S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том X, стр. X (2023) УДК 517.968
DOI 10.33048/semi.2023.16.xxx MSC 45D05
45D05

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ЗАДАЧИ С ЯДРАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.А.БОБОДЖАНОВ, М.А.БОБОДЖАНОВА, В.Ф. САФОНОВ

Abstract. The paper considers a system of two singularly perturbed integro-differential equations (IDEs), the first of which is a homogeneous equation, and the second is an inhomogeneous one, with an integral operator whose kernel contains the fundamental solution of the first IDE. The classical case, when the kernel depends on a rapidly changing scalar exponential, is the subject of a large number of papers (see bibliography at the end of the article). The case of the dependence of the kernel on the fundamental solutions of differential systems was studied in detail in the monograph by A.A. Bobodzhanov and V.F. Safonov "Singularly perturbed integral and integro-differential equations with rapidly changing kernels and equations with digonal degeneration of the kernel", published by Sputnik+ in 2017. As shown in this paper, the difficulty of constructing a regularized (in the sense of Lomov) asymptotics of IDEs is due to the complex structure of asymptotic solutions of fundamental solutions of homogeneous differential equations. The problem of constructing the asymptotics of the fundamental solution of a homogeneous IDE and its influence through the kernel on the regularized asymptotics of a nonhomogeneous IDE has not been studied so far. In the present work, this gap is filled. It first constructs a regularized asymptotics of the fundamental solution of a homogeneous IDE, and then develops an algorithm for constructing an asymptotic solution of a nonhomogeneous IDE. It is shown that (in contrast to the asymptotics with a kernel depending on

---

Сингулярно возмущенные задачи с ядрами, зависящими от фундаментальных решений интегро-дифференциальных уравнений .

Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект №23-21-00496).
Поступила 1 февраля 2023 г., опубликована 31 мая 2023 г.

the fundamental solution of a homogeneous differential equation), the asymptotics of the solution of an inhomogeneous IDE will contain, in addition to rapidly changing terms, also slowly changing components induced by the asymptotics of the fundamental solution.
Keywords: singularly perturbed, integro-differential equations, regularization, fundamental solution asymptotics.

1. Введение

Рассмотрим сингулярно возмущенную систему

$$\begin{array}{l} \varepsilon \frac{dV(t,s,\varepsilon)}{dt} = a\left(t\right)V\left(t,s,\varepsilon\right) + \int_s^t K_0\left(t,x\right)V\left(x,s,\varepsilon\right)dx, \\ v\left(s,s,\varepsilon\right) = 1,\ 0 \le s \le t \le 1, \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{l} \varepsilon \frac{dy(t,\varepsilon)}{dt} = b\left(t\right)y\left(t,\varepsilon\right) + \int_0^t V\left(t,s,\varepsilon\right)K\left(t,s\right)y\left(s,\varepsilon\right)ds + h\left(t\right), \\ y\left(0,\varepsilon\right) = y^0,\ 0 \le t \le 1 \end{array} \tag{2}$$

состоящую из двух интегро-дифференциальных уравнений, первое из которых описывает фундаментальное решение однородного ИДУ, а второе — неоднородное, с ядром, зависящим от фундаментального решения первого ИДУ (здесь единица в неравенстве для s и t взята ради простоты; можно было бы взять $0 \le s \le t \le T$, где T – любое фиксированное положительное число). Роль быстро убывающей экспоненты $\exp\left(\frac{1}{s}\int_s^t \mu\left(\theta\right)d\theta\right)$, которая входила в ядро интегро-дифференциальных систем ранее рассмотренных работ [2,3,6,8], в задаче (2) играет фундаментальное решение $v\left(t,s,\varepsilon\right)$ интегро-дифференциального уравнения (1). Задача (1)–(2) является обобщением сингулярно возмущенной системы уравнений

$$\begin{array}{l} \varepsilon \frac{dZ(t,s,\varepsilon)}{dt} = B\left(t\right)Z\left(t,s,\varepsilon\right),\ Z\left(s,s,\varepsilon\right) = I,\ 0 \le s \le t \le 1, \\ \varepsilon \frac{dy(t,\varepsilon)}{dt} = A\left(t\right)y\left(t,\varepsilon\right) + \int_0^t K\left(t,s\right)Z\left(t,s,\varepsilon\right)y\left(s,\varepsilon\right)ds + h\left(t\right), \\ y\left(0,\varepsilon\right) = y^0,\ 0 \le t \le 1, \end{array}$$

рассмотренной в [9], в которой первая система является дифференциальной, а не интегро-дифференциальной. Как будет показано ниже, наличие интегрального слагаемого в первом уравнении (1) приводит к тому, что в решении уравнения (2), кроме медленных составляющих, индуцирумых неоднородностью $h(t)$, будут появляться и медленные составляющие, индуцируемые ядром $K_0(t,s)$ первого уравнения, что сильно усложняет построение регуляризованного асимптотического решения задачи (2).

2. Регуляризация задачи (1)

Задачу (1) будем рассматривать при следующих условиях:
1) функция $a\left(t\right) \in C^{\infty}\left[0,1\right]$, ядро $K_0\left(t,s\right) \in C^{\infty}\left(0 \le s \le t \le 1\right)$;
2) $\operatorname{Re} a\left(t\right) \le 0,\ a\left(t\right) \neq 0\ \forall t \in \left[0,1\right]$.

Следуя методу регуляризации С.А. Ломова [2,7], введем дополнительную переменную

$$\eta = \frac{1}{\varepsilon}\int_s^t a\left(\theta\right)d\theta \equiv \frac{\varphi\left(t,s\right)}{\varepsilon} \tag{3}$$

и вместо задачи (1) рассмотрим «расширенную» задачу

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{\partial\tilde V(t,s,\eta,\varepsilon)}{\partial t}+a\left(t\right)\frac{\partial\tilde V(t,s,\eta,\varepsilon)}{\partial\eta}=a(t)\tilde V\left(t,s,\eta,\varepsilon\right)+\\+\int_s^t K_0\left(t,x\right)\tilde V\left(x,s,\tfrac{\varphi(x,s)}{\varepsilon},\varepsilon\right)dx,\ \tilde V\left(s,s,0,\varepsilon\right)=1\end{gathered}\tag{4}$$

для функции $\tilde V\left(t,s,\eta,\varepsilon\right)$ такой, что функция $V\left(t,s,\varepsilon\right)=\tilde V\left(t,s,\frac{\varphi(t,s)}{\varepsilon},\varepsilon\right)$ является точным решением задачи (1). Однако задачу (4) нельзя считать полностью регуляризованной, так как в ней не произведена регуляризация интегрального оператора

$$J\tilde V\left(t,s,\eta,\varepsilon\right)\equiv J\left(\tilde V\left(t,s,\eta,\varepsilon\right)|_{t=x,\eta=\frac{\varphi(x,s)}{\varepsilon}}\right)=\int_s^t K_0\left(t,x\right)\tilde V\left(x,s,\tfrac{\varphi(x,s)}{\varepsilon},\varepsilon\right)dx.\tag{5}$$

Как было показано в [1], для его регуляризации надо ввести пространство M_ε, инвариантное относительно интегрального оператора J (см. [1], стр. 62). Делается это так. Введем сначала так называемое пространство «безрезонансных решений»:

$$\begin{gathered}U=\{v\left(t,s,\eta\right):\ v\left(t,s,\eta\right)=v_1\left(t,s\right)e^{\eta}+v_0\left(t,s\right),\\ v_0\left(t,s\right),v_1\left(t,s\right)\in C^\infty\left(0\le s\le t\le 1,\mathrm{C}\right)\}.\end{gathered}\tag{6}$$

В качестве M_ε возьмем класс $U|_{\eta=\frac{\varphi(t,s)}{\varepsilon}}$. Надо показать, что образ

$$Jv\left(t,s,\eta\right)\equiv J\left(v\left(t,s,\eta\right)|_{t=x,\eta=\varphi(x,s)/\varepsilon}\right)=\int_s^t K_0\left(t,x\right)v\left(x,\frac{\varphi\left(x,s\right)}{\varepsilon}\right)ds,\tag{7}$$

представляется рядом вида $\sum_{k=0}^\infty\varepsilon^k\left(z^{(k)}(t,s)e^\eta+z_0^{(k)}(t,s)\right)|_{\eta=\frac{\varphi(t,s)}{\varepsilon}}$,асимптотически сходящимся к Jv при $\varepsilon\to+0$ (равномерно по $(t,s)\in\{0\le s\le t\le 1\}$).

