоэкстремальна.

Стратегия $x^0 \in X$ называется оптимальной стратегией первого игрока, если для всех $x \in X$ выполняется неравенство $\varphi(x) \leq \varphi(x^0)$.

x-стратегия $y^0 \in Y(x)$ называется x-оптимальной стратегией второго игрока, если оно является решением задачи

$$d'y \rightarrow \min_{y \in Y(x)}. \tag{2}$$

Для решения задачи (1) локально-оптимальные стратегии играют важную роль.

Стратегия $x^\gamma \in X$ называется локально - оптимальной стратегией первого игрока, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих неравенству

$$\| x - x^\gamma \| < \varepsilon$$

выполняется неравенство $\varphi(x) \leq \varphi(x^\gamma)$.

Напомним, что двойственным называется метод построения оптимальных планов экстремальных задач по результатам решения вспомогательной (двойственной) задачи.

Наряду с задачей (1) рассмотрим задачу

$$\psi(\mu, s, t) = \min_{(\lambda,\nu) \in \Lambda(\mu,s,t)} (b'\mu + g'_* s - g^{*\prime} t + f^{*\prime}\lambda - f'_*\nu) \rightarrow \max_{(\mu,s,t) \in M}, \tag{3}$$

где

$$M = \{(\mu, s, t) \mid B'\mu - t + s = d; s \geq 0, t \geq 0\},$$

$$\Lambda(\mu, s, t) = \{(\lambda, \nu) \mid A'\mu - \nu + \lambda = c; \nu \geq 0, \lambda \geq 0\}.$$

Задача (3) называется двойственной к задаче (1), вектор $(\mu, s, t) \in M$ - стратегией первого игрока, а вектор $(\lambda, \nu) \in \Lambda(\mu, s, t)$ - стратегией второго игрока в задаче (3).

Отметим, что следует различать соответствующих игроков, участвующих в задачах (1) и (3).

Пусть

$$\beta = (\delta, \nabla), \delta = \delta(K) = B'\mu - d; \nabla = \nabla(J) = A'\mu - c, \tag{4}$$

коплан задачи (1) [6], построенный по компоненте μ стратегии первого игрока задачи (3), $(\mu, s, t) \in M, (\lambda, \nu) \in \Lambda(\mu, s, t)-$ стратегии игроков задачи (3), согласованные с копланом β:

$$s_k = 0, t_k = \delta_k \quad \text{если} \quad \delta_k \geq 0;$$
$$s_k = -\delta_k, t_k = 0 \quad \text{если} \quad \delta_k < 0, k \in K; \tag{5}$$

$$\nu_j = \nabla_j, \lambda_j = 0 \quad \text{если} \quad \nabla_j \geq 0;$$
$$\nu_j = 0, \lambda_j = -\nabla_j \quad \text{если} \quad \nabla_j < 0; j \in J.$$

При этом имеем [23]:

$$b'\mu + g_*'s - g^{*\prime}t = \max_{(\mu, \overline{s}, \overline{t}) \in M} (b'\mu + g_*'\overline{s} - g^{*\prime}\overline{t}),$$

$$f^{*\prime}\lambda - f_*'\nu = \min_{(\overline{\lambda}, \overline{\nu}) \in \Lambda(\mu, s, t)} (f^{*\prime}\overline{\lambda} - f_*'\overline{\nu}).$$

Поэтому, при исследовании задачи (3), достаточно рассмотреть только согласованные стратегии игроков.

Коплан β называется оптимальным (локально-оптимальным), если согласованная с ним стратегия $(\mu, s, t) \in M$ является оптимальной (локально-оптимальной) стратегией первого игрока задачи (3).

Пусть x – стратегия первого игрока в задаче (1).

Совокупность $K_{op} = K_{op}(x) = \{k_1, k_2, ..., k_m\} \subset K = \{1, 2, ..., l\}$, называется опорой [16] задачи (2), если $det B(I, K_{op}) \neq 0$.

