S ⓔ MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 123–456 (2023) УДК 517.958+517.984.5
DOI 10.33048/semi.2023.16.xxx MSC 35Q35, 35P99

ЗАДАЧА О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ СМЕСИ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Д.А. ЗАКОРА

Abstract. In this paper, we study the problem on small motions and normal oscillations of a homogeneous mixture of several viscous compressible fluids filling a bounded domain of three-dimensional space with an infinitely smooth boundary. The boundary condition of slippage without shear stresses is considered. It is proved that the essential spectrum of the problem is a finite set of segments located on the real axis. The discrete spectrum lies on the real axis, with the possible exception of a finite number of complex conjugate eigenvalues. The spectrum of the problem contains a subsequence of eigenvalues with a limit point at infinity and a power-law asymptotic distribution. The asymptotic behavior of solutions to the evolution problem is studied.

Keywords: mixture of fluids, compressible viscous fluid, spectral problem, essential spectrum, discrete spectrum, solution asymptotics.

1. Введение

1.1. **Формулировка нелинейной динамической задачи.** Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$ заполнена гомогенной смесью нескольких вязких сжимаемых жидкостей. Введём систему координат $Ox_1x_2x_3$ так, что ось Ox_3 направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится внутри области Ω. Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор, нормальный к границе $\partial\Omega$ и направленный вне области Ω.

Zakora, D.A., The problem on small motions of a mixture of viscous compressible fluids.

Поступила 17 января 2023 г., опубликована 08 февраля 2023 г.

Баротропное движение смеси $n \geqslant 2$ жидкостей описывается следующей системой уравнений[1]:

$$R_i \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + R_i(\mathbf{u}_i \cdot \nabla)\mathbf{u}_i = \operatorname{div}\Big(- P_i I_3 + \sum_{j=1}^{n} \sigma^{ij}(\mathbf{u}_j)\Big) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + R_i \mathbf{F}_i,$$

$$(1) \quad \frac{\partial R_i}{\partial t} + \operatorname{div}(R_i \mathbf{u}_i) = 0, \quad (t,x) \in [0,+\infty) \times \Omega, \quad i = 1,\dots,n,$$

где $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(t,x) = \big(u_{i1}(t,x); u_{i2}(t,x); u_{i3}(t,x)\big)^\tau$ $(x = (x_1;x_2;x_3) \in \Omega)$ — поле скоростей i-й компоненты смеси (символом τ обозначена операция транспонирования), $R_i = R_i(t,x)$ — плотность, $P_i = P_i(t,x)$ — давление, $a_{ij} = a_{ji} \geqslant 0$ — коэффициенты, отвечающие за интенсивность обмена импульсом между составляющими смеси, $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(t,x)$ — известные поля внешних массовых сил. Тензоры напряжений $\mathbf{T}_i$ и тензоры вязких напряжений $\mathbf{S}_i$ определяются равенствами[2]:

$$(2) \quad \mathbf{T}_i := -P_i I_3 + \mathbf{S}_i, \quad \mathbf{S}_i := \sum_{j=1}^{n} \sigma^{ij}(\mathbf{u}_j), \quad \sigma^{ij}(\mathbf{u}) := \lambda_{ij} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}) I_3 + 2\mu_{ij} e(\mathbf{u}),$$

где I_3 — единичная матрица в $\mathbb{R}^3$, μ_{ij}, λ_{ij} — коэффициенты матриц вязкостей $\mathbf{M} := \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\mathbf{\Lambda} := \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Матрицы вязкостей подчинены следующим условиям:

$$(3) \qquad \mathbf{M} > 0, \quad 2\mathbf{M} + 3\mathbf{\Lambda} > 0.$$

Предположим, что давление в каждой компоненте смеси пропорционально плотности:

$$(4) \qquad P_i = c_i R_i, \quad c_i > 0, \quad (t,x) \in [0,+\infty) \times \Omega, \quad i = 1,\dots,n.$$

Линеаризованная относительно состояния покоя система (1) будет рассматриваться с граничными условиями непротекания для каждой компоненты смеси и нулевыми касательными напряжениями:

$$(5) \qquad \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbf{T}_i \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad (t,x) \in [0,+\infty) \times \partial\Omega, \quad i = 1,\dots,n,$$

где символ $\times$ означает векторное произведение. В дальнейшем граничное условие (5) с учётом (2) будет переписано в более удобной для вычислений форме.

