S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 519.633
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 65M12

О СХОДИМОСТИ ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНЫХ СХЕМ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА В МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

А.К. БАЗЗАЕВ

Abstract. В работе построены локально-одномерные схемы (ЛОС) для дифференциальных уравнений в частных производных дробных порядков по времени и по пространству в многомерной области. Установлена справедливость принципа максимума для решения разностной задачи. На основании принципа максимума получена априорная оценка в равномерной метрике, откуда следует устойчивость и сходимость разностных схем.

Keywords: уравнение диффузии дробного порядка, производная дробного порядка, устойчивость и сходимость разностных схем, уравнение медленной диффузии, локально-одномерные схемы.

1. Введение

Краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка возникают при изучении многих физических процессов [1] — [5], при изучении фильтрации жидкости в сильно-пористой (фрактальной) среде [6]. Заметим, что порядок дробной производной связан с размерностью фрактала [2], [3]. Простые формулы, связывающие размерность фрактала d_f с порядком дробной производной получены в работе [7].

Bazaev, A.K., On the convergence of locally one-dimensional schemes for the differential equation in partial derivatives of fractional orders in a multidimensional domain.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Соглашение № 075-02-2022-890.

Поступила 25 января 2023 г.

Как отмечается в [8] существуют достаточно много подтверждений тому, что для диффузионного процесса характерно нелинейное нарастание среднего квадратичного отклонения. Нарушения проявляются во многих ситуациях, в том числе при движении частиц в плазме [9], турбулентной диффузии частиц [10]. В качестве математических моделей подобных процессов рассматриваются дифференциальные уравнения в частных производных дробных порядков по пространству и времени [11] — [13].

В работе [14] для численного моделирования аномальной диффузии в многомерной области применяется метод приближенной факторизации. Для первой начально-краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными дробных порядков по пространству и времени изучена чисто неявная схема на основе метода приближенной факторизации, доказана устойчивость схемы для рассматриваемого класса задач.

В работе [15] рассматривается первая начально-краевая задача для одномерного уравнения параболического типа с дробной производной Римана-Лиувилля по пространственной переменной

$$u_t - \mathscr{D}_x^\alpha u = f,\ x \in D = (0,1),\ 0 < t \leqslant T,$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0,\ 0 < t \leqslant T,$$
$$u(x,0) = v,\ x \in D,$$

где $\alpha \in (1,2)$.
Рассматривается специальная полудискретная схема на основе метода Галеркина, а также полностью дискретная схема, основанная на методе Кранка-Николсона. Получены оценки для погрешности в нормах $L_2(D)$ и $H^{\alpha/2}(D)$ для полудискретной схемы и в норме $L_2(D)$ для полностью дискретной схемы.

В работе [16] рассматривается вариационная формулировка типа Петрова-Галеркина для одномерных краевых задач с дробной производной Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in (3/2, 2)$.

В работе [17] рассматривается уравнение с производной дробного порядка по времени с граничными условиями первого рода

$$\partial_{0t}^\alpha u - \Delta u = f,\ x \in \Omega,\ 0 < t \leqslant T,\ 0 < \alpha < 1,$$
$$u\big|_\Gamma = 0,\ 0 < t \leqslant T, \Omega + \Gamma = \overline{\Omega},$$
$$u(x,0) = v,\ x \in \Omega.$$

В работе получен дискретный аналог дробной производной по времени порядка аппроксимации $O(\tau^{2-\alpha})$. Доказана сходимость построенной схемы в норме $L_2(\Omega)$.

В работе [18] рассматриваются разностные схемы для дифференциальных уравнений обыкновенных и с частными производными второго порядка с дробной производной по времени. Отдельно изучены стационарные и нестационарные задачи для уравнения диффузии в одномерной и многомерной областях. Доказаны устойчивость и сходимость разностных схем для рассматриваемых уравнений.

В работах [19] и [20] были рассмотрены локально-одномерные схемы для уравнения диффузии дробного порядка в p-мерном параллелепипеде с краевыми условиями первого и третьего рода соответственно, а в [21] для уравнения теплопроводности дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью. В этих работах была доказана сходимость ЛОС в равномерной метрике при

$1/2 < \alpha \leqslant 1$. В работе [22] построены многомерные разностные схемы для уравнения диффузии дробного порядка и доказана сходимость разностных схем при всех $\alpha,\ 0 < \alpha \leqslant 1$. Работа [23] посвящена рассмотрению локально-одномерных разностных схем для уравнения диффузии дробного порядка с переменными коэффициентами в области сложной формы. Доказаны устойчивость и равномерная сходимость локально-одномерных схем для рассматриваемой задачи.

В работах [24] — [25] рассматриваются дифференциальные уравнения теплопроводности дробного порядка с краевыми условиями третьего рода.

Работа [26] посвящена численному методу второго порядка точности решения дробного дифференциального уравнения диффузии. Алгоритм численного решения, предложенный в данной работе, основан на классическом методе Кранка-Николсона. Доказывается сходимость предложенного метода.

Принцип максимума для дифференциальной задачи в случае, когда рассматривается уравнение диффузии с дробной производной по времени установлен в работах Ю. Лучко [27] — [30]. Результаты этих работ использованы в работах [31], [32] для доказательства принципа максимума для дифференциального уравнения дробного порядка.

В работах [33] — [37] рассматриваются численные методы решения дифференциальных уравнений с дробной производной Римана-Лиувилля по пространственной переменной, а также вопросы устойчивости и сходимости.

В работе [38] построены разностные схемы для дифференциальных уравнений дробного порядка по времени и по пространству, а также построены локально-одномерные схемы для многомерного дифференциального уравнения с дробной производной по пространственной переменной.

Данная работа посвящена построению локально-одномерных схем для уравнения диффузии с частными производными дробных порядков по пространству и по времени в многомерной области. Для построенных ЛОС доказан принцип максимума, а также устойчивость и равномерная сходимость.