Пара $\{\beta, K_{op}\}$ из коплана β и опоры K_{op} называется опорным копланом задачи (1). Оно считается невырожденным, если $\delta_k \neq 0, k \in K_n = K \setminus K_{op}, \nabla_j \neq 0, j \in J$.

Вектор ω, удовлетворяющий равенствам $A\chi + B\omega = b$, называется χ-псевдостратегией второго игрока в задаче (1).

По опорному коплану $\{\beta, K_{op}\}$ построим соответствующую ему стратегию первого игрока χ и χ-псевдостратегию второго игрока ω задачи (1):

$$\chi_j = f_{*j} \quad \text{при} \quad \nabla_j > 0;$$
$$\chi_j = f_j^* \quad \text{при} \quad \nabla_j < 0;$$
$$\chi_j = f_{*j} \vee f_j^* \quad \text{при} \quad \nabla_j = 0, j \in J;$$
$$\omega_k = g_{*k} \quad \text{при} \quad \delta_k < 0; \tag{6}$$

$$\omega_k = g_k^* \quad \text{при} \quad \delta_k > 0;$$
$$\omega_k = g_{*k} \vee g_k^* \quad \text{при} \quad \delta_k = 0, k \in K_n;$$
$$\omega(K_{op}) = [B(I, K_{op})]^{-1}[b(I) - A(I, J)\chi(J) - B(I, K_n)\omega(K_n)].$$

Приведем условия, при выполнении которых значения целевых функций задач (1) и (3) при стратегиях первых игроков, соответствующих опорному коплану $\{\beta, K_{op}\}$ и согласованных с копланом β, совпадают.

Теорема 1 (21)**.** *Пусть для опорного коплана $\{\beta, K_{op}\}$выполняются соотношения*

$$\omega_k = g_{*k} \quad npu \quad \delta_k < 0;$$
$$\omega_k = g_k^* \quad npu \quad \delta_k > 0; \qquad (7)$$

$$\omega_k \in [g_{*k}, g_k^*] \quad npu \quad \delta_k = 0, k \in K_{op},$$

а стратегии игроков $(\mu, s, t), (\lambda, \nu)$ согласованы с копланом β. Тогда справедливо равенство $\varphi(\chi) = \psi(\mu, s, t)$.

Ниже приводимые теоремы, основаны на формуле приращения целевой функции задачи (3).

Пусть $\{\beta, K_{op}\}-$ начальный опорный коплан, $\overline{\beta} = \beta + \Delta\beta-$ другой коплан, $(\overline{\mu} = \mu + \Delta\mu, \overline{\eta} = \eta + \Delta\eta, \overline{\xi} = \xi + \Delta\xi, \overline{s} = s + \Delta s, \overline{t} = t + \Delta t), (\overline{\lambda} = \lambda + \Delta\lambda, \overline{\nu} = \nu + \Delta\nu)-$ другие стратегии игроков задачи (3), для которых также выполняются условия согласования (5). Используя (5),(6) и $\Delta\delta' = \Delta\mu' B, \Delta\nabla' = \Delta\mu' A$ для приращения целевой функции задачи (3), имеем [23]:

$$\Delta\psi(\mu, s, t) = \sum_{k \in K_{op}} (\Delta\delta_k \omega_k + g_{*k}\Delta s_k - g_k^* \Delta t_k) +$$
$$+ \sum_{\delta_k = 0, \overline{\delta}_k < 0, k \in K_n} \overline{\delta}_k(\omega_k - g_{*k}) + \sum_{\delta_k > 0, \overline{\delta}_k < 0, k \in K_n} \overline{\delta}_k(g_k^* - g_{*k}) +$$
$$+ \sum_{\delta_k = 0, \overline{\delta}_k \geq 0, k \in K_n} \overline{\delta}_k(\omega_k - g_k^*) + \sum_{\delta_k < 0, \overline{\delta}_k \geq 0, k \in K_n} \overline{\delta}_k(g_{*k} - g_k^*) +$$
$$+ \sum_{\nabla_j = 0, \overline{\nabla}_j < 0, j \in J} \overline{\nabla}_j(\chi_j - f_j^*) + \sum_{\nabla_j > 0, \overline{\nabla}_j < 0, j \in J} \overline{\nabla}_j(f_{*j} - f_j^*) +$$
$$+ \sum_{\nabla_j = 0, \overline{\nabla}_j \geq 0, j \in J} \overline{\nabla}_j(\chi_j - f_{*j}) + \sum_{\nabla_j < 0, \overline{\nabla}_j \geq 0, j \in J} \overline{\nabla}_j(f_j^* - f_{*j}) \qquad (8).$$