Система уравнений (1) — один из вариантов описания движения многокомпонентных жидкостных смесей и моделирует движения гомогенной смеси вязких сжимаемых жидкостей, многоскоростная модель (см. [24]). Это означает, что в каждой точке пространства присутствуют все компоненты смеси, которые находятся в одной фазе, но имеют каждая свою локальную скорость движения; взаимодействие между компонентами осуществляется через обмен

---

[1] Пусть A, B — матрицы, действующие в $\mathbb{R}^m$. Положим $\operatorname{div} A := \sum_{i=1}^{m} \mathbf{e}_i \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}$, определим операцию $A : B := \operatorname{tr}(A^\tau B) = \sum_{i,j=1}^{m} A_{ij} B_{ij}$.

[2] Для поля $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)^\tau$ определим набор коэффициентов $e_{lk}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right)$ $(l,k = 1,2,3)$ тензора скоростей деформаций $e(\mathbf{u})$. Через $\operatorname{tr} e(\mathbf{u}) := \sum_{s=1}^{3} e_{ss}(\mathbf{u}) \equiv \operatorname{div}\mathbf{u}$ обозначим след матрицы $e(\mathbf{u})$.

импульсом и вязкое трение. В нелинейной теории многокомпонентных жидкостных смесей наряду с предположением (4) используются и другие связи (см. [27, 6, 16]).

Математическое исследование моделей движения многокомпонентных сред началось относительно недавно. Представление о различных моделях, а также возникающих при этом математических задач можно получить по монографиям [27] и [30], а также обзору, приведённому в статье [22]. В работах [10, 11] получены первые результаты по слабой разрешимости нелинейной модели многокомпонентной смеси, заполняющей всё пространство $\mathbb{R}^3$. В следующей работе тех же авторов [12] исследуется вопрос единственности решения в случае отсутствия внешних сил и взаимодействия между компонентами смеси. Глубокие результаты по разрешимости нелинейных нестационарных уравнений многокомпонентных вязких сжимаемых жидкостей, заполняющих ограниченную область, получены в [23, 24].

Цель данной работы — исследование задачи о нормальных колебаниях линеаризованной относительно состояния покоя системы (1)–(5), исследование эволюционной задачи, в частности, получение асимптотических формул для решения в случае внешних нагрузок специального вида. Основные результаты изложены в теоремах 1 и 2.

1.2. **Линеаризация динамической задачи.** Предположим, что рассматриваемая система находится в равновесии, то есть $\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$, $\mathbf{F}_i = -g\mathbf{e}_3$ $(i = 1, \dots, n)$, где g — ускорение свободного падения. Из (1) и (4) найдём, что стационарные плотности ρ_{i0} в компонентах смеси распределены по следующему закону $\rho_{i0} = \rho_{i0}(0)\exp(-gc_i^{-1}x_3)$, где $\rho_{i0}(0)$ — стационарная плотность i-й компоненты смеси в начале координат.

Будем считать, что $R_i(t,x) = \rho_{i0}(x_3) + \widetilde{\rho}_i(t,x)$, $\mathbf{F}_i(t,x) = -g\mathbf{e}_3 + \mathbf{f}_i(t,x)$, где $\widetilde{\rho}_i$ — так называемая динамическая плотность, $\mathbf{f}_i$ — малое поле внешних массовых сил, наложенное на гравитационное поле. Предполагая, что $\mathbf{u}_i$, $\widetilde{\rho}_i$, $\mathbf{f}_i$ — малые одного порядка малости, и учитывая

$$\frac{c_i\nabla\widetilde{\rho}_i + \widetilde{\rho}_i g\mathbf{e}_3}{\rho_{i0}} = \frac{c_i\rho_{i0}\nabla\widetilde{\rho}_i - c_i\widetilde{\rho}_i\nabla\rho_{i0}}{\rho_{i0}^2} = \nabla\left(\frac{c_i\widetilde{\rho}_i}{\rho_{i0}}\right),$$

придём к линеаризованной системе:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathbf{u}_i}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{c_i\widetilde{\rho}_i}{\rho_{i0}}\right) + \frac{1}{\rho_{i0}}\operatorname{div}\sum_{j=1}^{n}\sigma^{ij}(\mathbf{u}_j) + \frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + \mathbf{f}_i,\\
&\frac{\partial\widetilde{\rho}_i}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho_{i0}\mathbf{u}_i), \quad (t,x) \in [0,+\infty)\times\Omega, \quad i = 1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{6}$$

2. Постановка задачи и основные результаты

Осуществим в системе (6) замену $c_i^{1/2}\rho_{i0}^{-1/2}\widetilde{\rho}_i(t,x) =: \rho_i(t,x)$ с целью её симметризации. В результате с учётом (2) получим основную систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathbf{u}_i}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{c_i^{1/2}\rho_i}{\rho_{i0}^{1/2}}\right) - \frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\mathbf{u}_j + \frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + \mathbf{f}_i,\\
&\frac{\partial\rho_i}{\partial t} = -\frac{c_i^{1/2}}{\rho_{i0}^{1/2}}\operatorname{div}(\rho_{i0}\mathbf{u}_i), \quad (t,x) \in [0,+\infty)\times\Omega, \quad i = 1,\dots,n,
\end{aligned} \tag{7}$$