2. Постановка задачи

В цилиндре $Q_T = G \times (0;\ T]$, основанием которого является p-мерный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \ldots,\ x_p) : 0 < x_k < \ell_k,\ k = 1,\ 2,\ \ldots, p\}$ с границей Γ, рассмотрим задачу:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = Lu + f(x,t),\ (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

где

$Lu = \sum\limits_{k=1}^{p} L_k^{\beta_k} u,\ L_k^{\beta_k} u = \partial_{0x_k}^{\beta_k} u + q_k(x,t) u,$

$\partial_{0x_k}^{\beta_k} u = \dfrac{1}{\Gamma(2-\beta_k)} \int\limits_0^{x_k} \dfrac{u_{\eta\eta}(x_1, \ldots, x_{k-1}, \eta, x_{k+1}, \ldots, x_p, t)}{(x_k - \eta)^{\beta_k - 1}} d\eta$ — дробная производная Капуто порядка $\beta_k,\ 1 < \beta_k \leqslant 2$ по пространственной координате x_k,

$u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \partial_{0t}^{\alpha} u = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^{t} \dfrac{\dot{u}(x,\eta)}{(t-\eta)^{\alpha}} d\eta$ — дробная производная Капуто порядка $\alpha,\ 0 < \alpha < 1$, $\dot{u} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $q_k \geqslant q_* > 0$.

К уравнению (1) присоединим начальное и краевые условия

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_k} &= \lambda_{-k}u - \mu_{-k}(x,t),\ x_k = 0,\\ -\frac{\partial u}{\partial x_k} &= \lambda_{+k}u - \mu_{+k}(x,t),\ x_k = \ell_k, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{G}, \tag{3}$$

где $\lambda_{\pm k} \geqslant \lambda_* > 0$.

В дальнейшем будем полагать, что задача (1) — (3) имеет единственное достаточно гладкое решение, а также и входные данные задачи обладают необходимой гладкостью.

3. Локально-одномерная схема

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_k с шагом $h_k = \ell_k/N_k,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ p$:

$$\overline{\omega}_{h_k} = \{x_k^{(i_k)} = (i_k h_k : i_k = 0,1,\ldots,N_k)\},\ \overline{\omega} = \prod_{k=1}^{p} \overline{\omega}_{h_k}.$$

На отрезке $[0;\ T]$ введем равномерную сетку

$$\overline{\omega}_\tau = \{0, t_{j+k/p} = (j+k/p)\,\tau,\ j = 0,1,\ldots,j_0-1,\ k = 1,2,\ldots,p\},$$

содержащую наряду с узлами $t_j = j\tau$ фиктивные узлы $t_{j+k/p}$, $k = 1,2,\ldots,p-1$. Будем обозначать через ω_τ — множество узлов сетки $\overline{\omega}_\tau$, для которых $t > 0$.

В работе [18] показано, что дискретный аналог дробной производной Капуто порядка $\alpha,\ 0 < \alpha < 1$ имеет вид [19]:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^{t_{j+k/p}} \frac{\dot{u}(x,\eta)}{(t_{j+k/p}-\eta)^\alpha} d\eta = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(t^{1-\alpha}_{j+(k-s+1)/p} - t^{1-\alpha}_{j+(k-s)/p}\right) u_{\bar{t}}^{s/p} + O\left(\frac{\tau}{p}\right), \tag{4}$$

где $u_{\bar{t}}^{s/p} = \dfrac{u^{s/p} - u^{(s-1)/p}}{\tau/p}$, $u(t) \in C^2[0,T]$.

По аналогии с работой [39] покажем, что этот результат можно улучшить, если $u(t) \in C^3[0,T]$. Справедлива

Лемма 1. *Если $u(t) \in C^3[0,T]$, то*

$$\frac{1}{\Gamma(1-k)} \int\limits_0^{t_{j+k/p}} \frac{\dot{u}(x,\eta)}{(t_{j+k/p}-\eta)^\alpha} d\eta = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(t^{1-\alpha}_{j+(k-s+1)/p} - t^{1-k}_{j+(k-s)/p}\right) u_{\bar{t}}^{s/p} + O\left(\frac{\tau}{p}\right)^{2-\alpha}, \tag{5}$$

где $u_{\bar{t}}^{s/p} = \dfrac{u^{\frac{s}{p}} - u^{(s-1)/p}}{\tau/p}$.

Доказательство.

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^{t_{j+k/p}} \frac{\dot{u}(x,\eta)}{(t_{j+k/p}-\eta)^\alpha} d\eta = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \int\limits_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} \frac{\dot{u}(x,\eta)}{(t_{j+k/p}-\eta)^\alpha} d\eta =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \int\limits_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} \frac{\dot{u}(x,\bar{t}) + (\eta-\bar{t})\ddot{u}(x,\bar{t}) + O((\eta-\bar{t})^2)}{(t_{j+k/p}-\eta)^\alpha} d\eta =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \int\limits_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} \frac{\dot{u}(x,\bar{t})}{(t_{j+k/p}-\eta)^\alpha} d\eta + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \int\limits_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} \frac{(\eta-\bar{t})\ddot{u}(x,\bar{t})}{(t_{j+k/p}-\eta)^\alpha} d\eta + O\left(\left(\frac{\tau}{p}\right)^2\right),$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(t^{1-\alpha}_{j+(k-s+1)/p} - t^{1-\alpha}_{j+(k-s)/p}\right) u_{\bar{t}}^{s/p} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \int\limits_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} \frac{(\eta-\bar{t})\ddot{u}(x,\bar{t})}{(t_{j+k/p}-\eta)^\alpha} d\eta + O\left(\left(\frac{\tau}{p}\right)^2\right). \tag{6}$$

где $\bar{t} = t_{\frac{s}{p}-\frac{1}{2p}}$.

Оценим второе слагаемое в (6):

$$\left|\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \int\limits_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} \frac{(\eta-\bar{t})\ddot{u}(x,\bar{t})}{(t_{j+k/p}-\eta)^\alpha} d\eta\right| = \left|\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \ddot{u}(x,\bar{t}) \int\limits_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} \frac{\eta-\bar{t}}{(t_{j+k/p}-\eta)^\alpha} d\eta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{M}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \int\limits_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} \frac{\eta-\bar{t}}{(t_{j+k/p}-\eta)^\alpha} d\eta\right| =$$

$$= \frac{M}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left| \int\limits_{\bar{t}}^{t_{\frac{s}{p}}} \frac{\eta-\bar{t}}{(t_{j+k/p}-\eta)^\alpha} d\eta - \int\limits_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{\bar{t}} \frac{\bar{t}-\eta}{(t_{j+k/p}-\eta)^\alpha} d\eta \right| =$$

$$= \frac{2^\alpha M}{4\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{\tau}{p}\right)^{2-\alpha} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(\int\limits_0^1 \frac{z\,dz}{(2(pj+k-s)+1-z)^\alpha} - \int\limits_0^1 \frac{z\,dz}{(2(pj+k-s)+1+z)^\alpha} \right) =$$