Подставляя элемент $v\left(t,s,\eta\right)=v_1\left(t,s\right)e^\eta+v_0\left(t,s\right)$ пространства (6) в (7), будем иметь

$$Jv\left(t,s,\eta\right)=\int_s^t K_0\left(t,x\right)v_0\left(x,s\right)dx+\int_s^t K_0\left(t,x\right)v_1\left(x,s\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^x a(\theta)d\theta}dx\tag{8}$$

Стоящий здесь второй интеграл разложим в асимптотический ряд. Применяя операцию интегрирования по частям, будем иметь

$$\begin{aligned}&\int_s^t K_0\left(t,x\right)v_1\left(x,s\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^x a(\theta)d\theta}dx=\varepsilon\int_s^t\frac{K_0(t,x)}{a(x)}v_1\left(x,s\right)d_x e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^x a(\theta)d\theta}=\\&=\varepsilon\left[\frac{K_0(t,x)}{a(x)}v_1\left(x,s\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^x a(\theta)d\theta}|_{x=s}^{x=t}\right]-\varepsilon\int_s^t\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K_0(t,x)}{a(x)}v_1\left(x,s\right)\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^x a(\theta)d\theta}dx=\\&=\varepsilon\left[\frac{K_0(t,t)}{a(t)}v_1\left(t,s\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t a(\theta)d\theta}-\frac{K_0(t,s)}{a(s)}v_1\left(s,s\right)\right]-\\&-\varepsilon\int_s^t\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K_0(t,x)}{a(x)}v_1\left(x,s\right)\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^x a(\theta)d\theta}dx.\end{aligned}$$

Продолжая этот процесс далее, получим ряд

$$\begin{aligned}&\int_s^t K_0\left(t,x\right)v_1\left(x,s\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^x a(\theta)d\theta}dx=\\&=\sum_{m=0}^\infty\left(-1\right)^m\varepsilon^{m+1}[\left(I^m\left(K_0\left(t,x\right)v_1\left(x,s\right)\right)\right)_{x=t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^x a(\theta)d\theta}-\\&-\left(I^m\left(K_0\left(t,x\right)v_1\left(x,s\right)\right)\right)_{x=s}],\end{aligned}\tag{9}$$

где введены операторы:

$$I^0=\frac{1}{a\left(x\right)},\ I^1=\frac{1}{a\left(x\right)}\frac{\partial}{\partial x}I^0,I^m=\frac{1}{a\left(x\right)}\frac{\partial}{\partial x}I^{m-1},\ m\ge 2.$$

Нетрудно показать (см., например, [10], стр. 291–293), что ряд, стоящий в правой части равенства (9), сходится асимптотически при $\varepsilon \to +0$ к интегралу

$$\int_s^t K_0(t,x)\, v_1(x,s)\, e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^x a(\theta)d\theta} dx$$

(равномерно по $(t,s) \in \{0 \le s \le t \le 1\}$). Тем самым, показано, что класс $M_\varepsilon = U|_{\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}}$ асимптотически инвариантен относительно оператора J.

Класс M_ε, инвариантный относительно оператора J, позволяют произвести регуляризацию этого оператора, используя его образ на элементе класса M_ε. Делается это так. Введем операторы

$$\begin{array}{l} R_0(v(t,s,\eta)) = \int_s^t K_0(t,x)\, v_0(x,s)\, dx, \\ R_{m+1}(v(t,s,\eta)) = (-1)^m \left[(I^m (K_0(t,x)\, v_1(x,s)))_{x=t}\, e^{\eta} - \right. \\ \left. - (I^m (K_0(t,x)\, v_1(x,s)))_{x=s} \right],\ m \ge 0. \end{array} \tag{10}$$

Эти операторы называют *операторами порядка (по ε)*; они являются коэффициентами при соответствующей степени ε^{m+1} в $Jv(t,\tau,\eta)$. Используя R_m, оператор $Jv(t,\tau,\eta)$ можно записать короче:

$$Jv(t,s,\eta) = \left(R_0 v(t,s,\eta) + \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m+1} R_{m+1} v(t,s,\eta) \right)_{\eta=\frac{\varphi(t,s))}{\varepsilon}}.$$

Пусть теперь $\tilde{v}(t,s,\eta,\varepsilon)$ — произвольная непрерывная по

$$(t,s,\eta) \in \{0 \le s \le t \le 1\} \times\ \Pi\ \ (\Pi = \{\eta : \operatorname{Re}\eta \le 0\})$$

функция, имеющая асимптотическое разложение

$$\tilde{v}(t,s,\eta,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(t,s,\eta), \quad v_k(t,s,\eta) \in U, \tag{11}$$

сходящееся при $\varepsilon \to +0$ (равномерно по $(t,s,\eta) \in \{0 \le s \le t \le 1\} \times \Pi$). Тогда образ $J\tilde{v}(t,s,\eta,\varepsilon)$ разлагается в асимптотический ряд

$$J\tilde{v}(t,s,\eta,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k J v_k(t,s,\eta) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \sum_{k=0}^{r} R_{r-k} v_k(t,s,\eta)|_{\eta=\frac{\varphi(t,s))}{\varepsilon}}. \tag{12}$$

Равенство (12) является основанием для введения следующего понятия.

Определение 1. *Формальным расширением оператора J назовем оператор $\tilde{J}$, действующий на каждую функцию $\tilde{v}(t,s,\eta,\varepsilon) \in C(\{0 \le s \le t \le 1\} \times\ \Pi)$ $(\varepsilon \to +0)$ вида (6) по закону*

$$\tilde{J}\tilde{v}(t,s,\eta,\varepsilon) \equiv \tilde{J}(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(t,s,\eta)) \stackrel{def}{=} \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \sum_{k=0}^{r} R_{r-k} v_k(t,s,\eta). \tag{13}$$

Из (12) следует асимптотическое равенство

$$(\tilde{J}\tilde{v}(t,\tau,\varepsilon)|_{\eta=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}} = J\tilde{v}(t,\eta,\varepsilon)_{\eta=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}} (\varepsilon \to +0),$$

которое показывает, что введенный нами оператор $\tilde{J}$ действительно является расширением оператора J. Хотя оператор $\tilde{J}$ определен формально, его полезность очевидна, так как на практике обычно строят N-е приближение асимптотического решения (11), в котором будут участвовать лишь N-е частичные суммы ряда (11), имеющие не формальный, а истинный смысл. Теперь можно записать задачу, полностью регуляризованную по отношению к исходной задаче (2):

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{\partial\tilde{V}(t,s,\eta,\varepsilon)}{\partial t}+a\left(t\right)\frac{\partial\tilde{V}(t,s,\eta,\varepsilon)}{\partial\eta}=a(t)\tilde{V}\left(t,s,\eta,\varepsilon\right)+\\+\tilde{J}\tilde{V}\left(t,s,\eta,\varepsilon\right),\,\tilde{V}\left(s,s,0,\varepsilon\right)=1,\end{gathered}\tag{14}$$

где $\tilde{J}\tilde{V}\left(t,s,\eta,\varepsilon\right)$ имеет вид (13).

