

УДК 534.232;550. 834

**Возбуждение сейсмоакустических волн сингулярным источником,
действующим на границе жидкого слоя и пороупругого
полупространства**

Имомназаров Х.Х.¹, Михайлов А.А.¹, Гозиев К.С.², Омонов А.Т.³

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия, email: imom@omzg.sccc.ru

² Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан

³ Ташкентский государственный экономический университет (ТГЭУ), Ташкент, Узбекистан

Аннотация: Рассматриваются результаты моделирования распространения сейсмоакустических волн на основе численного решения прямой динамической задачи для пористой среды. Распространение сейсмических волн в пористой среде насыщенной флюидом при отсутствии потери энергии описывается системой дифференциальных уравнений первого порядка в Декартовой системе координат. Исходная система записывается в виде гиперболической системы в терминах скоростей упругой вмещающей среды, скорости насыщающей жидкости, компонент тензора напряжений и давления жидкости. Для численного решения поставленной задачи используется метод комплексирования интегрального преобразования Лагерра по времени с конечно-разностной аппроксимацией по пространственным координатам. Используемый алгоритм решения позволяет эффективно проводить расчёты при моделировании в сложно-построенной пористой среде и исследовать возникающие в таких средах волновые эффекты.

Ключевые слова: пороупругость, сейсмоакустическая волна, волна Рэлея, волна Стоунли, сингулярный источник.

Введение

Изучение взаимосвязей между волновыми процессами, происходящими в различных слоях Земли, является одним из важнейших направлений в геофизике. Значительный интерес представляют волны низких частот в задачах гидроакустики, что связано с особенностями их распространения:

начиная с определенного соотношения между длиной упругой волны и глубиной бассейна волны распространяются не только в водной толще океана, но и в его поддонных слоях. При этом часть излучаемой волновой энергии уносится поверхностными волнами на границе раздела этих сред. Увеличение числа исследуемых типов волн, характеризующихся разными скоростями распространения, существенно расширяет возможности дистанционного акустического мониторинга, как характеристик источников излучения, так и параметров водного и поддонных слоев. На практике это необходимо для решения многих задач, таких как сейсмическая разведка и предсказание землетрясений и цунами. В первую очередь, значительный интерес представляет исследование возбуждения сейсмическими источниками акустических волн в океане с целью выявления на основе анализа волновых полей признаков назревающего подводного землетрясения [1].

Важные для практики вопросы теории взаимодействия акустических и сейсмических волн возникают уже в рамках простых моделей, например, когда океан представляется однородным жидким слоем, покрывающим однородное изотропное пористое полупространство. Рассмотрение таких моделей позволяет детально изучить возбуждение и распространение различных типов объемных и поверхностных волн и получить относительно простые аналитические выражения для волновых полей и энергетических характеристик сейсмо-акустического излучения. Кроме того, результаты анализа моделей сред с небольшим числом однородных слоев необходимы для контроля правильности работы алгоритмов решения более сложных задач расчета волновых полей в слоистых средах. Задача о распространении волн в жидком слое, лежащем на упругом полупространстве, для случаев гармонических монополюсного (типа пульсирующей сферы) и дипольного (две близко расположенные пульсирующие в противофазе сферы) звуковых источников решалась соответственно в работах [2] и [3]. В указанных работах рассмотрена ситуация, когда толщина слоя очень мала по сравнению с длинами излучаемых волн. Для данного предельного случая вычислены мощности излучения продольной и поперечной волн в твердой среде, а также поверхностной волны Рэлея, в которую при малой толщине слоя переходит фундаментальная мода.

Известно, что многие породы являются пористыми с различными свойствами пористостью и проницаемостью. Следовательно, распространяющиеся сейсмические волны в таких средах являются затухающими, что соответствует экспериментальным данным. При этом базовые математические модели фильтрации дополняются уравнением упругости Ламе для скорости перемещений среды. Важнейшей особенностью математических моделей пороупругости является сильная связь между уравнениями модели. Так, уравнение упругости включает объемную силу,

которая пропорциональна градиенту давления, а уравнение фильтрации, в свою очередь, содержит сжимаемость среды пропорциональную дивергенции скорости перемещений в обратимом гидродинамическом приближении.