$$= \frac{2^\alpha M}{4\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{\tau}{p}\right)^{2-\alpha} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(\int\limits_0^1 \frac{1}{(2(pj+k-s)+1-z)^\alpha} - \int\limits_0^1 \frac{1}{(2(pj+k-s)+1+z)^\alpha} \right) z\,dz =$$

$$= \frac{2^\alpha M}{4\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{\tau}{p}\right)^{2-\alpha} \int\limits_0^1 z \sum_{s=1}^{pj+k} \left(\frac{1}{(2(pj+k-s)+1-z)^\alpha} - \int\limits_0^1 \frac{1}{(2(pj+k-s)+1+z)^\alpha} \right) dz =$$

$$= \frac{2^\alpha M}{4\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{\tau}{p}\right)^{2-\alpha} \int\limits_0^1 \left(\frac{z}{(3-z)^\alpha} - \frac{z}{(2(pj+k)+1+z)^\alpha} \right) dz -$$

$$- \frac{2^\alpha M}{4\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{\tau}{p}\right)^{2-\alpha} \int\limits_0^1 z \sum_{s=1}^{pj+k} \left(\frac{1}{(2(pj+k-s)+1-z)^\alpha} - \frac{1}{(2(pj+k+1)+1+z)^\alpha} \right) dz \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^\alpha M}{4\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{\tau}{p}\right)^{2-\alpha}\int\limits_0^1 \frac{z\,dz}{(3-z)^\alpha} = \frac{2^\alpha[(\alpha-4)2^{1-\alpha}+3^{2-\alpha}]M}{4\Gamma(3-\alpha)}\left(\frac{\tau}{p}\right)^{2-\alpha},$$

где $M = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|\ddot{u}(x,\bar{t})|$.

Лемма доказана. □

Аналогичный результат можно получить и для дробной производной Капуто порядка β, $1<\beta\leqslant 2$, по пространственной переменной x. В работе [38] построен дискретный аналог дробной производной порядка β, $1<\beta\leqslant 2$, по пространственной переменной x:

$$\Delta_{0x_i}^\beta v = \frac{1}{\Gamma(3-\beta)}\sum_{s=1}^{i}\left(x_{i-s+1}^{2-\beta}-x_{i-s}^{2-\beta}\right)v_{\overline{x}x,s},\ 1<\beta\leqslant 2,\ v_{\overline{x}x,s} = \frac{u_{s+1}-2u_s+u_{s-1}}{h^2},$$

а также показано, что

$$\partial_{0x_i}^\beta v = \Delta_{0x_i}^\beta v + O(h), \tag{7}$$

при условии, что $v(x)\in C^3[0,\ell]$. Как и выше покажем, что этот результат также можно улучшить при $v(x)\in C^4[0,\ell]$.

Итак, справедлива

Лемма 2. *Для любой функции $v(x)\in C^4[0,\ell]$ справедливо равенство*

$$\partial_{0x_{i_k}}^{\beta_k} v_k = \frac{1}{\Gamma(3-\beta_k)}\sum_{s=1}^{i_k}\left(x_{i_k-s+1}^{2-\beta_k}-x_{i_k-s}^{2-\beta}\right)v_{\overline{x_k}x_k,s} + O(h_k^{3-\beta_k}),\ 1<\beta_k\leqslant 2.$$

Доказательство.

$$\partial_{0x_{i_k}}^{\beta_k} v_k = \frac{1}{\Gamma(2-\beta_k)}\int\limits_0^{x_{i_k}}\frac{v''(\xi)d\xi}{(x_{i_k}-\xi)^{\beta_k-1}} = \frac{1}{\Gamma(2-\beta_k)}\sum_{s=1}^{i_k}\int\limits_{x_{s-1}}^{x_s}\frac{v''(\xi)d\xi}{(x_{i_k}-\xi)^{\beta_k-1}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2-\beta_k)}\sum_{s=1}^{i_k}\int\limits_{x_{s-1}}^{x_s}\frac{v''(x_{s-1/2})+v'''(x_{s-1/2})(\xi-x_{s-1/2})+O((\xi-x_{s-1/2})^2)}{(x_{i_k}-\xi)^{\beta_k-1}}d\xi =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2-\beta_k)}\sum_{s=1}^{i} v_{\overline{x_k}x_k,s-1/2}\int\limits_{x_{s-1}}^{x_s}\frac{d\xi}{(x_{i_k}-\xi)^{\beta_k-1}} +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(2-\beta_k)}\sum_{s=1}^{i_k} v'''(x_{s-1/2})\int\limits_{x_{s-1}}^{x_s}\frac{(\xi-x_{s-1/2})}{(x_{i_k}-\xi)^{\beta_k-1}}d\xi + O(h^2).$$

Оценим величину

$$\left|\frac{1}{\Gamma(2-\beta_k)}\sum_{s=1}^{i_k} v'''(x_{s-1/2})\int\limits_{x_{s-1}}^{x_s}\frac{(\xi-x_{s-1/2})}{(x_{i_k}-\xi)^{\beta_k-1}}d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_k}{\Gamma(2-\beta)}\sum_{s=1}^{i_k}\left|\int\limits_{x_{s-1}}^{x_s}\frac{(\xi-x_{s-1/2})}{(x_{i_k}-\xi)^{\beta_k-1}}d\xi\right| =$$

$$= \frac{M_k}{\Gamma(2-\beta_k)} \sum_{s=1}^{i_k} \left| \int\limits_{x_{s-1/2}}^{x_s} \frac{\xi - x_{s-1/2}}{(x_i-\xi)^{\beta_k-1}} d\xi - \int\limits_{x_{s-1}}^{x_{s-1/2}} \frac{x_{s-1/2}-\xi}{(x_{i_k}-\xi)^{\beta_k-1}} d\xi \right| =$$

$$= \frac{2^{\beta_k-1} h^{3-\beta_k} M_k}{4\Gamma(2-\beta_k)} \sum_{s=1}^{i_k} \left| \int\limits_0^1 \frac{zdz}{(2(i_k-s)+1-z)^{\beta_k-1}} - \int\limits_0^1 \frac{zdz}{(2(i_k-s)+1+z)^{\beta_k-1}} \right| =$$

$$= \frac{2^{\beta_k-1} h_k^{3-\beta} M_k}{4\Gamma(2-\beta_k)} \int\limits_0^1 z \sum_{s=0}^{i_k-1} \left(\frac{1}{(2s+1-z)^{\beta_k-1}} - \frac{1}{(2s+1+z)^{\beta_k-1}} \right) dz =$$