3. Разрешимость итерационных задач

Определяя решение этой задачи (14) в виде ряда (11), получим следующие итерационные задачи:

$$\mathbf{L}\,v_0(t,s,\eta)\equiv a(t)\frac{\partial v_0}{\partial\eta}-a(t)v_0-R_0v_0=0,v_0(s,s,0)=1;\tag{15_0}$$

$$\mathbf{L}\,v_1(t,s,\eta)=-\frac{\partial v_0}{\partial t}+R_1v_0,v_1(s,s,0)=0;\tag{15_1}$$

$$\mathbf{L}\,v_2(t,s,\eta)=-\frac{\partial v_1}{\partial t}+R_1v_1+R_2v_0,v_2(s,s,0)=0;\tag{15_2}$$

$$\cdots$$

$$\begin{gathered}\mathbf{L}\,v_k(t,s,\eta)=-\frac{\partial v_{k-1}}{\partial t}+R_1v_{k-1}+R_2v_{k-2}+\ldots+R_kv_0,\\v_k(s,s,0)=0,k\geq 2.\end{gathered}\tag{15_k}$$

Перейдем к исследованию их разрешимости в пространстве U. Каждую из задач (15_k) можно предствить в виде

$$\mathbf{L}\,v(t,s,\eta)\equiv a(t)\frac{\partial v}{\partial\eta}-a(t)v-R_0v=H(t,s,\eta),y_0(0,0)=b,\tag{16}$$

где $H\left(t,s,\eta\right)=H_1\left(t,s\right)e^{\eta}+H_0\left(t,s\right)\in U$ — известная правая часть задачи (16), а R_0 – оператор, действующий на каждую функцию (6) пространства U по закону:

$$R_0\left(v_1\left(t,s\right)e^{\eta}+v_0\left(t,s\right)\right)\triangleq\int_s^t K_0\left(t,x\right)v_0\left(x,s\right)dx.$$

В пространстве U введем скалярное (при каждом $(t,s)\in\{0\leq s\leq t\leq 1\}$) произведение

$$\begin{gathered}\langle v,w\rangle\equiv\langle v_1\left(t,s\right)e^{\eta}+y_0\left(t,s\right),w_1\left(t,s\right)e^{\eta}+w_0\left(t,s\right)\rangle\triangleq\\\triangleq v_1\left(t,s\right)\cdot\bar{w}_1\left(t,s\right)+v_0\left(t,s\right)\cdot\bar{w}_0\left(t,s\right).\end{gathered}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1), 2) и правая часть* $H\left(t,s,\eta\right)==H_1\left(t,s\right)e^{\eta}+H_0\left(t,s\right)$ *уравнения (16) принадлежит пространству* U. *Тогда для разрешимости уравнения (16) в пространстве* U *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\langle H\left(t,s,\eta\right),e^{\eta}\rangle\equiv 0\Leftrightarrow H_1\left(t,s\right)\equiv 0\ \left(\forall\left(t,s\right)\in\{0\leq s\leq t\leq 1\}\right).\tag{17}$$

Доказательство. Подставим элемент (6) пространства U в уравнение (16); получим равенство

$$\begin{gathered}a\left(t\right)v_1\left(t,s\right)e^{\eta}-a\left(t\right)v_1\left(t,s\right)e^{\eta}-a\left(t\right)v_0\left(t,s\right)-\\-\int_s^t K_0\left(t,x\right)v_0\left(x,s\right)dx=H_1\left(t,s\right)e^{\eta}+H_0\left(t,s\right).\end{gathered}$$

Приравнивая здесь отдельно свободные члены и коэффициенты при экспоненте, получим уравнения

$$0 \cdot v_1(t,s) = H_1(t,s), \ -a(t)\, v_0(t,s) - \int_s^t K_0(t,x)\, v_0(x,s)\, dx = H_0(t,s). \quad (18)$$

Второе уравнение (18) является интегральным уравнением типа Вольтерра; оно однозначно разрешимо в пространстве $C^\infty(0 \le s \le t \le 1, \mathbb{C})$. Для разрешимости первого уравнения (18) в этом пространстве необходимо и достаточно, чтобы $H_1(t,s) \equiv 0$, т. е. чтобы выполнялось условие (17). □

Замечание 1. При выполнении условий 1) и 2), а также условия 17 уравнение (17) имеет следующее решение в пространстве U :

$$v(t,s,\eta) = \alpha(t,s)\, e^\eta + v_0(t,s), \quad (19)$$

где $\alpha(t,s) \in C^\infty(0 \le s \le t \le 1, \mathbb{C})$ — произвольная функция, $v_0(t,s)$ — решение интегрального уравнения (18).

Не будем формулировать теорему об однозначной разрешимости общей итерационной задачи (16). Заметим, что применение теоремы 1 к двум последовательным итерационным задачам (15_k) и (15_{k+1}) приводит к однозначному вычислению решения итерационной задачи (15_k) в пространстве U. Покажем это на примере задач (15_0), (15_1) и (15_2).

Решение уравнения (15_0) имеет вид суммы (19). Поскольку в (15_0) отсутствует неоднородность $H(t,s,\eta)$, то интегральное уравнение (18) будет однородным и поэтому $v_0(t,s) \equiv 0$, а само решение (19) принимает вид $v_0(t,s,\eta) = \alpha(t,s)\, e^\eta$. Подчиняя его начальному условию $v_0(s,s) = 1$, найдем, что $\alpha(s,s) = 1$. Таким образом, решение задачи (15_0) будет записано в виде $v_0(t,s,\eta) = \alpha(t,s)\, e^\eta$, где функция $\alpha(t,s)$ найдена лишь в точке $(t,s) = (s,s)$. Для окончательного ее вычисления перейдем к уравнению (15_1):

$$\begin{gathered} \mathbf{L}\, v_1(t,s,\eta) = -\frac{\partial v_0}{\partial t} + R_1 v_0, v_1(s,s,0) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbf{L}\, v_1(t,s,\eta) = -\frac{\partial \alpha(t,s)}{\partial t} e^\eta + \left[\frac{K_0(t,t)}{a(t)} \alpha(t,s)\, e^\eta - \frac{K_0(t,s)}{a(s)}\right]. \end{gathered} \quad (20)$$

По теореме 1 это уравнение разрешимо в пространстве U тогда и только тогда, когда выполняется условие $-\frac{\partial \alpha(t,s)}{\partial t} + \frac{K_0(t,t)}{a(t)} \alpha(t,s) \equiv 0$. Присоединяя к нему начальное условие $\alpha(s,s) = 1$, найдем однозначно функцию $\alpha(t,s) = = \exp\left\{\int_s^t \frac{K_0(x,x)}{a(x)} dx\right\}$, а значит однозначно построим решение $v_0(t,s,\eta) = \alpha(t,s)\, e^\eta$ задачи (15_0) в пространстве U. При этом задача (15_1) будет уже неоднородной:

$$\begin{gathered} \mathbf{L}\, v_1(t,s,\eta) = -\frac{\partial \alpha(t,s)}{\partial t} e^\eta + \left[\frac{K_0(t,t)}{a(t)} \alpha(t,s)\, e^\eta - \frac{K_0(t,s)}{a(s)}\right] \equiv \\ \equiv -\frac{K_0(t,s)}{a(s)},\ v_1(s,s,0) = 0. \end{gathered}$$

Поскольку в правой части этого уравнения отсутствует коэффициент при экспоненте e^η, то условие (17) выполнено и мы можем вычислить решение этого уравнения (см. формулу (19)):

$$v_1(t,s,\eta) = \alpha_1(t,s)\, e^\eta + v_0(t,s), \quad (21)$$

где $\alpha_1(t,s) \in C^\infty(0 \le s \le t \le 1, \mathbb{C})$ — произвольная функция, $v_0(t,s)$ решение интегрального уравнения типа Вольтерра:

$$\begin{gathered} -a(t)\, v_0(t,s) - \int_s^t K_0(t,x)\, v_0(x,s)\, dx = -\frac{K_0(t,s)}{a(s)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow v_0(t,s) = \int_s^t \frac{K_0(t,x)}{-a(t)} v_0(x,s)\, dx + \frac{K_0(t,s)}{a(t)a(s)}. \end{gathered} \quad (22)$$

Оно существует, единственно и принадлежит классу $C^{\infty}\left(0 \le s \le t \le 1, \mathrm{C}\right)$. Подчиняя (21) начальному условию $v_1(s,s,0) = 0$, получим уравнение

$$\alpha_1\left(s,s\right) + \frac{K_0\left(s,s\right)}{a^2\left(s\right)} = 0 \Leftrightarrow \alpha_1\left(s,s\right) = -\frac{K_0\left(s,s\right)}{a^2\left(s\right)}. \tag{23}$$

Для окончательного вычисления функции (21) надо перейти к следующей задаче (15_2):

$$\mathbf{L}\, v_2(t,s,\eta) = -\frac{\partial v_1}{\partial t} + R_1 v_1 + R_2 v_0, v_2(s,s,0) = 0.$$

Учитывая вид операторов R_1 и R_2:

$$\begin{array}{l} R_1\left(v_1(t,s)e^{\eta} + v_0(t,s)\right) = \frac{K_0(t,t)}{a(t)} v_1\left(t,t\right) e^{\eta} - \frac{K_0(t,s)}{a(s)} v_1\left(s,s\right) \\ R_2\left(v_1(t,s)e^{\eta} + v_0(t,s)\right) = -\left(I^1\left(K_0\left(t,x\right) v_1(x,s)\right)\right)_{x=t} e^{\eta} + \\ + \left(I^1\left(K_0\left(t,x\right) v_1(x,s)\right)\right)_{x=s}, \end{array}$$

выделим в правой части уравнения (15_2) коэффициент при экспоненте e^{η}. Он будет таким:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\alpha_1\left(t,s\right) + \frac{K_0\left(t,t\right)}{a\left(t\right)}\alpha_1\left(t,s\right) - \left(I^1\left(K_0\left(t,x\right)\alpha(x,s)\right)\right)_{x=t} = 0,$$

где $\alpha\left(t,s\right) = \exp\left\{\int_s^t \frac{K_0(x,x)}{a(x)} dx\right\}$ — известная функция. Присодиняя к этому уравнению начальное условие (23), найдем однозначно функцию $\alpha_1\left(t,s\right)$ и значит, построим однозначно решение (21) задачи (15_1). Аналогично вычисляются решения в пространстве U следующих итерационных задач (15_k) при $k \ge 2$.