В данной работе исследуются результаты численного моделирования распространения сейсмоакустических волн от сингулярного источника. Решена задача о возбуждении сейсмоакустических волн в системе однородное изотропное пористое полупространство, покрытое жидким слоем, при действии на поверхность пористой среды перпендикулярного к ней сингулярного источника. Детально проанализировано возбуждение мод с помощью численного моделирования. Обнаружено отличие распределения энергии между разными типами волн в случае присутствия пористой среды в зависимости от точки расположения источника.

1. Постановка задачи

Пусть полуплоскость $x_2 > 0$ заполнена пористой средой насыщенной жидкостью. Тогда распространение сейсмических волн в данной среде при отсутствии потери энергии описывается следующей начально-краевой задачей [4-7, 10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_{0,s}} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} &= F_i, \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} &= F_i, \\ \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial t} + \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \left(\frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} K - \frac{2}{3} \mu \right) \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{u} - \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0} K \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} - (K - \alpha \rho_0 \rho_{0,s}) \operatorname{div} \vec{u} + \alpha \rho_0 \rho_{0,l} \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \\ u_i|_{t=0} = v_i|_{t=0} = \sigma_{ik}|_{t=0} = p|_{t=0} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\sigma_{22} + p|_{x_2=0} = \sigma_{12}|_{x_2=0} = \frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} p \Big|_{x_2=0} = 0, \quad (3)$$

где $\vec{u} = (u_1, u_2)$ и $\vec{v} = (v_1, v_2)$ - вектора скорости упругого пористого тела с парциальной плотностью $\rho_{0,s}$ и жидкости с парциальной плотностью $\rho_{0,l}$ соответственно, p - поровое давление, σ_{ik} - тензор напряжений, $\vec{F} = (F_1, F_2)$ - вектор массовых сил, $\rho_0 = \rho_{0,l} + \rho_{0,s}$, $\rho_{0,s} = \rho_{0,s}^f (1 - d_0)$, $\rho_{0,l} = \rho_{0,l}^f d_0$, $\rho_{0,s}^f$ и $\rho_{0,l}^f$ - физические плотности упругого пористого тела и жидкости соответственно, d_0 - пористость, δ_{ik} - символ Кронекера, $K = \lambda + 2\mu/3$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$ коэффициенты Ламе, $\alpha = \rho_0 \alpha_3 + K/\rho_0^2$, $\rho_0^3 \alpha_3 > 0$ - модуль объемного сжатия жидкой компоненты гетерофазной среды. Упругие

модули K , μ , α_3 выражаются через скорость распространения поперечной волны c_s и две скорости продольных волн c_{p_1}, c_{p_2} следующими формулами [11, 12]:

$$\begin{aligned}\mu &= \rho_{0,s} c_s^2, \\ K &= \frac{\rho_0 \rho_{0,s}}{2 \rho_{0,l}} \left(c_{p_1}^2 + c_{p_2}^2 - \frac{8 \rho_{0,l}}{3 \rho_0} c_s^2 - \sqrt{\left(c_{p_1}^2 - c_{p_2}^2 \right)^2 - \frac{64 \rho_{0,l} \rho_{0,s}}{\rho_0^2} c_s^4} \right), \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2 \rho_0^2} \left(c_{p_1}^2 + c_{p_2}^2 - \frac{8 \rho_{0,s}}{3 \rho_0} c_s^2 + \sqrt{\left(c_{p_1}^2 - c_{p_2}^2 \right)^2 - \frac{64 \rho_{0,l} \rho_{0,s}}{\rho_0^2} c_s^4} \right).\end{aligned}$$

2. Алгоритм решения

Для решения поставленной задачи (1)-(3) применим интегральное преобразование Лагерра по времени [8, 9]:

$$\vec{W}_m(x_1, x_2) = \int_0^{\infty} \vec{W}(x_1, x_2, t)(ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_m^{\alpha}(ht) d(ht), \quad (4)$$

с формулами обращения

$$\vec{W}(x_1, x_2, t) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{(m+\alpha)!} \vec{W}_m(x_1, x_2) l_m^{\alpha}(ht), \quad (5)$$

где $l_m^{\alpha}(ht)$ - функции Лагерра.