где $L_{ij} := -\mu_{ij}\Delta - (\mu_{ij} + \lambda_{ij})\nabla\mathrm{div}$ — дифференциальные операторы теории упругости. К системе (7) добавим начальные условия:

$$\mathbf{u}_i(0,x) = \mathbf{u}_i^0(x), \quad \rho_i(0,x) = \rho_i^0(x), \quad i = 1,\dots,n. \tag{8}$$

Далее система (7) с граничными условиями (5) и начальными условиями (8) будет трактоваться в виде задачи Коши с замкнутым оператором $\mathcal{A}$ в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0. \tag{9}$$

Разыскивая решения однородного уравнения из (9) в виде $\xi(t) = \exp(-\lambda t)\xi$, где λ — спектральный параметр, ξ — амплитудный элемент, придём к следующей спектральной задаче:

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}. \tag{10}$$

При исследовании задач (9), (10) будем предполагать, что *граница $\partial\Omega$ области Ω не является поверхностью вращения.* Это условие призвано несколько упростить вычисления.

Определение 1. *Существенным спектром замкнутого оператора $\mathcal{A}$ называется множество*

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}) := \big\{\lambda \in \mathbb{C} : \textit{оператор } \mathcal{A} - \lambda\mathcal{I} \textit{ не является фредгольмовым}\big\}.$$

Положим $\mathbf{\Phi} := \mathrm{diag}(c_1\rho_{10}(x_3),\dots,c_n\rho_{n0}(x_3))$, $\mathbf{R} := \mathrm{diag}(\rho_{10}(x_3),\dots,\rho_{n0}(x_3))$.

Теорема 1. *Пусть граница $\partial\Omega$ области Ω не является поверхностью вращения. Спектр $\sigma(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ расположен на действительной положительной полуоси за исключением, быть может, конечного числа комплексно сопряжённых собственных значений конечной алгебраической кратности, а*

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \big\{\lambda \in \mathbb{C} : \ \det\big(\lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) - \mathbf{\Phi}\big) = 0, \ \ x \in \overline{\Omega}\big\}.$$

Множество $\sigma(\mathcal{A})\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности и содержит подпоследовательность с асимптотическим поведением

$$\lambda_k^{(\infty)}(\mathcal{A}) = \mathcal{C}^{-2/3}k^{2/3}(1 + o(1)), \quad k \longrightarrow \infty,$$

$$\mathcal{C} := \frac{1}{6\pi^2}\int\limits_{\Omega}\Big(\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2} + 2\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2}\Big)\,d\Omega.$$

Замечание 1. *Из условий* (3) *следует, что* $2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda} > 0$. *Отсюда и из* $\mathbf{\Phi} > 0$ *теперь видно, что множество $\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ представляет собой объединение n отрезков, расположенных на положительной полуоси.*

Замечание 2. *Из теоремы 1 следует, что в однородной* ($\mathbf{f}_i \equiv \mathbf{0}$, $i = 1,\dots,n$) *системе* (7) *существует не более конечного числа осциллирующих собственных колебаний, все остальные собственные колебания являются апериодически затухающими.*

В терминах норм операторов, которые будут введены далее, можно сформулировать условие, достаточное для отсутствия осциллирующих собственных колебаний. В исходных терминах формулировка этого условия весьма громоздка, однако сводится к тому, что нижние грани матриц вязкостей $\mathbf{M}$ *и* $2\mathbf{M} + 3\mathbf{\Lambda}$, *совпадающие с наименьшими собственными значениями этих матриц, "достаточно большие".*

В случае $n = 1$ с некоторыми изменениями спектральная задача для системы уравнений (6) с граничными условиями прилипания либо с условиями нулевых напряжений на границе исследована в [29]. При этом исследование опиралось на результаты работы [15], в которой бесконечная дифференцируемость границы $\partial\Omega$ существенна. Настоящая работа следует тому же плану. Отметим, что в [9] с использованием результатов работы [3] исследован существенный спектр линеаризованного оператора Навье–Стокса в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 2)$ с C^2-гладкой границей. При этом техника псевдо-дифференциальных операторов не применялась.

Через $\mathbf{L}_2(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ будем обозначать пространства векторных и скалярных функций, суммируемых с квадратами по области Ω, через $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$, $\mathbf{W}_2^2(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$ — пространства Соболева векторных и скалярных функций со стандартными скалярными произведениями и нормами, а $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$.