4. Асимптотическая сходимость формальных решений уравнения (1) к точному

Применяя теорему 1 к итерационным задачам (15_k), вычислим однозначно их решения $v_k(t,s,\eta)$ в пространстве U. Обозначим $N-$ ую частичную сумму ряда (11) через $S_N(t,s,\eta,\varepsilon)$ а через $v_{\varepsilon N}(t,s) = S_N(t,s,\frac{\varphi(t,s)}{\varepsilon},\varepsilon)$ — сужение этой суммы на регуляризирующей перменной (3) (т.е. при $\eta = \frac{\varphi(t,s)}{\varepsilon}$). Нетрудно доказать следующее утверждение (см. [1], с. 143).

Лемма 1. *Пусть выполнены условия 1) и 2). Тогда функция $v_{\varepsilon N}(t,s)$ является формальным асимптотическим решением задачи (1) порядка N, т.е. она удовлетворяет задаче*

$$\begin{array}{l} \varepsilon \frac{dv_{\varepsilon N}}{dt} = a(t)v_{\varepsilon N} + \int_s^t K_0\left(t,x\right) v_{\varepsilon N}\left(x,s\right) dx + \varepsilon^{N+1} F_N(t,s,\varepsilon), \\ v_{\varepsilon N}\left(s,s\right) = 1,\, (s,t) \in \left\{0 \le s \le t \le 1\right\}, \end{array} \tag{24_0}$$

где $||F_N(t,s,\varepsilon)||_{C(0\le s\le t\le 1)} \le \bar{F}(\bar{F} > 0-$ постоянная, не зависящая от ε при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0], \varepsilon_0-$ достаточно мало).

Для оценки разности $V\left(t,s,\varepsilon\right) - v_{\varepsilon N}\left(t,s\right)$ между точным и приближенным решением задачи (1) надо рассмотрть интегро-дифференциальную задачу

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = a(t)z + \int_s^t K_0\left(t,x\right) z\left(x,s,\varepsilon\right) dx + H(t,s,\varepsilon),\; z(s,s,\varepsilon) = 0, \tag{24}$$

где $H(t,s,\varepsilon) \in C\left(0 \le s \le t \le 1, \mathrm{C}\right)$– известная функция. Эта задача при каждом $\varepsilon > 0$ имеет единственное решение $z = z\left(t,s,\varepsilon\right) \in C^1\left(0 \le s \le t \le 1, \mathrm{C}\right)$ и надо оценить норму решения через правую часть $H(t,s,\varepsilon)$. Введем еще одну неизвестную функцию

$$u(t,s,\varepsilon)=\int_s^t K_0(t,x)\,z(x,s,\varepsilon)\,dx.$$

Дифференцируя ее по t, получим интегро-дифференциальную задачу:

$$\begin{array}{l}\frac{du(t,s,\varepsilon)}{dt}=K_0(t,t)\,z(t,s,\varepsilon)+\int_s^t\frac{\partial K_0(t,x)}{\partial t}z(x,s,\varepsilon)\,dx,\\ u(s,s,\varepsilon)=0.\end{array}\tag{25}$$

В итоге для вектор-функции $\omega=\{z,u\}$ получим интегро-дифференциальную задачу

$$\begin{array}{l}\varepsilon\frac{d\omega(t,s,\varepsilon)}{dt}=\begin{pmatrix}a(t)&1\\0&0\end{pmatrix}\omega(t,s,\varepsilon)+\varepsilon\begin{pmatrix}0\\K_0(t,t)\,z(t,s,\varepsilon)\end{pmatrix}+\\ +\varepsilon\int_s^t\begin{pmatrix}0\\\frac{\partial K_0(t,x)}{\partial t}z(x,s,\varepsilon)\,dx\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}H(t,s,\varepsilon)\\0\end{pmatrix},\omega(s,s,\varepsilon)=0.\end{array}\tag{26}$$

Обозначим через $Y(t,x,\varepsilon)$ матрицу Коши дифференциальной задачи

$$\varepsilon\frac{dY(t,x,\varepsilon)}{dt}=\begin{pmatrix}a(t)&1\\0&0\end{pmatrix}Y(t,x,\varepsilon),\ Y(x,x,\varepsilon)=I,0\le s\le t\le 1.$$

Матрица $A(t)=\begin{pmatrix}a(t)&1\\0&0\end{pmatrix}$ является матрицей простой структуры со спектром $\{a(t),0\}$. Так как спектр $\{a(t),0\}$ матрицы $A(t)$ лежит в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda\le 0$, то матрица $Y(t,x,\varepsilon)$ равномерно ограничена (см., например, [10], стр. 119–120), т. е.

$$\|Y(t,x,\varepsilon)\|\le c_0=\text{const}\ \left(\forall(t,x,\varepsilon)\in\{0\le s\le t\le 1\}\times\{\varepsilon>0\}\right).$$

Обратим с помощью этой матрицы систему (26); получим интегральную систему

$$\begin{array}{l}\omega(t,s,\varepsilon)=\int_s^t Y(t,x,\varepsilon)\left(\begin{pmatrix}0\\K_0(x,x)\,z(x,s,\varepsilon)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\frac{\partial K_0(x,\xi)}{\partial t}z(\xi,s,\varepsilon)\,d\xi\end{pmatrix}\right)dx=\\ +\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t Y(t,x,\varepsilon)\begin{pmatrix}H(x,s,\varepsilon)\\0\end{pmatrix}dx.\end{array}$$

Переходя здесь к нормам, получим интегральное неравенство относительно нормы $\|\omega(t,s,\varepsilon)\|$. Учитывая равномерную ограниченность матрицы $Y(t,x,\varepsilon)$, а также непрерывность функций $K_0(t,s)$ и $\frac{\partial K_0(x,\xi)}{\partial t}$ (а значит, их ограниченность) и применяя неравенство Гроноулла-Беллмана, получим при достаточно малых $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ оценку

$$\|\omega(t,s,\varepsilon)\|_{C(\{0\le s\le t\le 1\})}\le\frac{1}{\varepsilon}\left\|\begin{pmatrix}H(x,s,\varepsilon)\\0\end{pmatrix}\right\|_{C(\{0\le s\le t\le 1\})},$$

из которой вытекает оценка

$$\|z(t,s,\varepsilon)\|_{C(\{0\le s\le t\le 1\})}\le\frac{c_1}{\varepsilon}\|H(x,s,\varepsilon)\|_{C(\{0\le s\le t\le 1\})}.\tag{27}$$

Доказано следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия 1) и 2). Тогда решение $z(t,s,\varepsilon)$ задачи (25) существует, единственно при достаточно малых $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ и удовлетворяет оценке (27), где постоянная $c_1 > 0$ не зависит от ε при достаточно малых $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.*

Применим эту лемму для доказательства следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1) и 2). Тогда задача (1) однозначно разрешима в классе $\mathrm{C}^1([0,1],\mathrm{C})$ и для ее решения $V(t,s,\varepsilon)$ справедлива оценка*

$$||V(t,s,\varepsilon) - v_{\varepsilon N}(t,s)||_{C(0\le s\le t\le 1)} \le c_N \varepsilon^{N+1}, N = 0,1,2,...,$$

где постоянная $c_N > 0$ не зависит от ε при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0](\varepsilon_0 > 0$ — достаточно мало).