В результате данного преобразования исходная задача (1)-(3) сводится к двумерной пространственной дифференциальной задаче в спектральной области.

$$\begin{aligned}\frac{h}{2} u_i^m + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \sigma_{ik}^m}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P^m}{\partial x_i} &= f_i^m - h \sum_{n=0}^{m-1} u_i^n, \\ \frac{h}{2} v_i^m + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P^m}{\partial x_i} &= f_i^m - h \sum_{n=0}^{m-1} v_i^n,\end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{h}{2} P^m - \left(K - \alpha \rho_0 \rho_s \right) \operatorname{div} \vec{u}^m + \alpha \rho_0 \rho_l \operatorname{div} \vec{v}^m = -h \sum_{n=0}^{m-1} P^n,$$

$$\sigma_{22}^m + P^m \Big|_{x_2=0} = \sigma_{12}^m \Big|_{x_2=0} = \frac{\rho_l}{\rho_0} P^m \Big|_{x_2=0} = 0.$$

Для решения приведённой задачи воспользуемся конечно-разностной аппроксимацией производных по пространственным координатам на

сдвинутых сетках с 4-ым порядком точности. Для этого, в расчетной области введем в направлении координаты $z = x_1$ сетки ω_{z_1} и $\omega_{z_{1/2}}$ с шагом дискретизации Δz , сдвинутые относительно друг друга на $\Delta z/2$:

$$\omega_{z_1} = (x, j\Delta z, t), \quad \omega_{z_{1/2}} = (x, j\Delta z + \frac{\Delta z}{2}, t), \quad j = 0, \dots, M.$$

Аналогично, введем в направлении координаты $x = x_2$ сетки ω_{x_1} и $\omega_{x_{1/2}}$ с шагом дискретизации Δx , сдвинутые относительно друг друга на $\Delta x/2$:

$$\omega_{x_1} = (i\Delta x, z, t), \quad \omega_{x_{1/2}} = (i\Delta x + \frac{\Delta x}{2}, z, t), \quad i = 0, \dots, N.$$

На данных сетках введем операторы дифференцирования D_x и D_z , аппроксимирующие производные $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$ с четвертым порядком точности по координатам $z = x_1$ и $x = x_2$:

$$D_x u(x, z) = \frac{9}{8\Delta x} \left[u(x + \frac{\Delta x}{2}, z) - u(x - \frac{\Delta x}{2}, z) \right] - \frac{1}{24\Delta x} \left[u(x + \frac{3\Delta x}{2}, z) - u(x - \frac{3\Delta x}{2}, z) \right],$$

$$D_z u(x, z) = \frac{9}{8\Delta z} \left[u(x, z + \frac{\Delta z}{2}) - u(x, z - \frac{\Delta z}{2}) \right] - \frac{1}{24\Delta z} \left[u(x, z + \frac{3\Delta z}{2}) - u(x, z - \frac{3\Delta z}{2}) \right].$$

Определим искомые компоненты вектора решения в следующих узлах сеток:

$$u_1^m(x, z), v_1^m(x, z) \in \omega_{x_1} \times \omega_{z_1},$$

$$u_2^m(x, z), v_2^m(x, z) \in \omega_{x_{1/2}} \times \omega_{z_{1/2}},$$

$$\sigma_{11}^m(x, z), \sigma_{22}^m(x, z), P^m(x, z) \in \omega_{x_{1/2}} \times \omega_{z_1},$$

$$\sigma_{12}^m(x, z) \in \omega_{x_1} \times \omega_{z_{1/2}}.$$

В результате конечно-разностной аппроксимации задачи (6) получим систему линейных алгебраических уравнений. Представим искомый вектор решения \vec{W} в следующем виде:

$$\vec{W}(m) = (\vec{V}_0(m), \vec{V}_1(m), \dots, \vec{V}_{M+N}(m))^T,$$

$$\vec{V}_{i+j} = (u_1^{i,j}, u_2^{i+1/2, j+1/2}, v_1^{i,j}, v_2^{i+1/2, j+1/2}, \sigma_{11}^{i+1/2, j}, \sigma_{22}^{i+1/2, j}, \sigma_{12}^{i, j+1/2}, P^{i+1/2, j})^T.$$