В следующем определении для краткости будем понимать поля $\mathbf{u}_i$ и функции ρ_i $(i = 1, \ldots, n)$ из (7) как функции одной переменной t со значениями в гильбертовых пространствах $\mathbf{L}_2(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ соответственно.

Определение 2. *Поля* $\mathbf{u}_i \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}_+; \mathbf{W}_2^2(\Omega))$ $(i = 1, \ldots, n)$, *и функции* $\rho_i \in C^1(\mathbb{R}_+; L_2(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}_+; W_2^1(\Omega))$ $(i = 1, \ldots, n)$, *называются решением начально-краевой задачи* (7), (5), (8), *если выполнены начальные условия* (8), *выполнены уравнения* (7) *и граничные условия* (5) *при всех* $t \in \mathbb{R}_+$.

Теорема 2. *1) Пусть* $\mathbf{u}_j^0 \in \mathbf{W}_2^2(\Omega)$[3] *и удовлетворяют граничным условиям* (5), $\rho_j^0 \in W_2^1(\Omega)$ $(j = 1, \ldots, n)$, *а поля* $\mathbf{f}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ *локально гёльдеровы, то есть для любого* $T \geqslant 0$ *существуют* $K = K(T) > 0$, $k = k(T) \in (0, 1]$ *такие, что*

$$\|\mathbf{f}_j(t) - \mathbf{f}_j(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant K|t - s|^k \quad \forall\, 0 \leqslant t, s \leqslant T, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тогда начально-краевая задача (7), (5), (8) *имеет единственное решение в смысле определения 2.*

2) Пусть дополнительно поля $\mathbf{f}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ *имеют следующий вид:*

$$\mathbf{f}_j(t) = \sum_{k=0}^{m} e^{-i\sigma_k t}\mathbf{f}_{j,k}, \quad \mathbf{f}_{j,k} \in \mathbf{L}_2(\Omega), \quad \sigma_0 = 0, \quad 0 \neq \sigma_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Тогда существует $\omega > 0$ *и такая константа* $N > 0$, *зависящая от начальных данных и норм полей* $\mathbf{f}_{j,k}$, *что будет выполнено неравенство*

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\left\|\mathbf{u}_j(t) - \sum_{k=0}^{m} e^{-i\sigma_k t}\mathbf{u}_{j,k}\right\|^2 + \left\|\rho_j(t) - \sum_{k=0}^{m} e^{-i\sigma_k t}\rho_{j,k}\right\|^2\right) \leqslant Ne^{-2\omega t} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+,$$

где поля $\mathbf{u}_{j,k}$ *и функции* $\rho_{j,k}$ $(j = 1, \ldots, n)$ *при каждом* $k = 0, \ldots, m$ *являются решением следующей краевой задачи:*

$$\frac{1}{\rho_{j0}}\sum_{l=1}^{n} L_{jl}\mathbf{u}_{l,k} + \nabla\left(\frac{c_j^{1/2}\rho_{j,k}}{\rho_{j0}^{1/2}}\right) - \frac{1}{\rho_{j0}}\sum_{l=1}^{n} a_{jl}(\mathbf{u}_{l,k} - \mathbf{u}_{j,k}) - i\sigma_k\mathbf{u}_{j,k} = \mathbf{f}_{j,k},$$

$$\frac{c_j^{1/2}}{\rho_{j0}^{1/2}}\operatorname{div}(\rho_{j0}\mathbf{u}_{j,k}) - i\sigma_k\rho_{j,k} = 0, \quad x \in \Omega, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\mathbf{u}_{j,k} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbf{T}_j\mathbf{n}) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega, \quad j = 1, \ldots, n.$$

---

[3] В формулировке теоремы использован индекс j, поскольку через i обозначена мнимая единица.

3. Операторная формулировка задачи

3.1. **Основные пространства и вспомогательные операторы.** Ведём векторное гильбертово пространство с весом $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{j0})$ $(j=1,\ldots,n)$ со скалярным произведением и нормой:

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{j0})} := \int_\Omega \rho_{j0}(x_3)\mathbf{u}(x)\cdot\overline{\mathbf{v}(x)}\,d\Omega, \quad \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{j0})} = \int_\Omega \rho_{j0}(x_3)|\mathbf{u}(x)|^2\,d\Omega,$$

а также подпространство гильбертова пространства $L_2(\Omega)$ единичной коразмерности:

$$L_{2,\rho_{j0}}(\Omega) := \big\{ f\in L_2(\Omega) : (f,\rho_{j0}^{1/2})_{L_2(\Omega)} = 0\big\}, \quad j=1,\ldots,n.$$