$$= \frac{2^{\beta_k-1} h_k^{3-\beta_k} M_k}{4\Gamma(2-\beta_k)} \int\limits_0^1 z \left(\frac{1}{(1-z)^{\beta_k-1}} - \frac{1}{(2i_k-1+z)^{\beta_k-1}} \right) dz +$$

$$+ \frac{2^{\beta_k-1} h_k^{3-\beta_k} M_k}{4\Gamma(2-\beta_k)} \int\limits_0^1 z \sum_{s=1}^{i_k-1} \left(\frac{1}{(2s-1+z)^{\beta_k-1}} - \frac{1}{(2s+1-z)^{\beta_k-1}} \right) dz =$$

$$= \frac{2^{\beta_k-1} h^{3-\beta_k} M_k}{4\Gamma(2-\beta_k)} \int\limits_0^1 \left(\frac{z}{(1-z)^{\beta_k-1}} - \frac{z}{(2i-1+z)^{\beta_k-1}} \right) dz -$$

$$- \frac{2^{\beta_k-1} h_k^{3-\beta_k} M_k}{4\Gamma(2-\beta_k)} \int\limits_0^1 z \sum_{s=1}^{i_k-1} \left(\frac{1}{(2s-1+z)^{\beta_k-1}} - \frac{1}{(2s+1-z)^{\beta_k-1}} \right) dz \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{\beta_k-1} h_k^{3-\beta_k} M_k}{4\Gamma(2-\beta_k)} \int\limits_0^1 \left(\frac{z}{(1-z)^{\beta_k-1}} - \frac{z}{(2i_k-1+z)^{\beta_k-1}} \right) dz =$$

$$= \frac{2^{\beta_k-1} h_k^{3-\beta_k} M_k}{4\Gamma(2-\beta_k)} \int\limits_0^1 \frac{zdz}{(1-z)^{\beta_k-1}} - \frac{2^{\beta_k-1} h^{3-\beta_k} M_k}{4\Gamma(2-\beta_k)} \int\limits_0^1 \frac{zdz}{(2i_k-1+z)^{\beta_k-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{\beta_k-1} h_k^{3-\beta_k} M_k}{4\Gamma(2-\beta_k)} \int\limits_0^1 \frac{zdz}{(1-z)^{\beta_k-1}} =$$

$$= \frac{2^{\beta_k-1} h_k^{3-\beta_k} M_k}{4\Gamma(2-\beta_k)} \frac{1}{(2-\beta_k)(3-\beta_k)} = \frac{2^{\beta_k-1} M_k}{4\Gamma(4-\beta_k)} h_k^{3-\beta_k},$$

где $M_k = \max\limits_{0\leqslant x_k\leqslant \ell_k} |v'''(x_k)|$.

Лемма доказана. □

По аналогии с ([41], с. 522) уравнению (1) поставим в соответствие цепочку одномерных уравнений

$$\mathscr{P}_k u = 0, \text{ где } \mathscr{P}_k u = \frac{1}{p} \partial_{0t}^{\alpha} u - L_k^{\beta_k} u - f_k, \ \sum_{k=1}^{p} f_k = f.$$

Уравнение (1) перепишем в виде

$$\mathscr{P} u = \partial_{0t}^{\alpha} u - Lu - f = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^{p}\mathscr{P}_k u = 0, \quad \mathscr{P}_k u = \frac{1}{p}\partial_{0t}^{\alpha}u - L_k u - f_k.$$

На каждом полуинтервале $\Delta_k = \left(t_{j+(k-1)/p},\ t_{j+k/p}\right],\ k = 1, 2, \ldots,\ p$, будем последовательно решать задачи

$$\mathscr{P}_k v_{(k)} = \frac{1}{p}\,\partial_{0t}^{\alpha}v_{(k)} - L_k^{\beta_k}v_{(k)} - f_k = 0,\ t \in \Delta_k,\ k = 1, 2, \ldots, p, \tag{8}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_{(k)}}{\partial x_k} = \lambda_{-k}v_{(k)} - \mu_{-k}(x,t),\ x_k = 0, \\ -\dfrac{\partial v_{(k)}}{\partial x_k} = \lambda_{+k}v_{(k)} - \mu_{+k}(x,t),\ x_k = \ell_k, \end{cases} \tag{9}$$

полагая при этом следующее:

$$\begin{gathered} v_{(1)}(x,0) = u_0(x), \\ v_{(k)}(x,t_{j+(k-1)/p}) = v_{(k-1)}(x,t_{j+(k-1)/p}),\ k = 2, 3,\ \ldots,\ p, \\ v_{(1)}(x,t_j) = v_{(p)}(x,t_j),\ j = 1, 2,\ \ldots,\ j_0 - 1. \end{gathered} \tag{10}$$

Каждое из уравнений (8) номера k аппроксимируем неявной двухслойной схемой

$$\Delta_{0t_{j+k/p}}^{\alpha}y = \Lambda_k\left(\sigma_k y^{j+k/p} + (1-\sigma_k)y^{j+(k-1)/p}\right) + \varphi_k^{j+k/p},\ k = 1, 2, \ldots, p, \tag{11}$$

где

$$\Delta_{0t_{j+k/p}}^{\alpha}y = \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t_{j+(k-s+1)/p}^{1-\alpha} - t_{j+(k-s)/p}^{1-\alpha}\right)y_t^{\frac{s}{p}},$$

$$\Lambda_k y = \frac{1}{\Gamma(3-\beta_k)}\sum_{s=1}^{i_k}\left(x_{i_k-s+1}^{2-\beta_k} - x_{i_k-s}^{2-\beta_k}\right)y_{\bar{x}_k x_k,s} - d_k y,$$

$$y^{(\sigma_k)} = \sigma_k y^{j+k/p} + (1-\sigma_k)y^{j+(k-1)/p},\ 0 \leqslant \sigma_k \leqslant 1,$$

$$\begin{cases} \left(y_{x_k,0}^{j+k/p} - \lambda_{-k}y_0^{j+k/p}\right)^{\sigma_k} = -\mu_{-k},\ x_k = 0, \\ -\left(y_{\bar{x}_k,N_k}^{j+k/p} - \lambda_{+k}y_{N_k}^{j+k/p}\right)^{\sigma_k} = -\mu_{+k},\ x_k = \ell_k, \end{cases} \tag{12}$$

$$y(x,0) = u_0(x). \tag{13}$$

Среди неявных схем наибольшее распространение в вычислительной практике получили симметричная схема ($\sigma_k = 0,5$) и чисто неявная схема ($\sigma_k = 1$) (см., например, [42] стр. 248). В дальнейшем для простоты будем рассматривать случай чисто неявных схем.