Тогда, данная система линейных алгебраических уравнений в векторной форме может быть записана как:

$$(A_\Delta + \frac{h}{2} E) \vec{W}(m) = \vec{F}_\Delta(m-1).$$

В результате, матрица системы сведённой задачи имеет хорошую обусловленность, что позволяет использовать быстрые методы решения систем линейных алгебраических уравнений на основе итерационных

методов, типа сопряжённых градиентов, сходящиеся к решению с требуемой точностью всего за несколько итераций.

3. Численные результаты

В данной работе рассматриваются результаты численного моделирования распространения сейсмоакустических волн в системе однородное изотропное пористое полупространство, покрытое жидким слоем. Моделировалось возбуждение сейсмоакустических волн от сингулярного источника расположенного на границе пористой среды и водного слоя и действующего перпендикулярно к границе раздела. Физические характеристики среды были заданы следующими:

1) верхний слой (вода) – $\rho = 1 \text{ г/см}^3$, $c_p = 1.5 \text{ км/сек}$, $c_s = 0$;

2) нижнее полупространство – $\rho_{0,s}^f = 2 \text{ г/см}^3$, $\rho_{0,l}^f = 1 \text{ г/см}^3$, $c_{p1} = 2 \text{ км/сек}$,
 $c_{p2} = 0.5 \text{ км/сек}$, $c_s = 1.3 \text{ км/сек}$, $d = 0.1$.

Толщина верхнего водного слоя - 3 км. Волновое поле моделировалось от точечного источника типа вертикальная сила, расположенного на границе водного слоя и пористого полупространства. Временной сигнал в источнике задавался в виде:

$$f(t) = \exp\left(-\frac{2\pi f_0(t-t_0)^2}{\gamma^2}\right) \sin(2\pi f_0(t-t_0)),$$

где $\gamma = 4$, $f_0 = 10 \text{ Гц}$, $t_0 = 0.15 \text{ сек}$.

На рисунке 1 представлены мгновенные снимки волнового поля для вертикальной компоненты скорости смещений $u_z(x, z)$ в фиксированный момент времени при $T = 2 \text{ сек}$. Координаты точки источника $x_0 = 4 \text{ км}$, $z_0 = 3 \text{ км}$. Представлены снимки волнового поля для двух вариантов характеристики нижнего полупространства - в случае упругой(слева) и пористой(справа) среды. Из рисунка видно, что при возбуждении волн источником, расположенным на границе раздела, образуются соответствующие типы волн для упругой и пористой среды. В случае пористой среды – две продольных волны(быстрая и медленная) и поперечная волна. А по нижней границе водного слоя распространяется волна Стоунли, которая в пористой среде генерирует коническую медленную продольную волну.