Приведем условия, при выполнении которых, из совпадения значений целевых функций взаимно двойственных задач (1) и (3), следует локальная оптимальность соответствующих стратегий первых игроков этих задач.

Теорема 2 (21)**.** *Пусть $\{\beta, K_{op}\}-$ невырожденный опорный коплан, а χ и ω соответствующие ему стратегия первого игрока и χ-псевдостратегия второго игрока задачи (1). Для локальной оптимальности коплана β необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (7). Стратегия χ в этом случае является локально-оптимальной стратегией первого игрока в задаче (1).*

Теорема 3 (21)**.** *Пусть $\{\beta, K_{op}\}$ - опорный коплан, для которого $\delta(K_{op}) = 0$, а χ и ω соответствующие ему стратегия первого игрока и χ-псевдостратегия второго игрока задачи (1). Если $\omega_k \in (g_{*k}, g_k^*), k \in K_{op}$, то χ является локально-оптимальной стратегией первого игрока в задаче (1), а $\beta-$ локально-оптимальным копланом.*

Для формулировки теоремы, являющейся обобщением теоремы 3 на случай необходимого условия глобальной оптимальности, рассмотрим понятие условно-соседних опор и лучшей опоры относительно другой опоры.

По опоре K_{op} построим вектор $\mu(I)$ следующим образом:

$$\mu'(I) = d'(K_{op})[B(I, K_{op})]^{-1}. \tag{9}$$

Значение целевой функции задачи (3), вычисленное с помощью опоры K_{op} по формулам (4),(5), (9) обозначим через $\psi((\mu, s, t) \mid K_{op})$ [23].

Опоры K^1_{op}, K^2_{op} называются условно-соседними, если они отличаются на один элемент [23].

Пусть K^1_{op}, K^2_{op} условно-соседние опоры, $(\mu^1, s^1, t^1), (\mu^2, s^2, t^2)$ - соответствующие им стратегии первого игрока задачи (3).

Опора K^1_{op} называется лучшей по отношению к опоре K^2_{op} [23], если

$$\psi((\mu^1, s^1, t^1) \mid K^1_{op}) > \psi((\mu^2, s^2, t^2) \mid K^2_{op}).$$

Теорема 4. (Необходимые условия оптимальности "высокого порядка") [23]. *Пусть $\{\beta, K_{op}\}$ - опорный коплан задачи (1), для которого $\delta(K_{op}) = 0$, а χ и $\omega-$ соответствующие ему стратегия первого игрока и χ-псевдостратегия второго игрока задачи (1). Для оптимальности коплана β необходимо следующее:*

1) выполнение соотношения (7).

2) для опоры K_{op} не должны существовать условно-соседние лучшие опоры.

3. Обобщение необходимых условий оптимальности "высокого порядка"

Для формулировки теоремы, являющейся обобщением теоремы 4, введем понятие условно-равных опор.

Определение 1. Условно-соседние опоры K^1_{op}, K^2_{op} назовём условно-равными, если

$$\psi((\mu^1, s^1, t^1) \mid K^2_{op}) = \psi((\mu^2, s^2, t^2) \mid K^2_{op}).$$

Теорема 5. (Обобщение необходимых условия оптимальности "высокого порядка"). *Пусть $\{\beta, K_{op}\}$ - опорный коплан задачи (1)($\delta := \Delta, \Delta(K_{op}) = 0$), а χ и ω соответствующие ему стратегия первого игрока и χ - псевдостратегия второго игрока задачи (1). Для оптимальности коплана β необходимо следующее:*

1. Выполнение соотношения (7).