4. Погрешность аппроксимации ЛОС

Подставляя $y^{j+k/p} = z^{j+k/p} + u^{j+k/p}$ в уравнение (11), получим уравнение для погрешности $z^{j+k/p}$:

$$\Delta_{0t_{j+k/p}}^{\alpha}z = \Lambda_k z^{j+k/p} + \psi_k^{j+k/p},\ k = 1, 2, \ldots, p, \tag{14}$$

где

$$\psi_k^{j+k/p} = \Lambda_k u^{j+k/p} + \varphi_k^{j+k/p} - \Delta_{0t_{j+k/p}}^{\alpha}u.$$

Обозначив через

$$\overset{\circ}{\psi}_k = \left(L_k^{\beta_k} u + f_k - \frac{1}{p}\partial_{0t}^{\alpha} u\right)^{j+1/2}$$

заметим, что

$$\sum_{k=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}_k = 0, \text{ если } \sum_{k=1}^{p} f_k = f.$$

Представим $\psi_k = \psi_k^{j+k/p}$ в виде

$$\psi_k = \overset{\circ}{\psi}_k + \overset{*}{\psi}_k,$$

тогда

$$\psi_k^{j+k/p} = \left(\Lambda_k u^{j+k/p} + \varphi_k^{j+k/p} - \Delta_{0t_{j+k/p}}^{\alpha} u\right) -$$

$$- \left(L_k^{\beta_k} u + f_k - \frac{1}{p}\partial_{0t}^{\alpha} u\right)^{j+1/2} + \overset{\circ}{\psi}_k =$$

$$= \left(\Lambda_k u^{j+k/p} - \left(L_k^{\beta_k} u\right)^{j+1/2}\right) + \left(\varphi_k^{j+k/p} - f_k^{1+1/2}\right) -$$

$$- \left(\Delta_{0t_{j+k/p}}^{\alpha} u - \frac{1}{p}\left(\partial_{0t}^{\alpha} u\right)^{j+1/2}\right) + \overset{\circ}{\psi}_k = \overset{\circ}{\psi}_k + \overset{*}{\psi}_k,$$

где

$$\overset{*}{\psi}_k = \left(\Lambda_k u^{j+k/p} - \left(L_k^{\beta_k} u\right)^{j+1/2}\right) + \left(\varphi_k^{j+k/p} - f_k^{j+1/2}\right) -$$

$$- \left(\Delta_{0t_{j+k/p}}^{\alpha} u - \frac{1}{p}\left(\partial_{0t}^{\alpha} u\right)^{j+1/2}\right).$$

Из определения Λ_k и φ_k следует, что

$$\overset{*}{\psi}_k = O(h_k^{3-\beta_k} + \tau^{2-\alpha}), \ \overset{\circ}{\psi}_k = O(1),$$

$$\sum_{k=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}_k = 0.$$

Таким образом,

$$\psi = \sum_{k=1}^{p} \psi_k = \sum_{k=1}^{p} (\overset{\circ}{\psi}_k + \overset{*}{\psi}_k) = \sum_{k=1}^{p} \overset{*}{\psi}_k = O\left(|h|^{3-\beta_k} + \tau^{2-\alpha}\right).$$

Граничные условия запишем в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{x_k,0}^{j+k/p} - \lambda_{-k} z_0^{j+k/p} = \psi_{-k}, \ \psi_{-k} = \lambda_{-k} u_0^{j+k/p} - u_{x_k,0}^{j+k/p} - \mu_{-k}, \\ z_{\overline{x}_k,N_k}^{j+k/p} - \lambda_{+k} z_{N_k}^{j+k/p} = \psi_{+k}, \ \psi_{+k} = \lambda_{+k} u_{N_k}^{j+k/p} - u_{\overline{x}_k,N_k}^{j+k/p} - \mu_{+k}, \end{array} \right. \tag{15}$$

$$z(x,0) = 0, \tag{16}$$

где

$$\psi_{-k}, \ \psi_{+k} = O(h).$$

5. Устойчивость ЛОС

Чтобы получить оценку для решения разностной задачи (11) — (13), приведем уравнение и граничные условия к каноническому виду ([40], стр. 339):
(17)
$$A(P)y(P)=\sum_{Q\in Ш'(P)}B(P,Q)y(Q)+F(P),\ P\in\omega,$$
$$A(P)>0,\ B(P,Q)>0,\ D(P)=A(P)-\sum_{Q\in Ш'(P)}B(P,Q)\geqslant 0 \text{ для всех } P\in\omega,$$

ω — множество узлов сетки в некоторой ограниченной области n - мерного евклидова пространства.

Каноническую форму уравнения (11) запишем в виде

$$\left(\frac{2\tau^{\alpha}}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}}-\frac{(2^{2-\beta_k}-1)\tau^{\alpha}}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}}+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}+d_k\right)y_{i_k}^{j+k/p}=\frac{\tau^{\alpha}}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}}y_{i_k+1}^{j+k/p}+$$
$$+\left(\frac{\tau^{\alpha}}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}}-\frac{2(2^{2-\beta_k}-1)\tau^{\alpha}}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}}+\frac{\tau^{\alpha}(3^{2-\beta_k}-2^{2-\beta_k})}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}}\right)y_{i_k-1}^{j+k/p}+$$
$$+\left(\frac{\tau^{\alpha}(2^{2-\beta_k}-1)}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}}-\frac{2\tau^{\alpha}(3^{2-\beta_k}-2^{2-\beta_k})}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}}+\frac{\tau^{\alpha}(4^{2-\beta_k}-3^{2-\beta_k})}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}}\right)y_{i_k-2}^{j+k/p}+\ldots+$$
$$+\left(\frac{\tau^{\alpha}[(i_k-3)^{2-\beta_k}-(i_k-4)^{2-\beta_k}]}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}}-\frac{2\tau^{\alpha}[(i_k-2)^{2-\beta_k}-(i_k-3)^{2-\beta_k}]}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}}+\right.$$
$$\left.+\frac{\tau^{\alpha}[(i_k-1)^{2-\beta_k}-(i_k-2)^{2-\beta_k}]}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}}\right)y_3^{j+k/p}+\left(\frac{\tau^{\alpha}[(i_k-2)^{2-\beta_k}-(i_k-3)^{2-\beta_k}]}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}}-\right.$$
$$\left.-\frac{2\tau^{\alpha}[(i_k-1)^{2-\beta_k}-(i_k-2)^{2-\beta_k}]}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}}+\frac{\tau^{\alpha}[i_k^{2-\beta_k}-(i_k-1)^{2-\beta_k}]}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}}\right)y_2^{j+k/p}+$$
$$+\left(\frac{\tau^{\alpha}[(i_k-1)^{2-\beta_k}-(i_k-2)^{2-\beta_k}]}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}}-\frac{2\tau^{\alpha}[i_k^{2-\beta_k}-(i_k-1)^{2-\beta_k}]}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}}+\right.$$
$$\left.+(1-\lambda_{-k}h_k)\frac{\tau^{\alpha}[i_k^{2-\beta_k}-(i_k-1)^{2-\beta_k}]}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta}}\right)y_1^{j+k/p}+$$
$$+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\Big\{\left[(j+1)^{1-\alpha}-j^{1-\alpha}\right]y_{i_k}^0+\left[-(j+1)^{1-\alpha}+2j^{1-\alpha}-(j-1)^{1-\alpha}\right]y_{i_k}^1+$$
$$+\ldots+(-2^{1-\alpha}+2)y_{i_k}^{j+(k-1)/p}\Big\}+\varphi_{i_k}\tau^{\alpha}+\frac{\mu_{-k}h_k}{1+\lambda_{-k}h_k}\frac{\tau^{\alpha}(x_{i_k}^{2-\beta_k}-x_{i_k-1}^{2-\beta_k})}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^2}. \tag{18}$$