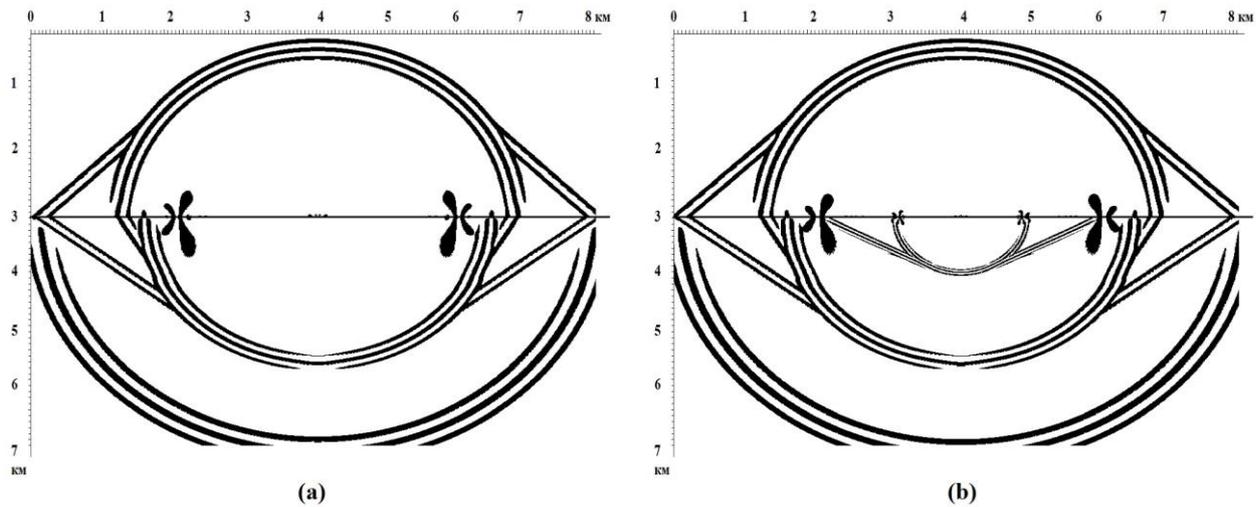


Рис. 1. Мгновенные снимки волнового поля для $u_z(x, z)$ компоненты в момент времени $T = 2$ секунды. Слева (a) нижнее полупространство – упругая среда, справа (b) – пористая среда.

На рисунке 2 представлены мгновенные снимки волнового поля для вертикальной компоненты скорости смещений $u_z(x, z)$ в фиксированный момент времени при $T = 2$ сек для двух случаев координат точек расположения источника. Слева (a) – источник расположен в воде на 10 метров выше границы раздела. Справа (b) – источник в пористой среде на 10 метров ниже границы. Из рисунка видно, что глубина проникновения волн Стоунли в слои выше и ниже границы больше в случае расположения источника в воде, а значит больше начальная амплитуда генерации этих волн. Граница раздела воды и пористой среды изображена на рисунке сплошной горизонтальной линией. При удалении точки возбуждения волн от границы раздела сред амплитуда генерируемых волн Стоунли значительно уменьшается.

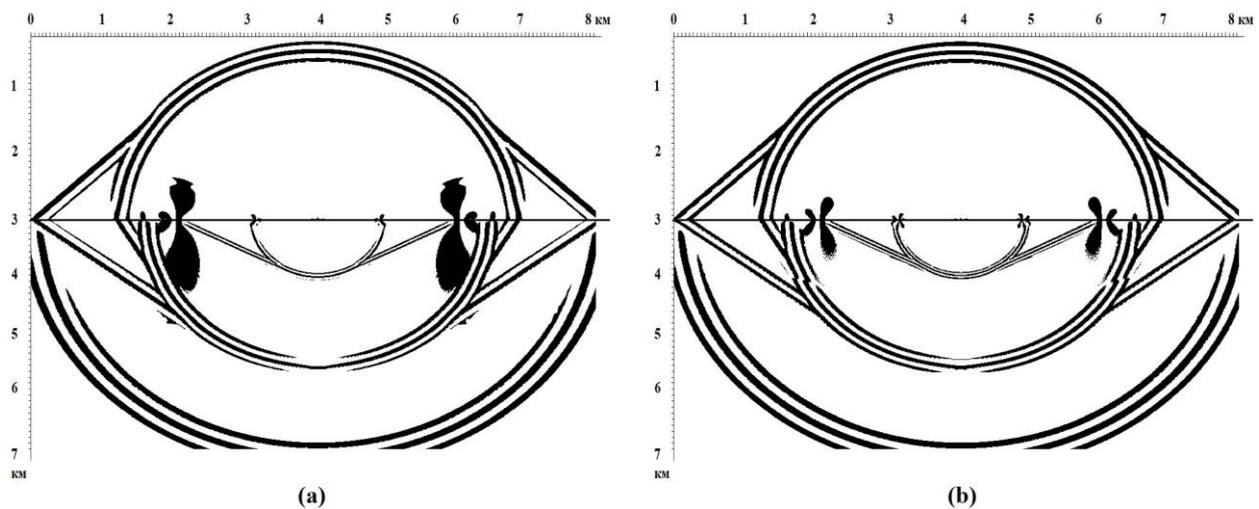


Рис 2. Мгновенные снимки волнового поля для $u_z(x, z)$ компоненты в момент времени $T = 2$ секунды. Слева (a) – источник в воде, справа (b) – источник в пористой среде.