Доказательство. Задача (1) однозначно разрешима, так как она приводится к задаче (24) заменой $V-1=z$. Для разности $\Delta_N(t,s,\varepsilon) = V(t,s,\varepsilon) - v_{\varepsilon N}(t,s)$ получаем задачу

$$\begin{gathered}\varepsilon \frac{\Delta_N(t,s,\varepsilon)}{dt} = a(t)\Delta_N(t,s,\varepsilon) + \int_s^t K(t,x)\Delta_N(x,s,\varepsilon)dx - \\ -\varepsilon^{N+1} F_N(t,s,\varepsilon), \Delta_N(s,s,\varepsilon) = 0.\end{gathered}$$

Она имеет вид задачи (24) с неоднородностью $H(t,s,\varepsilon) \equiv -\varepsilon^{N+1}F_N(t,s,\varepsilon)$. По лемме 2 справедлива оценка

$$\begin{gathered}||\Delta_N(t,s,\varepsilon)||_{C(0\le s\le t\le 1)} \equiv ||V(t,s,\varepsilon) - v_{\varepsilon N}(t,s)||_{C(0\le s\le t\le 1)} \le \\ \le \frac{c_2}{\varepsilon}\varepsilon^{N+1}||F_N(t,s,\varepsilon)||_{C(0\le s\le t\le 1)} \le \bar{c}_0 \bar{F}_N \varepsilon^N \equiv \bar{c}_{N-1}\varepsilon^N,\end{gathered}$$

а значит для $\Delta_{N+1}(t,s,\varepsilon) = V(t,s,\varepsilon) - v_{\varepsilon,N+1}(t,s)$ будет иметь место оценка

$$||\Delta_{N+1}(t,s,\varepsilon)||_{C(0\le s\le t\le 1)} \equiv$$

$$\equiv ||(V(t,s,\varepsilon) - v_{\varepsilon N}(t,s)) - \varepsilon^{N+1} v_{N+1}(t,s,\frac{\varphi(t,s)}{\varepsilon})||_{C(0\le s\le t\le 1)} \le \bar{c}_N \varepsilon^{N+1}.$$

Отсюда получаем, что

$$\bar{c}_N\varepsilon^{N+1} \ge ||V(t,s,\varepsilon) - v_{\varepsilon N}(t,s)||_{C(0\le s\le t\le 1)} - \varepsilon^{N+1}||v_{N+1}(t,s,\frac{\varphi(t,s)}{\varepsilon})||_{C(0\le s\le t\le 1)},$$

или

$$||V(t,s,\varepsilon) - v_{\varepsilon N}(t,s)||_{C(0\le s\le t\le 1)} \le c_N \varepsilon^{N+1},$$

где $c_N = \bar{c}_N + \bar{v}_N > 0, ||v_{N+1}(t,s,\frac{\varphi(t,s)}{\varepsilon})||_{C(0\le s\le t\le 1)} \le \bar{v}_N$, причем постоянная c_N не зависит от $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 > 0$ — достаточно мало. □

5. Построение регуляризованного асимптотического решения задачи (2)

Рассмотрим теперь задачу (2). Подставим в нее асимптотическое решение

$$v(t,s,\eta,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(v_1^{(k)}(t,s)e^{\eta} + v_0^{(k)}(t,s) \right) \tag{28}$$

задачи (1). Получим интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered}\varepsilon \frac{dy}{dt} = b(t)y + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \int_0^t \left(v_1^{(k)}(t,s)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t a(\theta)}d\theta + v_0^{(k)}(t,s) \right) \times \\ \times K(t,s)y(s,\varepsilon)ds + h(t), y(0,\varepsilon) = y^0.\end{gathered} \tag{29}$$

Введем обозначения:

$$K(t,s)\,v_1^{(k)}(t,s) \equiv K_{1,k}(t,s),$$
$$K(t,s)\,v_0^{(k)}(t,s) \equiv K_{0,k}(t,s),\ k=0,1,2,\ldots.$$

Тогда задача (29) перепишется в виде

$$\begin{aligned}&\varepsilon\tfrac{dy}{dt}=b(t)\,y+\\&+\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t a(\theta)d\theta}K_{1,k}(t,s)\,y(s,\varepsilon)\,ds+\\&+\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\int_0^t K_{0,k}(t,s)\,y(s,\varepsilon)\,ds+h(t),\,y(0,\varepsilon)=y^0.\end{aligned}\tag{30}$$

Получена интегро-дифференциальная система с быстро и медленно изменяющимися ядрами интегрального оператора. Эта система более общая, чем система, рассмотренная в [6], так как в ней ядра являются асимптотическими рядами по ε (тогда как в [6] в ядре стоит только одно слагаемое $k(t,s)$). Задачу (30) будем рассматривать при условиях 1)–2). Кроме того, будем предполагать, что выполнены требования:

3) функции $b(t)\in C^{\infty}([0,1])$ и $h(t)\in C^{\infty}([0,1])$;

4) $a(t)\neq b(t),\,a(t),\,b(t)\neq 0,\ \operatorname{Re}a(t),\operatorname{Re}b(t)\leq 0\,\forall t\in[0,1]$.

Обозначим $a(t)\equiv\lambda_2(t),\ \ b(t)\equiv\lambda_1(t)$ и введем регуляризирующие переменные

$$\tau_j=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_j(x)\,dx\equiv\frac{\psi_j(t)}{\varepsilon},\ j=1,2.$$

Для расширения $\widetilde{y}=\widetilde{y}(t,\tau,\varepsilon)$ решения уравнения (30) получим следующую задачу:

$$\begin{aligned}&\varepsilon\tfrac{\partial\tilde y}{\partial t}+\textstyle\sum_{j=1}^{2}\lambda_j(t)\tfrac{\partial\tilde y}{\partial\tau_j}-\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k J_k\tilde y\left(s,\tfrac{\psi(s)}{\varepsilon},\varepsilon\right)=h(t),\\&\tilde y(0,\varepsilon)=y^0,\end{aligned}\tag{31}$$

где обозначено:

$$\begin{aligned}&J_k\widetilde{y}(t,\tau,\varepsilon)=J_{1,k}\widetilde{y}(t,\tau,\varepsilon)+J_{0,k}\widetilde{y}(t,\tau,\varepsilon),\\&J_{1,k}\widetilde{y}(t,\tau,\varepsilon)=\textstyle\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\lambda_2(\theta)d\theta}K_{1,k}(t,s)\,\tilde y\left(s,\tfrac{\psi(s)}{\varepsilon},\varepsilon\right)ds,\\&J_{0,k}\widetilde{y}(t,\tau,\varepsilon)=\textstyle\int_0^t K_{0,k}(t,s)\,\tilde y\left(s,\tfrac{\psi(s)}{\varepsilon},\varepsilon\right)ds,\ \ k\geq 0,\end{aligned}$$

или, более подробно,

$$\begin{aligned}&\varepsilon\tfrac{\partial\tilde y}{\partial t}+\textstyle\sum_{j=1}^{2}\lambda_j(t)\tfrac{\partial\tilde y}{\partial\tau_j}-\\&-\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t a(\theta)d\theta}K_{1,k}(t,s)\,\tilde y\left(s,\tfrac{\psi(s)}{\varepsilon},\varepsilon\right)ds-\\&-\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\int_0^t K_{0,k}(t,s)\,\tilde y\left(s,\tfrac{\psi(s)}{\varepsilon},\varepsilon\right)ds=h(t),\\&\tilde y(0,0\varepsilon)=y^0.\end{aligned}\tag{31a}$$

Однако здесь не произведена регуляризация интегральных операторов $J_{1,k}\widetilde{y}(t,\tau,\varepsilon)$ и $J_{0,k}\widetilde{y}(t,\tau,\varepsilon)$. Для регуляризации этих операторов введем пространство $\hat{M}_{\varepsilon}$, асимптотически инвариантное относительно оператора $J_{i,k}\widetilde{y}(s,\tau,\varepsilon)$ $(k=0,1)$(см. [1; гл. 2,§ 6]).