Заметим, что [18]
$$-(j+1)^{1-\alpha}+2j^{1-\alpha}-(j-1)^{1-\alpha}>0,\ j\geqslant 1,$$
$$A(P)=\frac{2\tau^{\alpha}}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}}-\frac{(2^{2-\beta_k}-1)\tau^{\alpha}}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}}+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}+d_k>0$$

и все коэффициенты, стоящие перед $y_s^{j+k/p}$, $s = 2, 3, \dots, i_k + 1$, положительны, а коэффициент при $y_1^{j+k/p}$ положителен при малых h_k. При написании канонической формы (18) был использован разностный аналог граничного условия при $x_k = 0$, $y_{x_k,0} = \lambda_{-k} y_0 - \mu_{-k}$, или $y_0 = (1-\lambda_{-k}h_k)y_1 + \dfrac{\mu_{-k}h_k}{1+\lambda_{-k}h_k}$, $h_k < \dfrac{1}{\lambda_{-k}}$.

Нетрудно заметить, что

$$D(P(x_{i_k}, t_{j+1})) = \frac{\lambda_{-k}\tau^\alpha (x_{i_k}^{2-\beta_k} - x_{i_k-1}^{2-\beta_k})}{\Gamma(3-\beta_k)h_k} + d_k > 0,$$

$$D(P(0, t_{j+1})) = \lambda_{-k},\ D(P(\ell_k, t_{j+1})) = \lambda_{+k},\ \beta_{\pm k} \geqslant \lambda_* > 0.$$

Замечание 1. *В общем случае схемы с весами, когда* $0 \leqslant \sigma_k \leqslant 1$, *коэффициенты* $B(P,Q) > 0$, *если*

$$\tau^\alpha \leqslant \frac{\Gamma(3-\beta_k)(2-2^{1-\alpha})h_k^{\beta_k}}{(1-\sigma_k)(3-2^{2-\beta_k})}, \tag{19}$$

Т.о., при условии (19) на шаг сетки по времени принцип максимума сохраняется и в общем случае.

При $\alpha \to 1, \beta_k \to 2,\ k = 1, 2, \dots, p$, *(19) переходит в хорошо известное условие*

$$\tau \leqslant \frac{h_k^2}{2(1-\sigma_k)}.$$

Итак, так как $D(P) > 0$ на всей сетке $\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$, то при каждом $k = 1, 2, \dots, p$ для решения задачи (11) — (13) из принципа максимума следует оценка

$$\|y^{j+k/p}\|_{C_h} \leqslant \|u_0(x)\|_{C_h} + \frac{2}{\lambda_*}\sum_{k=1}^{p}\max_{t\in\omega_\tau}\left(\|\mu_{-k}(t)\|_{C_{\gamma_k^-}} + \|\mu_{+k}(t)\|_{C_{\gamma_k^+}}\right) +$$

$$+\frac{\ell_k^{\beta_k-1}\Gamma(2-\beta_k)}{\lambda_*}\max_{t\in\omega_\tau}\|\varphi_k^{j+k/p}\|_{C_h}, \tag{20}$$

где γ_k^- — множество левых граничных узлов, γ_k^+ — множество правых граничных узлов, $\gamma = \gamma_k^- + \gamma_k^+$, где $\|y\|_{C_h} = \max\limits_{x\in\omega_h}|y(x)|$.

Суммируя (20) по всем k от 1 до p, получим

$$\sum_{k=1}^{p}\|y^{j+k/p}\|_{C_h} \leqslant p\|u_0(x)\|_{C_h} + \frac{2}{\lambda_*}\sum_{k=1}^{p}\max_{t\in\omega_\tau}\left(\|\mu_{-k}(t)\|_{C_{\gamma_k^-}} + \|\mu_{+k}(t)\|_{C_{\gamma_k^+}}\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{p}\frac{\ell_k^{\beta_k-1}\Gamma(2-\beta_k)}{\lambda_*}\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\|\varphi^{j'+k/p}\|_{C_h},$$

или

$$\|y^{j+1}\|_{C_h} \leqslant p\|u_0(x)\|_{C_h} + \frac{2}{\lambda_*}\sum_{k=1}^{p}\max_{t\in\omega_\tau}\left(\|\mu_{-k}(t)\|_{C_{\gamma_k^-}} + \|\mu_{+k}(t)\|_{C_{\gamma_k^+}}\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{p}\frac{\ell_k^{\beta_k-1}\Gamma(2-\beta_k)}{\lambda_*}\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\|\varphi^{j'+k/p}\|_{C_h}. \tag{21}$$

6. Равномерная сходимость ЛОС

Обозначим через $z_{(k)} = z^{j+k/p}$ и представим решение задачи (14) — (16) в виде суммы

$$z_{(k)} = v_{(k)} + \eta_{(k)},$$

где $\eta_{(k)}$ определяется условиями

$$\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+(k-s+1)/p} - t^{1-\alpha}_{j+(k-s)/p}\right)\eta_{\bar t}^{\frac{s}{p}} = \overset{\circ}{\psi}_k,\ x\in\omega_{h_k}+\gamma_{h_k},\ k=1,2,\ldots,p,$$

$$\eta(x,0)=0.$$

По аналогии с [19], [20] доказывается, что

$$\eta_{(k)}^{j+k/p} = O(\tau^\alpha),\ k=1,2,\ldots,p,\quad j=0,1,2,\ldots,j_0-1.$$