Введём основное гильбертово пространство $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$ с естественно определённым на нём скалярным произведением и соответствующей нормой, где

$$\mathcal{H}_1 := \bigoplus_{j=1}^n \mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{j0}) = \big\{\mathbf{u} := (\mathbf{u}_1;\ldots;\mathbf{u}_n)^\tau :\ \mathbf{u}_j\in\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{j0}),\ j=1,\ldots,n\big\},$$
$$\mathcal{H}_2 := \bigoplus_{j=1}^n L_{2,\rho_{j0}}(\Omega) = \big\{\rho := (\rho_1;\ldots;\rho_n)^\tau :\ \rho_j\in L_{2,\rho_{j0}}(\Omega),\ j=1,\ldots,n\big\}.$$

Заметим, что из (2), в силу очевидного равенства $I_3\mathbf{n}\times\mathbf{n} = \mathbf{0}$, следует, что

$$(\mathbf{T}_i\mathbf{n})\times\mathbf{n} = \Big(-P_iI_3 + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}\operatorname{tr}e(\mathbf{u}_j)I_3 + 2\sum_{j=1}^n \mu_{ij}e(\mathbf{u}_j)\Big)\mathbf{n}\times\mathbf{n} = 2\sum_{j=1}^n \mu_{ij}e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n}\times\mathbf{n}$$

для любого $x\in\partial\Omega$ $(i=1,\ldots,n)$. Обозначим через τ_s $(s=1,2)$ единичные векторы, касательные к поверхности $\partial\Omega$ и ортогональные между собой. Тогда с учётом сказанного выше граничные условия (5) для задачи (7) можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{n} = 0, \quad 2\sum_{j=1}^n \mu_{ij}e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n}\cdot\tau_s = 0, \quad x\in\partial\Omega, \quad s=1,2, \quad i=1,\ldots,n. \tag{11}$$

Введём теперь, учитывая (5) и (11), оператор $L:\mathcal{D}(L)\subset\mathcal{H}_1\longrightarrow\mathcal{H}_1$ по следующему закону:

$$L\mathbf{u} := \Big(\frac{1}{\rho_{10}}\sum_{j=1}^n L_{1j}\mathbf{u}_j;\ldots;\frac{1}{\rho_{n0}}\sum_{j=1}^n L_{nj}\mathbf{u}_j\Big)^\tau, \tag{12}$$
$$\mathcal{D}(L) := \Big\{\mathbf{u}\in\mathcal{H}_1 :\ \mathbf{u}_i\in\mathbf{W}_2^2(\Omega), \quad \mathbf{u}_i\cdot\mathbf{n} = 0\ \ (x\in\partial\Omega),$$
$$2\sum_{j=1}^n \mu_{ij}e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n}\cdot\tau_s = 0\ \ (x\in\partial\Omega), \quad s=1,2, \quad i=1,\ldots,n\Big\}.$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (3) и граница $\partial\Omega$ не является поверхностью вращения. Тогда оператор L самосопряжён и положительно определён* *в* $\mathcal{H}_1$, $L^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1)$[4]. *Энергетическое пространство* $\mathcal{H}_L$ *оператора* L *выражается по следующей формуле:*

$$\mathcal{H}_L = \mathcal{D}(L^{1/2}) = \bigoplus_{j=1}^{n} \Big\{ \mathbf{u}_j \in \mathbf{W}_2^1(\Omega): \ \ \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n} = 0 \ \ (x \in \partial\Omega) \Big\}.$$

Доказательство. Рассмотрим на $\mathcal{H}_L \subset \mathcal{H}_1$ полуторалинейную форму (см. (2))

$$L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \Big(\lambda_{ij} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) \operatorname{tr} e(\overline{\mathbf{v}_i}) + 2\mu_{ij} e(\mathbf{u}_j) : e(\overline{\mathbf{v}_i}) \Big)\, d\Omega \equiv \equiv \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} \sigma^{ij}(\mathbf{u}_j) : e(\overline{\mathbf{v}_i})\, d\Omega. \tag{13}$$

Покажем, что при выполнении условий (3) (плотно определённая) квадратичная форма $L(\cdot,\cdot)$ положительно определена в $\mathcal{H}_1$ и замкнута (см. [17, гл. VI, § 1, п. 3]). Для этого проведём вспомогательные вычисления.