Определение 2. *Будем говорить, что вектор-функция $w(t,\tau)=\{w_1,...,w_n\}$ принадлежит пространству Y, если она представима в виде суммы*

$$\begin{aligned}&w(t,\tau)=w_0(t)+w_1(t)\,e^{\tau_1}+w_2(t)\,e^{\tau_2},\,w_j(t)\in C^{\infty}([0,1]),\\&j=0,1,2.\end{aligned}\tag{32}$$

Заметим, что здесь $\tau_2 = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t a(x)\,dx = \frac{\varphi(t,0)}{\varepsilon}$. Подставим вместо $\tilde{y}$ эту функцию в каждый интегральный оператор, входящий в $J_{i,k}\widetilde{y}(s,\tau,\varepsilon)$. Будем иметь

$$J_{1,k}w(t,\tau)\equiv$$
$$\equiv \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_2(x)dx}K_{1,k}(t,s)\left(w_0(s)+w_1(s)\,e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_1(x)dx}+w_2(s)\,e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_2(x)dx}\right)ds=$$
$$=\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_2(x)dx}K_{1,k}(t,s)\,w_0(s)\,ds+e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_2(x)dx}\int_0^t K_{1,k}(t,s)\,w_2(s)\,ds+$$
$$+\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_2(x)dx}K_{1,k}(t,s)\,w_1(s)\,e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_1(x)dx}ds=$$
$$=e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_2(x)dx}\int_0^t K_{1,k}(t,s)\,w_2(s)\,ds+\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_2(x)dx}K_{1,k}(t,s)\,w_0(s)\,ds+$$
$$+e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_2(x)dx}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_2(x)dx}K_{1,k}(t,s)\,w_1(s)\,e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_1(x)dx}ds$$

Применяя операцию интегрирования по частям, получим

$$\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_2(x)dx}K_{1,k}(t,s)\,w_0(s)\,ds=$$
$$=-\varepsilon\int_0^t \frac{K_{1,k}(t,s)w_0(s)}{\lambda_2(s)}de^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_2(x)dx}=$$
$$=\varepsilon\left[\frac{K_{1,k}(t,0)w_0(0)}{\lambda_2(0)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_2(x)dx}-\frac{K_{1,k}(t,t)w_0(t)}{\lambda_2(t)}\right]+$$
$$+\varepsilon\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_2(x)dx}\frac{\partial}{\partial s}\frac{K_{1,k}(t,s)w_0(s)}{\lambda_2(s)}ds=$$
$$=\varepsilon\left[\frac{K_{1,k}(t,0)w_0(0)}{\lambda_2(0)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_2(x)dx}-\frac{K_{1,k}(t,t)w_0(t)}{\lambda_2(t)}\right]+$$
$$+\varepsilon^2[\left(\frac{1}{\lambda_2(s)}\frac{\partial}{\partial s}\frac{K_{1,k}(t,s)w_0(s)}{\lambda_2(s)}\right)_{s=0}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_2(x)dx}-$$
$$-\left(\frac{1}{\lambda_2(s)}\frac{\partial}{\partial s}\frac{K_{1,k}(t,s)w_0(s)}{\lambda_2(s)}\right)_{s=t}]+$$
$$+\varepsilon^2\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_2(x)dx}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\lambda_2(s)}\frac{\partial}{\partial s}\frac{K_{1,k}(t,s)w_0(s)}{\lambda_2(s)}\right)ds=$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{m+1}[\left(I_2^m\left(K_{1,k}(t,s)\,w_0(s)\right)\right)_{s=0}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_2(x)dx}-$$
$$-\left(I_2^m\left(K_{1,k}(t,s)\,w_0(s)\right)\right)_{s=t}]$$

где введены операторы:

$$I_2^0=\frac{1}{\lambda_2(s)},\ I_2^1=\frac{1}{\lambda_2(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_1^0,$$
$$I_2^m=\frac{1}{\lambda_2(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_2^{m-1},\ m\geq 2. \tag{33}$$

Далее имеем:

$$e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_2(x)dx}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_2(x)dx}K_{1,k}(t,s)\,w_1(s)\,e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_1(x)dx}ds=$$
$$=e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_2(x)dx}\int_0^t K_{1,k}(t,s)\,w_1(s)\,e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s(\lambda_1(x)-\lambda_2(x))dx}ds=$$
$$=\varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_2(x)dx}\int_0^t \frac{K_{1,k}(t,s)w_1(s)}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)}de^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s(\lambda_1(x)-\lambda_2(x))dx}=$$
$$=\varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_2(x)dx}\left[\frac{K_{1,k}(t,t)w_1(t)}{\lambda_1(t)-\lambda_2(t)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t(\lambda_1(x)-\lambda_2(x))dx}-\frac{K_{1,k}(t,0)w_1(0)}{\lambda_1(0)-\lambda_2(0)}\right]-$$
$$-\varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_2(x)dx}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s(\lambda_1(x)-\lambda_2(x))dx}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{K_{1,k}(t,s)w_1(s)}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)}\right)ds=$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{m+1}(-1)^m[\left(I_{1,2}^m\left(K_{1,k}(t,s)\,w_1(s)\right)_{s=t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_1(x)dx}\right)_{s=t}-$$
$$-\left(I_{1,2}^m\left(K_{1,k}(t,s)\,w_1(s)\right)_{s=0}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_2(x)dx}\right)],$$

где введены операторы:

$$I_{1,2}^0=\frac{1}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)},\ I_{1,2}^1=\frac{1}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_{1,2}^0,$$
$$I_{1,2}^{\nu}=\frac{1}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_{1,2}^{\nu-1},\ \nu\geq 2. \tag{34}$$

Таким образом, для произвольной вектор-функции (32) будем иметь

$$\begin{array}{l} J_{1,k}w(t,\tau)=e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_2(x)dx}\int_0^t K_{1,k}\left(t,s\right)w_2\left(s\right)ds+\\ +\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{m+1}\left(-1\right)^m\left[\left(I_2^m\left(K_{1,k}\left(t,s\right)w_0\left(s\right)\right)\right)_{s=0}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_2(x)dx}-\right.\\ \left.-\left(I_2^m\left(K_{1,k}\left(t,s\right)w_0\left(s\right)\right)\right)_{s=t}\right]+\\ +\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{m+1}\left(-1\right)^m\left[\left(I_{1,2}^m\left(K_{1,k}\left(t,s\right)w_1\left(s\right)\right)_{s=t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_1(x)dx}\right)_{s=t}-\right.\\ \left.-\left(I_{1,2}^m\left(K_{1,k}\left(t,s\right)w_1\left(s\right)\right)_{s=0}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_2(x)dx}\right)\right]. \end{array} \tag{35}$$

Произведем теперь регуляризацию интеграла с медленно изменяющимся ядром:

$$\begin{array}{l} J_{0,k}\widetilde{y}\left(t,\tau,\varepsilon\right)=\int_0^t K_{0,k}\left(t,s\right)\tilde{y}\left(s,\frac{\psi(s)}{\varepsilon},\varepsilon\right)ds=\\ =\int_0^t K_{0,k}\left(t,s\right)\left(w_0\left(s\right)+\sum_{j=1}^{2}w_j\left(s\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\lambda_j(x)dx}\right)ds=\\ =\int_0^t K_{0,k}\left(t,s\right)w_0\left(s\right)ds+\\ +\int_0^t K_{0,k}\left(t,s\right)\left(\sum_{j=1}^{2}w_j\left(s\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\lambda_j(x)dx}\right)ds. \end{array}$$

Вновь используя операцию интегрирования по частям, придем к следующему ряду:

$$\begin{array}{l} \int_0^t K_{0,k}\left(t,s\right)w_0\left(s\right)ds+\\ +\int_0^t K_{0,k}\left(t,s\right)\left(\sum_{j=1}^{2}w_j\left(s\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\lambda_j(x)dx}\right)ds=\\ =\int_0^t K_{0,k}\left(t,s\right)w_0\left(s\right)ds+\\ =\sum_{j=1}^{2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(-1\right)^m\varepsilon^{m+1}\left[\left(I_j^m\left(K_{0,k}\left(t,s\right)w_j\left(s\right)\right)\right)_{s=t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_j(x)dx}-\right.\\ \left.-\left(I_j^m\left(K_{0,k}\left(t,s\right)w_j\left(s\right)\right)\right)_{s=0}\right], \end{array} \tag{36}$$