2. Для опоры K_{op} и/или для условно-равных к ней опор (если такие имеются) не должны существовать условно-соседние лучшие опоры.

Доказательство. Рассмотрим два случая:1. Для опоры K_{op} не существуют условно-равные опоры; 2.Для опоры K_{op} существуют условно-равные опоры.

В первом случае справедливость теоремы вытекает из теоремы 4.

Рассмотрим теперь второй случай. Предположим противное. Пусть $\{\beta, K_{op}\}$-опорный коплан задачи (1), где β оптимальный коплан, но условия теоремы не выполняются. Для определенности пусть для опоры K^1_{op}, условно-равной опоре K_{op} существует условно-соседняя лучшая опора K^2_{op}. Это означает, что имеет место неравенство

$$\psi((\mu^2, s^2, t^2) \mid K^2_{op}) > \psi((\mu^1, s^1, t^1) \mid K^1_{op}),$$

которое противоречит оптимальности коплана β. $\square$

4. Пример

Рассмотрим задачу (1) при следующих значениях параметров:

$$c = -1, f_* = -10, f^* = 3, d' = (-2; 1; 0; 0; 0),$$

$$g'_* = (0; 0; 0; 0; 0), g^{*\prime} = (6; 7; 100; 100; 100),$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b' = (4; 10; 5).$$

Стратегия $x^0 = 3$ являетя локально-оптимальной стратегией первого игрока, которая идентифицирована с помощью пакета x^0-оптимальных опор $K^p_{op}(x^0) = \{\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$ (Теорема 4 [23]).

При невырожденном опорном коплане $\{\beta, K^1_{op}\}, \beta = (\delta, \nabla), \delta' = (1; 0; 0; 0; -1), \nabla = -1, \mu' = (0; 0; -1), K^1_{op} = \{2,3,4\}$, условия теоремы 2 выполняются,т.е.

$$\omega_2 = 7 \in [0; 7] \quad \text{при} \quad \delta_2 = 0; \omega_3 = 0 \in [0; 100] \quad \text{при} \quad \delta_3 = 0;$$

$$\omega_4 = 0 \in [0; 100] \quad \text{при} \quad \delta_4 = 0.$$

Значит, коплан β является локально-оптимальным. При этом

$$\psi((\mu, s, t) \mid K^1_{op}) = -8, \chi = 3, \omega' = (6; 7; 0; 0; 0).$$

Для опорного коплана $\{\beta, K^1_{op}\}$ условия теоремы 4 также выполняются. Но коплан β не является оптимальным, поскольку условия 2) теоремы 5 не выполняются. Т.е.:

а) опоры $K^1_{op} = \{2,3,4\}, K^2_{op} = \{1,2,3\}, K^3_{op} = \{1,3,4\}$ являются взаимно условно-равными опорами:
$\psi((\mu^1, s^1, t^1) \mid K^1_{op}) = \psi((\mu^2, s^2, t^2) \mid K^2_{op}) = \psi((\mu^3, s^3, t^3) \mid K^3_{op}) = -8;$

б) по отношению к опорам $K^2_{op} = \{1,2,3\}, K^3_{op} = \{1,3,4\}$ существует лучшая опора $K^4_{op} = \{1,3,5\}$:

$$\psi((\mu^4, s^4, t^4) \mid K^4_{op}) > \psi((\mu^2, s^2, t^2) \mid K^2_{op}), \psi((\mu^4, s^4, t^4) \mid K^4_{op}) = 10.$$