Введём обозначения

$$K_{ij} := \begin{pmatrix} \lambda_{ij} + 2\mu_{ij} & \lambda_{ij} & \lambda_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{ij} & \lambda_{ij} + 2\mu_{ij} & \lambda_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{ij} & \lambda_{ij} & \lambda_{ij} + 2\mu_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_{ij} \end{pmatrix},$$

$$\xi_j := \big(e_{11}(\mathbf{u}_j); e_{22}(\mathbf{u}_j); e_{33}(\mathbf{u}_j); \sqrt{2} e_{12}(\mathbf{u}_j); \sqrt{2} e_{13}(\mathbf{u}_j); \sqrt{2} e_{23}(\mathbf{u}_j)\big)^\tau,$$

$$K := \big\{ K_{ij} \equiv K(\lambda_{ij}, \mu_{ij}) \big\}_{i,j=1}^{n}, \quad \xi := \big(\xi_1; \xi_2, \ldots; \xi_n\big)^\tau, \tag{14}$$

и вычислим квадратичную форму симметричной $(6n \times 6n)$-матрицы K:

$$\big(K\xi, \xi\big) = \sum_{i,j=1}^{n} \big(K_{ij}\xi_j, \xi_i\big) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\begin{pmatrix} \lambda_{ij} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) + 2\mu_{ij} e_{11}(\mathbf{u}_j) \\ \lambda_{ij} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) + 2\mu_{ij} e_{22}(\mathbf{u}_j) \\ \lambda_{ij} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) + 2\mu_{ij} e_{33}(\mathbf{u}_j) \\ 2\sqrt{2}\mu_{ij} e_{12}(\mathbf{u}_j) \\ 2\sqrt{2}\mu_{ij} e_{13}(\mathbf{u}_j) \\ 2\sqrt{2}\mu_{ij} e_{23}(\mathbf{u}_j) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_{11}(\mathbf{u}_i) \\ e_{22}(\mathbf{u}_i) \\ e_{33}(\mathbf{u}_i) \\ \sqrt{2} e_{12}(\mathbf{u}_i) \\ \sqrt{2} e_{13}(\mathbf{u}_i) \\ \sqrt{2} e_{23}(\mathbf{u}_i) \end{pmatrix} \right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\lambda_{ij} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) \operatorname{tr} e(\overline{\mathbf{u}_i}) + 2\mu_{ij} \sum_{k=1}^{3} e_{kk}(\mathbf{u}_j) e_{kk}(\overline{\mathbf{u}_i}) + + 4\mu_{ij} \big(e_{12}(\mathbf{u}_j) e_{12}(\overline{\mathbf{u}_i}) + e_{13}(\mathbf{u}_j) e_{13}(\overline{\mathbf{u}_i}) + e_{23}(\mathbf{u}_j) e_{23}(\overline{\mathbf{u}_i}) \big) \Big)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\lambda_{ij} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) \operatorname{tr} e(\overline{\mathbf{u}_i}) + 2\mu_{ij} e(\mathbf{u}_j) : e(\overline{\mathbf{u}_i}) \Big)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\lambda_{ij} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) I_3 + 2\mu_{ij} e(\mathbf{u}_j) \Big) : e(\overline{\mathbf{u}_i}) = \sum_{i=1}^{n} \bigg(\sum_{j=1}^{n} \sigma^{ij}(\mathbf{u}_j) : e(\overline{\mathbf{u}_i}) \bigg). \tag{15}$$

[4] Через $\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$ обозначен класс линейных компактных операторов, действующих в $\mathcal{H}$.

Таким образом,

$$\begin{aligned}\big(K\xi,\xi\big) &= \sum_{i,j=1}^{n}\bigg(\Big(\lambda_{ij}+\frac{2}{3}\,\mu_{ij}\Big)\operatorname{tr}e(\mathbf{u}_j)I_3+2\mu_{ij}\Big(e(\mathbf{u}_j)-\frac{1}{3}\operatorname{tr}e(\mathbf{u}_j)I_3\Big)\bigg):e(\overline{\mathbf{u}_i})\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\bigg(\Big(\lambda_{ij}+\frac{2}{3}\,\mu_{ij}\Big)\operatorname{tr}e(\mathbf{u}_j)\operatorname{tr}e(\overline{\mathbf{u}_i})+\\
&\qquad\qquad +2\mu_{ij}\Big(e(\mathbf{u}_j)-\frac{1}{3}\operatorname{tr}e(\mathbf{u}_j)I_3\Big):\Big(e(\overline{\mathbf{u}_i})-\frac{1}{3}\operatorname{tr}e(\overline{\mathbf{u}_i})I_3\Big)\bigg)\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\Big(\lambda_{ij}+\frac{2}{3}\,\mu_{ij}\Big)\operatorname{tr}e(\mathbf{u}_j)\operatorname{tr}e(\overline{\mathbf{u}_i})+\\
&\qquad +2\sum_{l,k=1}^{3}\bigg(\sum_{i,j=1}^{n}\mu_{ij}\Big(e_{lk}(\mathbf{u}_j)-\frac{\delta_{lk}}{3}\operatorname{tr}e(\mathbf{u}_j)\Big)\Big(e_{lk}(\overline{\mathbf{u}_i})-\frac{\delta_{lk}}{3}\operatorname{tr}e(\overline{\mathbf{u}_i})\Big)\bigg).\end{aligned}$$