Функция $v_{(k)}$ определяется условиями

(22)

$$\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+(k-s+1)/p} - t^{1-\alpha}_{j+(k-s)/p}\right)\eta_{\bar t}^{\frac{s}{p}} = \Lambda_k v_{(k)} + \widetilde{\psi}_k,\ \widetilde{\psi}_k = \Lambda_k\eta_{(k)} + \overset{*}{\psi}_k,$$

(23)
$$\begin{cases} v_{x_k,0} = \lambda_{-k}v_0 + \widetilde{\psi}_{-k},\ \widetilde{\psi}_{-k} = -\eta^{j+k/p}_{x_k,0} + \lambda_{-k}\eta_{(k)} - \psi_{-k}, \\ -v_{\bar x_k,N_k} = \lambda_{+k}v_{N_k} + \widetilde{\psi}_{+k},\ \widetilde{\psi}_{+k} = \eta^{j+k/p}_{\bar x_k,N_k} + \lambda_{+k}\eta_{(k)} - \psi_{+k}, \end{cases}$$

(24)
$$v_{(k)}(x,0)=0.$$

Воспользуемся теперь (21) для оценки решения задачи (22) – (24) $v_{(k)}$:

$$\|v^{j+1}\|_{C_h} \leqslant \frac{2}{\lambda_*}\sum_{k=1}^{p}\max_{t\in\omega_\tau}\left(\|\widetilde{\psi}_{-k}(t)\|_{C_{\gamma_k^-}} + \|\widetilde{\psi}_{+k}(t)\|_{C_{\gamma_k^+}}\right) +$$

(25)
$$+\sum_{k=1}^{p}\frac{\ell_k^{\beta_k-1}\Gamma(2-\beta_k)}{\lambda_*}\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\|\widetilde{\psi}^{j'+k/p}\|_{C_h}.$$

Если существуют непрерывные в замкнутой области $\overline{Q}_T$ производные $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x_k^2\partial x_\beta^2}$, $k\neq\beta$, то $\Lambda_k\eta_{(k)} = -\tau^\alpha\Lambda_k\left(\overset{\circ}{\psi}_{k+1}+\ldots+\overset{\circ}{\psi}_p\right) = O(\tau^\alpha)$, $\widetilde{\psi}_{-k} = \widetilde{\psi}_{+k} = O(h)$.

Поэтому из оценки (25) получаем

$$\|z^j\|_{C_h} \leqslant \|v^j\|_{C_h} \leqslant M\left(\frac{h}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^{2\alpha-1}\right),$$

так как $\eta^j = 0$ для всех $j=0,1,\ldots,j_0$.

Таким образом, имеет место следующая Таким образом, имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть задача (1) — (3) имеет единственное непрерывное в $\overline{Q}_T$ решение $u(x,t)$ и существуют непрерывные в $\overline{Q}_T$ производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2\partial x_s^2},\ \frac{\partial^{2+\alpha}u}{\partial x_k^2\partial t^\alpha},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2},\ 1\leqslant k,s\leqslant p,\ k\neq s.$$

Тогда локально-одномерная схема (11) — (13) равномерно сходится со скоростью

$$O\left(\frac{h}{\tau^{1-\alpha}}+\tau^{2\alpha-1}\right),\ h=O(\tau^{1-\alpha}),\ 1/2<\alpha\leqslant 1,$$

так что

$$\|y^j-u^j\|_{C_h}\leqslant M\left(\frac{h}{\tau^{1-\alpha}}+\tau^{2\alpha-1}\right),$$

где $h=\max\limits_k h_k$, $M>0$, M *— не зависит от* h *и* τ.

References

[1] K. V. Chukbar, "Stochastic transport and fractional derivatives," Zh. Eksp. Teor. Fiz. 108 (11), 1875–1884 (1995).

[2] V. L. Kobelev, Ya. L. Kobelev, and E. P. Romanov, "Self-maintained processes in the case of nonlinear fractal diffusion," Dokl. Phys. 44, 752–753 (1999).

[3] V. L. Kobelev, Ya. L. Kobelev, and E. P. Romanov, "Non-Debye relaxation and diffusion in fractal space," Dokl. Phys. 43, 752–753 (1998).

[4] V. M. Goloviznin, V. P. Kiselev, I. A. Korotkin, and Yu. P. Yurkov, "Pryamye zadachi klassicheskogo perenosa radionuklidov v geologicheskikh formatsiyakh," Izv. Ross. Akad. Nauk, Energ., No. 4, 121–130 (2004).

[5] V. M. Goloviznin, V. P. Kiselev, I. A. Korotkin, and Yu. P. Yurkov, "Pryamye zadachi klassicheskogo perenosa radionuklidov v geologicheskikh formatsiyakh," Izv. Ross. Akad. Nauk, Energ., No. 4, 121–130 (2004).

[6] R. R. Nigmatulin, "Relaxation features in a system with remnant memory," Fiz. Tverd. Tela 27 (5), 1583–1585 (1985).

[7] V. Kh. Shogenov, A. A. Akhkubekov, and R. A. Akhkubekov, "Fractional differentiation method in the theory of Brownian motion," Izv. Vyssh. Uch. Zaved. Sev.-Kav. Reg., No. 1, 46–49 (2004).

[8] V. V. Uchaikin, "Anomalous diffusion of particles with a finite free-motion velocity," Theor. Math. Phys. 115 (1), 496–501 (1998).

[9] V. Yu. Zaburdaev and K. V. Chukbar, "Enhanced superdiffusion and finite velocity of Levy flights," J. Exp. Theor. Phys. 94 (2), 252–259 (2002).

[10] Klafter J., Shlesinger M.F., Zumofen G., Beyond Brownian Motion // Phys. Today. 1996. V. 49. №2. P. 33 — 39.

[11] Mainardi F., Luchko Y., Pagnini G. The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2002. Vol. 4. №2. P. 153 — 192.

[12] Scalas E., Gorenflo R., Mainardi F. Uncoupled continuous-time random walks: solution and limiting behaviour of the master equation// Phys. Rev. E. — 2004. Vol. 69. — P.011107/1 — 8.

[13] Zhang Y., Benson D.A., Meerschaert M.M., Scheffler H.P., On using random walks to solve the space fractional advectiona-dispersion equations // J. Stst. Phys. — 2006. – Vol. 123. №1. — P. 89 — 110.