Используя формулу (8) с локально-оптимальной стратегии первого игрока $(\mu, s, t), \mu' = (0; 0; -1), t' = (1; 0; 0; 0; 0), s' = (0; 0; 0; 0; 1)$ можно перейти к стратегии первого игрока $(\mu^4, s^4, t^4), \mu^{4\prime} = (0; -2; 0), s^{4\prime} = (0; 3; 0; 2; 0), t^{4\prime} = (0; 0; 0; 0; 0)$. Для опорного коплана $\{\beta, K^4_{op}\}, \beta = (\delta, \nabla), \delta' = (0; -3; 0; -2; 0), \nabla = 3, \mu^{4\prime} = (0; -2; 0), K^4_{op} = \{1,3,5\}, \chi = -10, \omega' = (0; 0; 14; 0; 25)$ условия теоремы 5 выполняются. При этом коплан β является оптимальным, в чем можно убедиться, решая задачу алгоритмом, предложенным в работе [26].

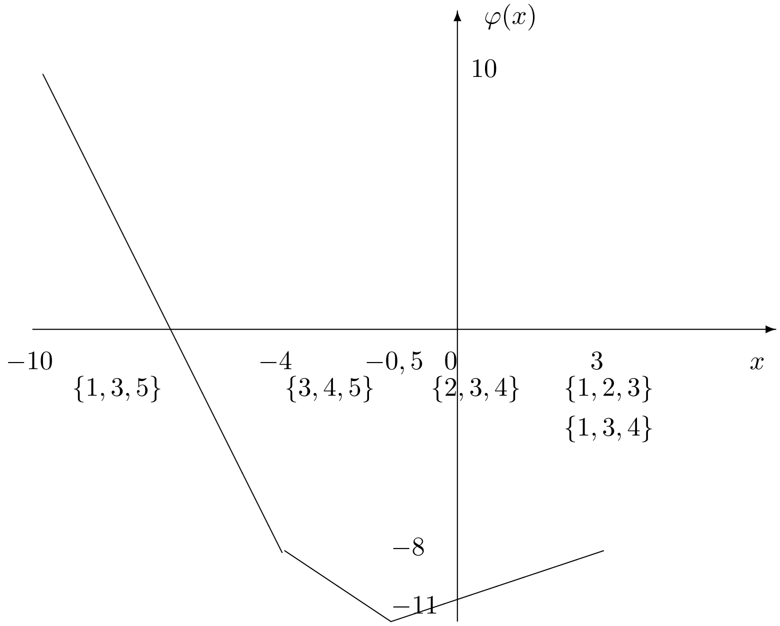

Рис.1.

На рисунке 1 приведены x-оптимальные опоры (при $x = 3$ x-оптимальные опоры: $\{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}$) и соответствущие этим опорам области, а также график функции $\varphi(x), x \in X = [-10, 3] : \varphi(x) = -20-3x, x \in [-10; -4]; \varphi(x) = -12 - x, x \in [-4; -1/2]; \varphi(x) = -11 + x, x \in [-1/2, 3]$.

5. Заключение

В работе для линейной максиминной задачи со связанными переменными доказана теорема, являющаяся обобщением необходимого условия оптимальности "высокого порядка"[23]. Приведен иллюстративный пример, в котором также удалось перейти с одной локально-оптимальной стратегии первого игрока к другой, позволяющей улучшить значение целевой функции при невыполнении условий теоремы 5. На основе теоремы 5 могут быть разработан алгоритм решения задачи (1).

References

[1] B.N.Pshenychnyi, *Necessary conditions for extremum*,Moscow: Nauka, 1982.

[2] N.Z.Shor, *Methods of minimization of undifferentiated functions and their applications*,Kiev., Naukova dumka, 1979.

[3] B.Sh.Mordukhovich, *On necessary conditions for an extremum in nonsmooth optimization*, English transl. in Soviet Math. Dokl.,**32** (1985), 215–220.

[4] F.Clark, *Optimization and and Nonsmooth Analysis*, Wiley, 1983.

[5] V.F. Demyanov, A.M. Rubinov *Foundations of nonsmooth analysis and quasi-differential calculus*,Moscow: Nauka, 1990.

[6] B.B. Gorokhovik, *Condensed and nonsmooth vector optimization problems*, Minsk: Navyka i tekhnika, 1990.