Из (3) следует, что матрица K неотрицательна. Допустим, что $\big(K\xi,\xi\big)=0$. Обозначим через $\gamma(\mathbf{M})>0$, $\gamma(\mathbf{\Lambda}+2/3\mathbf{M})>0$ нижние грани соответственно матриц $\mathbf{M}$ и $\mathbf{\Lambda}+2/3\mathbf{M}$, и найдём из последнего соотношения, что

$$\big(K\xi,\xi\big)\geqslant\gamma\Big(\mathbf{\Lambda}+\frac{2}{3}\,\mathbf{M}\Big)\sum_{j=1}^{n}\big|\operatorname{tr}e(\mathbf{u}_j)\big|^2+2\sum_{l,k=1}^{3}\gamma(\mathbf{M})\sum_{j=1}^{n}\Big|e_{lk}(\mathbf{u}_j)-\frac{\delta_{lk}}{3}\operatorname{tr}e(\mathbf{u}_j)\Big|^2.$$

Отсюда имеем $\operatorname{tr}e(\mathbf{u}_j)=0$ для каждого $j=1,\dots,n$. Следовательно, $e_{lk}(\mathbf{u}_j)=0$ $(l,k=1,2,3,\ j=1,\dots,n)$, а значит, $\xi=0$. Таким образом, существует константа $\gamma(K)>0$ такая, что $\big(K\xi,\xi\big)\geqslant\gamma(K)\big(\xi,\xi\big)$ для любого $\xi\in\mathbb{C}^{6n}$. Последнее соотношение с учётом (14), (15) перепишем следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n}\bigg(\sum_{j=1}^{n}\sigma^{ij}(\mathbf{u}_j):e(\overline{\mathbf{u}_i})\bigg)\geqslant\gamma(K)\sum_{i=1}^{n}e(\mathbf{u}_i):e(\overline{\mathbf{u}_i}).\tag{16}$$

Поскольку граница $\partial\Omega$ не является поверхностью вращения, пространства $\big\{\mathbf{u}_j\in\mathbf{W}_2^1(\Omega):\ \mathbf{u}_j\cdot\mathbf{n}=0\ \ (x\in\partial\Omega)\big\}$ не содержат жёсткие перемещения. Следовательно, для элементов этих пространств справедливо второе неравенство Корна (см. [28, гл. I, § 2, п. 2.2, теорема 2.5]). Из (13)–(16) и второго неравенства Корна найдём, что

$$C\|\mathbf{u}\|^2_{\bigoplus_{j=1}^{n}\mathbf{W}_2^1(\Omega)}\geqslant L(\mathbf{u},\mathbf{u})\geqslant\gamma(K)C_K^{-2}\|\mathbf{u}\|^2_{\bigoplus_{j=1}^{n}\mathbf{W}_2^1(\Omega)}\quad\forall\,\mathbf{u}\in\mathcal{H}_L.$$

Здесь C_K — константа из второго неравенства Корна, C — некоторая положительная константа. Из полученных неравенств следует, что плотно определённая квадратичная форма $L(\cdot,\cdot)$ положительно определена в $\mathcal{H}_1$ и замкнута (см. [17, гл. VI, § 1, п. 3]). По первой теореме о представлении (см. [17, гл. VI, § 2, теорема 2.1]) существует единственный самосопряжённый положительно определённый оператор L такой, что

$$L(\mathbf{u},\mathbf{v})=(L\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathcal{H}_1}\quad\forall\,\mathbf{u}\in\mathcal{D}(L),\ \ \mathbf{v}\in\mathcal{H}_L,$$
$$\mathcal{D}(L)=\big\{\mathbf{u}\in\mathcal{H}_L:\ \exists\,\mathbf{w}\in\mathcal{H}_1:L(\mathbf{u},\mathbf{v})=(\mathbf{w},\mathbf{v})_{\mathcal{H}_1}\ \forall\,\mathbf{v}\in\mathcal{H}_L\big\}.$$