[14] N. G. Abrashina-Zhadaeva and I. A. Timoshchenko, "Finite-difference schemes for a diffusion equation with fractional derivatives in a multidimensional domain," Differ. Equations 49 (7), 789–795 (2013).

[15] Bangti Jin, Raytcho Lazarov, Zhi Zhou, A Petrov-Galerkin finite element method for fractional convection-diffusion equations, SIAM J. Nummer. Anal. Vol. 54, №1, (2014) pp. 481 — 503.

[16] Bangti Jin, Raytcho Lazarov, Josef Pasciak, Zhi Zhou, Error analysis of a finite element method for the space-fractional parabolic equation, SIAM J. Nummer. Anal. Vol. 52, №5, (2016) pp. 2272 — 2294.

[17] Bangti Jin, Raytcho Lazarov, An analysis of the L_1 scheme for the subdiffusion equation with nonsmooth data, IMA Journal of Numerical Analysis (2015) Page 1 of 25.

[18] F. I. Taukenova and M. Kh. Shkhanukov-Lafishev, “Difference methods for solving boundary value problems for fractional differential equations,” Comput. Math. Math. Phys. 46 (10), 1785–1795 (2006).

[19] M. M. Lafisheva and M. Kh. Shkhanukov-Lafishev, “Locally one-dimensional difference schemes for the fractional order diffusion equation,” Comput. Math. Math. Phys. 48 (10), 1875–1884 (2008).

[20] A. K. Bazzaev and M. Kh. Shkhanukov-Lafishev, “Locally one-dimensional scheme for fractional diffusion equations with Robin boundary conditions,” Comput. Math. Math. Phys. 50 (7), 1141–1149 (2010).

[21] A. K. Bazzaev, A. B. Mambetova, and M. Kh. Shkhanukov-Lafishev, “Locally one-dimensional scheme for fractional-order heat equation with concentrated heat capacity,” Comput. Math. Math. Phys. 52 (9), 1656–1665 (2012).

[22] A. K. Bazzaev, “Difference schemes for fractional-order diffusion equation with Robin boundary conditions in a multidimensional domain,” Ufim. Mat. Zh. 5 (1), 11–16 (2013).

[23] A. K. Bazzaev and M. Kh. Shkhanukov-Lafishev, “Locally one-dimensional schemes for the diffusion equation with a fractional time derivative in an arbitrary domain,” Comput. Math. Math. Phys. 56 (1), 106–115 (2016).

[24] Povstenko Y., Axisymmetric Solutions to Fractional Diffusion-Wave Equation in a Cylinder Under Robin Boundary Condition, Eur. Phys. J.-Spec. Top., 222:8 (2013), 1767 — 1777.

[25] Povstenko Yu., Time-Fractional Heat Conduction in an Infinite Medium with a Spherical Hole Under Robin Boundary Condition, Fract. Calc. Appl. Anal., 16:2 (2013), 354 — 369

[26] Ch. Tadjeran, M. Meerschaert, H. Scheffler, A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation, Journal of Computational Physics 213 (2006) 205 — 213.

[27] Yu. Luchko, Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation. J. Math. Anal. Appl. 351 (2009), 218 — 223.

[28] Yu. Luchko, Boundary Value Problems For The Generalized Time-Fractional Diffusion Equation Of Distributed Order. Fractional Calculus and Applied Analysis. Vol. 12, Number 4 (2009), 409 — 422.

[29] Yu. Luchko, Maximum principle and its application for the time-fractional diffusion equations. Fractional Calculus and Applied Analysis. Vol. 14, Number 1 (2011), 409 — 422.

[30] Yu. Luchko, Some uniqueness and existence results for the initial-boundary-value problems for the generalized time-fractional diffusion equation. Computers and Mathematics with Applications 59 (2010) 1766 — 1772.

[31] Juan J. Nieto, Maximum principles for fractional differential equations derived from Mittag - Leffler functions. Applied Mathematics Letters 23 (2010) 1248 — 1251.

[32] Ye, H., Liu, F., Anh, V., Turner, I. (2014) Maximum principle and numerical method for the multi-term time-space Riesz-Caputo fractional differential equations. Applied Mathematics and Computation, 227, pp. 531 — 540.

[33] Meerschaert, Mark M. et al. “Finite difference methods for two-dimensional fractional dispersion equation.” Journal of Computational Physics 211 (2006): 249 — 261.

[34] W.Tian, H.Zhou, W.Deng. A class of second order difference approximation for solving space fractional diffusion equations. Math. Comp. 84 1703 — 1727 (2015).

[35] X.Q. Jin, F.R. Lin, Z. Zhao Preconditioned iterative methods for two-dimensional space-fractional diffusion equations. Commun. Comput. Phys. 18(2), 469 — 488 (2015)

[36] X.L. Lin, M.K. Ng. A fast solver multidimensional time-space fractional diffusion equation with variable coefficients. Comput. Math. Appl. 78, 1477 — 1489 (2017).

[37] X.L. Lin, M.K. Ng., H.W. Sun. Stability and convergence analysis of finite difference schemes for time-dependent space-fractional diffusion equation with variable diffusion coefficients. J. Sci. Comput. 75, 1102 — 1127 (2018).

[38] A. K. Bazzaev, M. Kh. Shhanukov-Lafishev, “On the convergence of difference schemes for fractional differential equations with Robin boundary conditions”, Comput. Math. Math. Phys., 57:1 (2017), 133 — 144

[39] A. A. Alikhanov, “Stability and convergence of difference schemes for boundary value problems for the fractional-order diffusion equation”, Comput. Math. Math. Phys., 56:4 (2016), 561 — 575

[40] A. A. Samarskii and A. V. Gulin, Stability of Difference Schemes (Nauka, Moscow, 1973) [in Russian].

[41] A. A. Samarskii, The Theory of Difference Schemes (Nauka, Moscow, 1977; Marcel Dekker, New York, 2001).

[42] A.A. Samarskiy, P.N. Vabishchevich, Vychislitel'naya teploperedacha (Computational heat transfer). — Moscow: Editorial URSS, 2003. — 784 c.

Alexander K. Bazzaev
1) North Ossetian State University after K.L. Khetagurov,
Vatutina str. 44 — 46,
362025, North Ossetia - Alania, Vladikavkaz, Russia,
2) Vladikavkaz Institute of Management,
Borodinskaya str. 14,
362025, North Ossetia - Alania, Vladikavkaz, Russia
E-mail address: a.k.bazzaev@yandex.ru