где введены операторы:

$$\begin{array}{l} I_j^0=\frac{1}{\lambda_j(s)},\ I_j^1=\frac{1}{\lambda_j(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_{0,j}^0,\\ I_j^m=\frac{1}{\lambda_j(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_j^{m-1},\ j=1,2,\ m\geq 2. \end{array} \tag{37}$$

Нетрудно показать, что ряды, стоящие в правых частях равенств (35) и (36), асимптотически сходятся при $\varepsilon\to+0$ к соотвествующим интегралам (равномерно по $t\in[0,1]$). Обозначая через $R_{m,k}:Y\to Y$операторы порядка (по ε), действующие на каждую функцию (32) по закону

$$\begin{array}{l} R_{0,k}w\left(t,\tau\right)=e^{\tau_2}\int_0^t K_{1,k}\left(t,s\right)w_2\left(s\right)ds+\\ +\int_0^t K_{0,k}\left(t,s\right)w_0\left(s\right)ds; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} R_{m+1,k}w\left(t,\tau\right)=\left[\left(I_2^m\left(K_{1,k}\left(t,s\right)w_0\left(s\right)\right)\right)_{s=0}e^{\tau_2}-\right.\\ \left.-\left(I_2^m\left(K_{1,k}\left(t,s\right)w_0\left(s\right)\right)\right)_{s=t}\right]+\\ +\left(-1\right)^m\left[\left(I_{1,2}^m\left(K_{1,k}\left(t,s\right)w_1\left(s\right)\right)_{s=t}e^{\tau_1}\right)_{s=t}-\right.\\ \left.-\left(I_{1,2}^m\left(K_{1,k}\left(t,s\right)w_1\left(s\right)\right)_{s=0}e^{\tau_2}\right)\right]+\\ \quad+\sum_{j=1}^{2}\left(-1\right)^m\left[\left(I_j^m\left(K_{0,k}\left(t,s\right)w_j\left(s\right)\right)\right)_{s=t}e^{\tau_j}\right.\\ \quad\left.-\left(I_j^m\left(K_{0,k}\left(t,s\right)w_j\left(s\right)\right)\right)_{s=0}\right], \end{array} \tag{38}$$

где операторы I_2^m, $I_{1,2}^m$ и I_j^m вычисляются по формулам (33),(34) и (37) соответственно. Тогда образ $J_kw\left(t,\tau\right)$ можно записать кратко в форме

$$J_kw\left(t,\tau\right)\equiv J_{1,k}w\left(t,\tau\right)+J_{0,k}w\left(t,\tau\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m R_{m,k}w\left(t,\tau\right).$$

Пусть теперь некоторая вектор-функция $\widetilde{y}(t,\tau,\varepsilon)$, непрерывная по $(t,\tau)\in$ $\in[0,T]\times\Pi\,(\Pi=\{\mathrm{Re}\,\tau_j\le 0, j=1,2\})$, представляется в виде ряда

$$\begin{array}{l}\widetilde{y}(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l y_l(t,\tau),\\ y_l(t,\tau)=w_0^{(l)}(t)+\sum_{j=1}^{2}w_j^{(l)}(t)\,e^{\tau_j}\in Y,\end{array} \tag{39}$$

сходящегося асимптотически при $\varepsilon\to+0$ (равномерно по$(t,\tau)\in[0,1]\times\Pi$). Подставляя ее в интегральные операторы системы (31), будем иметь

$$\begin{array}{l}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k J_k\widetilde{y}\left(s,\frac{\psi(s)}{\varepsilon},\varepsilon\right)=\\ \equiv\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\varepsilon^{k+l}J_k y_l(t,\tau)=\sum\limits_{l=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty}R_{0k}y_l(t,\tau)+\\ +\sum\limits_{r=1}^{\infty}\varepsilon^r\sum\limits_{k+l+m=r}R_{m,k}y_l(t,\tau)=\\ =\sum\limits_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\sum\limits_{k+l+m=r}R_{m,k}y_l(t,\tau),\end{array}.$$

где $\tau=\psi(t)/\varepsilon$.

Определение 3. *Оператор* $\widetilde{J}\widetilde{y}=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\sum_{k+l+m=r}R_{m,k}y_l(t,\tau)$ *будем называть формальным расширением интегрального оператора*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k J_k\widetilde{y}\left(s,\frac{\psi(s)}{\varepsilon},\varepsilon\right).$$

Теперь можно записать задачу, полностью регуляризованную по отношению по отношению к (30):

$$\varepsilon\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{2}\lambda_j(t)\frac{\partial\widetilde{y}_0}{\partial\tau_j}-\lambda_1(t)\,\widetilde{y}-\widetilde{J}\widetilde{y}=h(t),\quad \widetilde{y}(0,0,\varepsilon)=y^0. \tag{40}$$

Подставляя ряд (39) в (40) и производя приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε, получим следующие итерационные задачи:

$$Fy_0\equiv\sum_{j=1}^{2}\lambda_j(t)\frac{\partial y_0}{\partial\tau_j}-\lambda_1(t)\,y_0-R_{0,0}y_0=h(t),\,y_0(0,0)=y^0; \tag{41_0}$$

$$Fy_1=-\frac{\partial y_0}{\partial t}+(R_{1,0}+R_{0,1})y_0,\,y_1(0,0)=0; \tag{41_1}$$

...

$$Fy_r=-\frac{\partial y_{r-1}}{\partial t}+\sum_{k+l+m=r}R_{m,k}y_l(t,\tau),\,y_r(0,0)=0, \tag{41_r}$$

Каждую пару итерационных задач $(41_r),(41_{r+1})$ можно записать в виде

$$Fy\equiv\sum_{j=1}^{2}\lambda_j(t)\frac{\partial y}{\partial\tau_j}-\lambda_1(t)\,y-R_{0,0}y=f(t,\tau),\,y(0,0)=y_*, \tag{42}$$

$$Fv=-\frac{\partial y}{\partial t}+(R_{1,0}+R_{0,1})y+g(t,\tau), \tag{43}$$

где $f(t,\tau)=f_0(t)+\sum_{j=1}^{2}f_j(t)\,e^{\tau_j}$, $g(t,\tau)=g_0(t)+\sum_{j=1}^{2}g_j(t)\,e^{\tau_j}$– известные функции класса Y. Здесь так же, как и в п.1, нетрудно доказать следующий результат.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия 1)–4) и функция* $f(t,\tau) \in Y$. *Тогда для разрешимости системы (42) в пространстве* Y *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\langle f(t,\tau) \mid e^{\tau_1}\rangle \equiv 0 \Leftrightarrow f_1(t) \equiv 0\, \forall t \in [0,1]. \tag{44}$$

При выполнении условий (44) и при дополнительном требовании

$$\left\langle -\frac{\partial y}{\partial t} + (R_{1,0}+R_{0,1})y + g(t,\tau) \,\middle|\, e^{\tau_1} \right\rangle \equiv 0 \tag{45}$$

задача (42) однозначно разрешима в пространстве Y.

Здесь через $\langle * \mid * \rangle$ обозначено скалярное (при каждом $t \in [0,1]$) произведение в Y :

$$\langle f(t,\tau) \mid g(t,\tau)\rangle \triangleq \sum_{j=0}^{2} f_j(t)\, \bar{g}(t).$$

Обращаем внимание на то, что в (31) и (32) в умножении участвуют только функция e^{τ_1}, так как функции типа $q_2(t)\, e^{\tau_2}$ не входят в ядро оператора $Fy \equiv \equiv \sum_{j=1}^{2} \lambda_j(t) \frac{\partial y}{\partial \tau_j} - \lambda_1(t)\, y$.

И, наконец, обозначая через $y_{\varepsilon N}(t) = \sum_{r=1}^{N} \varepsilon^r y_r \left(t, \frac{\psi(t)}{\varepsilon}\right)$сужение N-й частичной суммы ряда (39) при $\tau = \psi(t)/\varepsilon \equiv (\psi_1(t)/\varepsilon,\ \psi_2(t)/\varepsilon)$, докажем (так же, как и в [10], стр. 303–308) оценку

$$\|y(t,\varepsilon) - y_{\varepsilon N}(t)\|_{C[0,T]} \le M_N \varepsilon^{N+1}, \quad M = 0,1,2,...,$$

где постоянная $M_N > 0$не зависит от $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]\, (\varepsilon_0 > 0-$достаточно мало).