На рисунке 3 представлены расчётные сейсмотрассы для вертикальной компоненты скорости смещений $u_z(x, z)$ для двух случаев координат точек расположения источника. Слева (a) – источник располагается на границе раздела воды и пористой среды с координатами $x_0 = 4$ км, $z_0 = 3$ км.. Справа (b) – источник в воде на 10 метров выше границы. Точки регистрации сейсмоакустических колебаний были расположены по линии проходящей перпендикулярно границе через точку расположения источника. Из представленных на рисунке сейсмотрасс видно, что амплитуда генерируемой в пористой среде медленной продольной волны больше в случае расположения источника в воде вблизи границы с пористой средой, чем в случае расположения источника на границе, так как тогда большая часть энергии заключена в быстрой продольной волне.

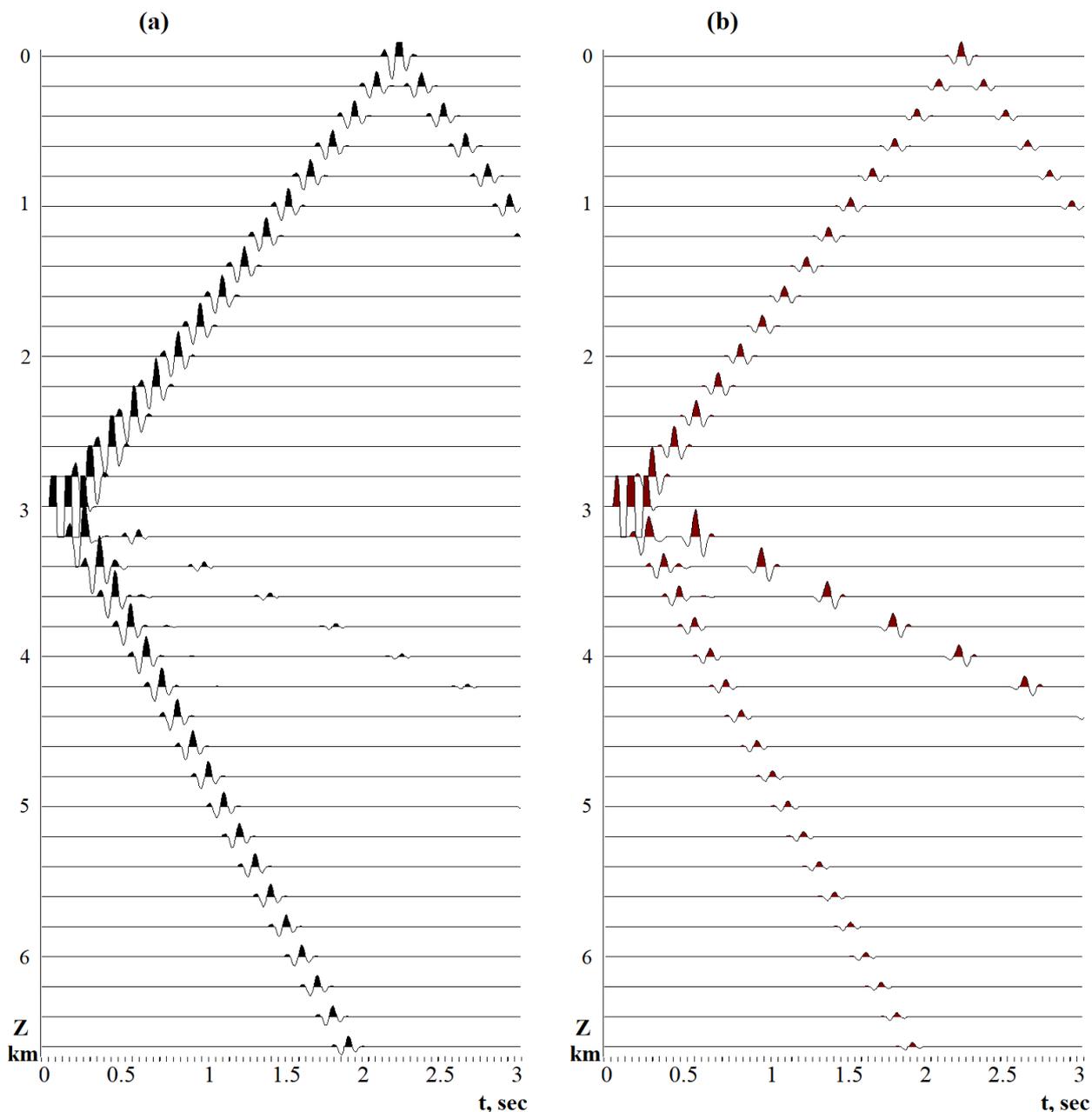


Рис 3. Сейсмограммы для компоненты $u_z(x, z)$ для двух случаев координат источника. Слева (a) – источник на границе пористой среды. Справа (b) – источник в воде на 10 метров выше границы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петухов Ю.В., Разин А.В., Разин В.А. Возбуждение сейсмоакустических волн гармоническим силовым источником, действующим на границе жидкого слоя и упругого полупространства // Акустический журнал, 2009, т. 55, № 3, С. 415-422.
2. Лапин А.Д. Волны в твердом полупространстве, покрытом жидким слоем // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 2. С. 364-367.

3. Лапин А.Д . Возбуждение волн в упругом полупространстве дипольным источником, расположенным в покрывающем слое жидкости // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 3. С. 559-562.
4. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В., Роменский Е.И. Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах // Физика горения и взрыва. 1993. № 1. С. 100–111.
5. Blokhin A.M., Dorovsky V.N. Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. Nova Science. New York. 1995.
6. Имомназаров Х.Х., Холмуродов А.Э., Омонов А.Т. Прямая и обратная динамическая задача пороупругости // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, 2022, № 75, С. 87-99.
7. Dana Bliyeva, Dossan Baigereyev and Kholmatzhon Imomnazarov Computer Simulation of the Seismic Wave Propagation in Poroelastic Medium // Symmetry. 2022; 14(8):1516.