[7] V.F. Demyanov, *Conditions of extremum and variation tasks*, SPb .: Research Institute of Chemistry SPbSU, 2000.

[8] A. D.Ioffe, *On necessary conditions for a minimum*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, **19**:4 (2014), 121–152.

[9] V.V. Fedorov, *Numerical methods of maximin*, - Moscow: Nauka, 1979.

[10] R.Gabasov, E.I.Shilkina, *Direct exact method for solving one class of minimax problems*, Dokl. Academy of Sciences of the BSSR, **25**:11 (1981), 971–973.

[11] I. Azizov, *A Finite Algorithm for Linear Maxmin Problem with Coupled Variables and Numerical Results*, Preprint No. 18(203) (Institute of Mathematics, Belarussian Academy of Sciences, Minsk, 1984).

[12] G.Sh.Tamasyan, G.S.Shulga, M.V.Udot, *On the problem of the sum of modules of affine functions*, Control processes and stability, **6**:22 (2019), 471–475.

[13] E.A.Kostina, *Algorithms for solving nonsmooth problems of minimax type: abstract of thesis. ... Candidate of Physical and Mathematical Sciences: 01.01.09*, Institute of Mathematics. - Minsk, 1990 .

[14] L.N.Polyakova, *Development of mathematical theory and numerical methods for solving some classes of nonsmooth optimization problems: abstract of dissertation. ... Doctor of Physical and Mathematical Sciences*, St. Petersburg State University, 1998.

[15] E.G.Golshtein, *Duality theory in mathematical programming and its applications*, Moscow: Nauka, 1971.

[16] R.Gabasov, F.M.Kirillova, A. I.Tyatyushkin, *Constructive optimization methods. Part 1.Linear problems*,-Minsk: Universitetskoe. 1984.

[17] Yu.P.Ivanilov, *Dual semigames*, Izvestiya AN SSSR. Technical cybernetics, **4** (1972), 3–9.

[18] Y.B.Germeyer, *Games with non-opposite interests*, Moscow: Nauka,1976.

[19] D.D.Lozovanu, *Maxmin Problems with Coupled Variables and Their Application For the Investigation and Solution of Cyclic Games*, Izv. Akad. Nauk Moldavskoi SSR. Mat., **2** (1990), 22–29.

[20] J.E. Falk, *Linear max-min problem*,Math. prog.,**5**:2 (1973), 169–188.

[21] A.R.Mamatov, *Dual algorithm for calculating the local optimum one maximin problem with connected variables*, Uzbek journal Problems of Informatics and Energy., **1** (2000), 7–12.

[22] A.R.Mamatov, *On theory of the duality linear maximin problems with connected variables*, Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci., **10**:2 (2007), 187–193.

[23] A.R.Mamatov, *High-Order Necessary Optimality Conditions in a Linear Maxmin Problem with Coupled Variables*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **50**:6 (2010), 1017–1022. https://doi.org/10.1134/S0965542510060047

[24] Liu June, Hong Yunfei, Zheng Yue, *A New Variant of Penalty Method for Weak Linear Bilevel Programming Problems*,Wuhan University Journal of Natural Sciences, **23**:4 (2018), 328–332. https://doi.org/10.1007/s11859-018-1330-1

[25] LIU June, HONG Yunfei, ZHENG Yue, *Branch and Bound-Based Algorithm for the Weak Linear Bilevel Programming Problems*, Wuhan University Journal of Natural Sciences, **23**:6 (2018), 480–486. https://doi.org/10.1007/s11859-018-1352-8

[26] A. R.Mamatov, *An Algorithm for Solving a Two-Person Game with Information Transfer*, Computational Mathematics an Mathematical Phusics, **46**:10 (2006), 1699–1704. https://doi.org/10.1134/S0965542506100071

Akmal Ravshanovich Mamatov
Samarkand State University named after Sh.,Rashidova,
Unversitet bolevard, 15,
140104, Samarkand, Uzbekistan
Email address: `akmm1964@rambler.ru`