6. Построение главного члена асимптотики задачи (2)

Развитый нами алгоритм позволяет получать асимптотику решения исходной задачи любого порядка (по ε). Однако вычисление высших приближений связано с громоздкими выкладками. На практике обычно ограничиваются главным членом асимптотики, структура которого повторяет структуру точного решения задачи (2). В этом случае бывает достаточным рассмотреть уравнение[1]

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dy}{dt} &= \lambda_1(t)\, y + \\ &+ \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_2(\theta)d\theta} K(t,s) \left(v_1^{(0)}(t,s) + \varepsilon v_1^{(1)}(t,s)\right) y(s,\varepsilon)\, ds + \\ &+ \int_0^t K(t,s) \left(v_0^{(0)}(t,s) + \varepsilon v_0^{(1)}(t,s)\right) y(s,\varepsilon)\, ds + h(t), \end{aligned} \tag{46}$$

и рассмотреть только две первые итерационные задачи:

$$Fy_0 \equiv \sum_{j=1}^{2} \lambda_j(t) \frac{\partial y_0}{\partial \tau_j} - \lambda_1(t)\, y_0 - R_{0,0} y_0 = h(t),\ y_0(0,0) = y^0; \tag{47_0}$$

$$Fy_1 = -\frac{\partial y_0}{\partial t} + (R_{1,0}+R_{0,1})y_0, y_1(0,0) = 0, \tag{47_1}$$

[1]Напомним, что $\lambda_1(t) = b(t)$, $\lambda_2(t) = a(t)$ и $v_1^{(0)}(t,s)\, e^{\eta} + v_0^{(0)}(t,s)$ — решение задачи (15_0).

где

$$R_{0,0}y_0(t,\tau) \equiv R_{0,0}\left(y_0^{(0)}(t)+\sum_{j=1}^{2}y_j^{(0)}(t)\,e^{\tau_j}\right)=$$
$$=e^{\tau_2}\int_0^t K_{1,0}(t,s)\,y_2^{(0)}(s)\,ds+\int_0^t K_{0,0}(t,s)\,y_0^{(0)}(s)\,ds;$$

$$R_{1,0}y_0(t,\tau)\ =[\left(I_2^0\left(K_{1,0}(t,s)\,y_0^{(0)}(s)\right)\right)_{s=0}e^{\tau_2}-$$
$$-\left(I_2^0\left(K_{1,0}(t,s)\,y_0^{(0)}(s)\right)\right)_{s=t}]+$$
$$+[\left(I_{1,2}^0\left(K_{1,0}(t,s)\,y_1^{(0)}(s)\right)_{s=t}e^{\tau_1}\right)_{s=t}-$$
$$-\left(I_{1,2}^0\left(K_{1,0}(t,s)\,y_1^{(0)}(s)\right)_{s=0}e^{\tau_2}\right)]+$$
$$+\sum_{j=1}^{2}[\left(I_j^0\left(K_{0,0}(t,s)\,y_j^{(0)}(s)\right)\right)_{s=t}e^{\tau_j}$$
$$-\left(I_j^0\left(K_{0,0}(t,s)\,y_j^{(0)}(s)\right)\right)_{s=0}],$$

$$R_{0,1}y_0(t,\tau)=e^{\tau_2}\int\limits_0^t K_{1,1}(t,s)y_2^{(0)}(s)\,ds+\int\limits_0^t K_{0,1}(t,s)y_0^{(0)}(s)\,ds.$$

Применяя разработанный алгоритм, построим главный член асимптотики решения задачи (2):

$$y_{\varepsilon 0}(t)=y_0^{(0)}(t)+\alpha_1(t)\,e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_1(x)dx}, \tag{48}$$

где функция $y_0^{(0)}(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$-\lambda_1(t)\,y_0^{(0)}(t)-\int\limits_0^t K_0(t,s)\,v_0^{(0)}(t,s)y_0^{(0)}(s)\,ds=h(t)\,, \tag{49}$$

а функция $\alpha_1(t)$ вычисляется из условия $\left\langle -\frac{\partial y_0}{\partial t}+(R_{1,0}+R_{0,1})y_0\ \mid e^{\tau_1}\right\rangle\equiv 0$ разрешимости уравнения (47_1) в пространстве Y. Здесь и выше

$$y_0\equiv y_0(t,\tau)=y_0^{(0)}(t)+\sum_{j=1}^{2}y_j^{(0)}(t)\,e^{\tau_j}.$$

Из (48) видно, что влияние интегрального оператора на структуру главного члена асимптотики решения задачи (2) осуществляется через операторы $K_{1,0}(t,t)=K(t,t)\,v_1^{(0)}(t,t)\,,\ K_{0,0}(t,t)=K(t,t)\,v_0^{(0)}(t,t)\,,$ входящих в $R_{1,0}y_0(t,\tau)$ (т. е. в конечном счете через диагональное ядро $K(t,t)$). Если $K(t,t)\equiv 0$, то уравнение (1) не оказывает никакого влияния на структуру главного члена асимптотики решения задачи (2), т. е в первом приближении интегродифференциальная система (2) ведет себя так же, как и дифференциальная система $\varepsilon\dot{y}=\lambda_1(t)\,y+h(t)\,,y(0,\varepsilon)=y^0$ (влияние интегрального члена проявится при построении высших приближений). Кроме того (в отличие от работы [9]) в асимптотике (48) на формирование медленной составляющей $y_0^{(0)}(t)$ влияет ядро $K_0(t,s)$ уравнения (1), о чем было сказано во введении. Отметим также, что уравнение (49) является вырожденным ($\varepsilon=0$) по отношению к исходному (46).

References

[1] S.A. Lomov, *Introduction to the general theory of singular perturbations*, Nauka, Moskva, 1981. Zbl 0514.34049

[2] A.A. Bobodzhanov, V.F. Safonov, *Volterra integral equations with rapidly varying kernels and their asymptotic integration*, Math. Sb., **192:8** (2001), 53–78, Sb. Math., **192:8** (2001), 1139–1164

[3] V.F. Safonov, B.T. Kalimbetov, *Regularization method for systems with unstable spectral the value of the kernel of the integral operator*, Differ. Uravn., **31:4** (1995), Differ. Equ., **31:4** (1995), 647–656.

[4] S. A. Lomov, *Single-valued solvability of some matrix partial differential equations*, Matem. zametki(1977),525–530, **21:4** (1977), Math. Notes, **21:4** (1977), 293–296

[5] M.I. Imanaliyev *Kolebaniya i ustoychivost' resheniy singulyarno vozmushchennykh integro-differentsial'nykh sistem*, Frunze: «Ilim», 1974

[6] A. A. Bobodzhanov, V. F. Safonov, *Singularly perturbed nonlinear integro-differential systems with rapidly changing kernel*,Matem. zametki, **72:5** (2002), 654–664, Math. Notes, **72:5** (2002), 605–614

[7] S.A. Lomov, I.S. Lomov, *Osnovy matematicheskoy teorii pogranichnogo sloya*, Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta, Moskva, 2011.

[8] V.F. Safonov, O.D., Tuychiyev, *Regularization of singularly perturbed integral equations with rapidly varying kernels and their asymptotics*,Differents. uravneniya, **33:9** (1997), 1199–1210; Differ. Equ., **33:9** (1997), 1203-1215.

[9] A.A. Bobodzhanov, V.F. Safonov, *Asimptoticheskiye resheniya integro-differentsial'noy sistemy s bystro izmenyayushchimisya yadrami spetsial'nogo vida*, Vestnik MEI, **№6**(2011), 47–56.

[10] V.F. Safonov, A.A. Bobodzhanov, *Kurs vysshey matematiki. Singulyarno vozmushchennyye zadachi i metod regulyarizatsii: uchebnoye posobiye,* Izdatel'skiy dom MEI, Moskva, 2012.

Abdukhafiz Abdurasulovich Bobodzhanov, Mashura Abdukhafizovna Bobodzhanova, Valery Fedorovich Safonov

National Research University "Moscow Power Engineering Institute

111250, Moscow, Russia, Krasnokazarmennaya Street,14

Email address: `bobojfnova@mpei.ru, Singsaf@yandex.ru`