8. Mikhailenko B.G. Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems // Applied Mathematics Letters, 1999, № 12. P. 105–110.
9. Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A., Reshetova G.V. Numerical modeling of transient seismic fields in viscoelastic media based on the Laguerre spectral method // Pure appl. geophys., 2003, № 160. P. 1207–1224.
10. Imomnazarov Kh.Kh. A Mathematical Model for the Movement of a Conducting Liquid Through a Conducting Porous Medium: I. Excitation of Oscillations of the Magnetic Field by the Surface Rayleigh Wave // Mathl. Comput. Modelling. 1996. Vol. 24, № 1. P. 79–84.
11. Имомназаров Х.Х. Несколько замечаний о системе уравнений Био // Доклады РАН. 2000, Т. 373, № 4. С. 536–537.
12. Imomnazarov Kh.Kh. Some Remarks on the Biot System of Equations Describing Wave Propagation in a Porous Medium // Appl. Math. Lett. 2000, v. 13, № 3. P. 33–35.

Imomnazarov Kh.Kh.¹, Mikhailov A.A.¹, Goziev K.S.², Omonov A.T.³

¹ Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia, email: imom@omzg.sccc.ru

² Fergana State University, Fergana, Uzbekistan

³ Tashkent State University of Economics, Tashkent, Uzbekistan

Excitation of seismoacoustic waves from a singular source acting on the boundary of a liquid layer and a poroelastic half-space

Abstract: The results of modeling the propagation of seismoacoustic waves based on the numerical solution of a direct dynamic problem for a porous medium are considered. The propagation of seismic waves in a porous medium saturated with fluid in the absence of energy loss is described by a system of differential equations of the first order in the Cartesian coordinate system. The initial system is written as a hyperbolic system in terms of the velocities of the elastic host medium, the velocity of the saturating fluid, the components of the stress tensor, and the pressure of the fluid. For the numerical solution of the problem posed, the method of complexing the integral Laguerre transform in time with a finite-difference approximation in spatial coordinates is used. The solution algorithm used makes it possible to efficiently carry out calculations when modeling in a complexly constructed porous medium and to investigate the wave effects that arise in such media.

Keywords: Poroelasticity, seismoacoustic wave, Rayleigh wave, Stoneley wave, singular source