Предположим, что элемент $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_L$ дважды непрерывно дифференцируем в области Ω, тогда с использованием тождества Бэтти (см. [31, гл. 24, формула (24.22)]) найдём (см. (2)), что для любого $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_L$

$$(L\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathcal{H}_1} = L(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} L_{ij}\mathbf{u}_j \cdot \overline{\mathbf{v}_i}\, d\Omega + \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{n} \sigma^{ij}(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{v}_i}\, dS$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} L_{ij}\mathbf{u}_j \cdot \overline{\mathbf{v}_i}\, d\Omega + \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{v}_i} + 2\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{v}_i} \Big) dS$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} L_{ij}\mathbf{u}_j \cdot \overline{\mathbf{v}_i}\, d\Omega + \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega} 2\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \big(\tau_1(\tau_1 \cdot \overline{\mathbf{v}_i}) + \tau_2(\tau_2 \cdot \overline{\mathbf{v}_i})\big) dS. \tag{17}$$

Для элементов $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_L$, состоящих из финитных полей, отсюда найдём, что

$$(L\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathcal{H}_1} = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} L_{ij}\mathbf{u}_j \cdot \overline{\mathbf{v}_i}\, d\Omega = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{1}{\rho_{i0}} \sum_{j=1}^{n} L_{ij}\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_i \Big)_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{i0})}.$$

Отсюда следует формула для $L\mathbf{u}$ (см. (12)), поскольку множество элементов из $\mathcal{H}_L$, состоящих из финитных полей, плотно в $\mathcal{H}_1$. Подставляя выражение для $L\mathbf{u}$ в (17), приходим к равенству

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega} 2\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \big(\tau_1(\tau_1 \cdot \overline{\mathbf{v}_i}) + \tau_2(\tau_2 \cdot \overline{\mathbf{v}_i})\big) dS = 0.$$

Для элементов $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_L$ вида $\mathbf{v} = (\mathbf{0}; \ldots; \mathbf{v}_i; \ldots; \mathbf{0})^{\tau}$ отсюда найдём, что

$$2\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \tau_s = 0 \ \ (x \in \partial\Omega), \quad s = 1,2, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Таким образом, дважды дифференцируемое решение $\mathbf{u}$ уравнения $L_1\mathbf{u} = \mathbf{w}$ является решением краевой задачи

$$\frac{1}{\rho_{i0}} \sum_{j=1}^{n} L_{ij}\mathbf{u}_j = \mathbf{w}_i, \quad x \in \Omega, \quad i = 1,\ldots,n,$$

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} = 0, \quad 2\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \tau_s = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad s = 1,2, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Элемент $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(L)$ — это в точности обобщённое решение (см. [31, гл. 11, определение 11.1]) указанной краевой задачи при $\mathbf{w}_i \in \mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{i0})$ $(i = 1,\ldots,n)$. Из теоремы об априорных оценках (о нормальной разрешимости) (см. [32, теорема 2.2]) следует формула для $\mathcal{D}(L)$ (см. (12)). Обоснование возможности применения указанной теоремы об априорных оценках требует весьма громоздких вычислений. Здесь, как и в лемме 4, эти вычисления опущены, далее в пункте 4.2 в более сложной ситуации будут проведены аналогичные вычисления.

Компактность оператора L^{-1} следует из компактности вложения энергетического пространства $\mathcal{H}_L$ оператора L в основное пространство $\mathcal{H}_1$. $\square$

Введём оператор $T:\mathcal{H}_1\longrightarrow\mathcal{H}_1$ по следующему закону:

$$(18)\quad T\mathbf{u}:=\Big(-\frac{1}{\rho_{10}}\sum_{j=1}^{n}a_{1j}(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_1);\ldots;-\frac{1}{\rho_{n0}}\sum_{j=1}^{n}a_{nj}(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_n)\Big)^{\tau},\quad \mathcal{D}(T):=\mathcal{H}_1.$$

Лемма 2. *Оператор T ограничен, самосопряжён и неотрицателен в $\mathcal{H}_1$.*

Доказательство. Напомним, что $a_{ij}=a_{ji}\geqslant 0$ $(i,j=1,\ldots,n)$. Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
\|T\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1}&=\sum_{i=1}^{n}\Big\|-\frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_i)\Big\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{i0})}=\sum_{i=1}^{n}\Big\|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_i)\Big\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Big(\|\mathbf{u}_j\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}+\|\mathbf{u}_i\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\Big)\Big)^2\\
&\leqslant n\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2\Big(\|\mathbf{u}_j\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}+\|\mathbf{u}_i\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\Big)^2\\
&\leqslant 4n^2\max_{i,j}\{a_{ij}^2\}\sum_{j=1}^{n}\|\mathbf{u}_j\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\leqslant\frac{4n^2\max_{i,j}\{a_{ij}^2\}}{\min_j\min_{x\in\Omega}\rho_{j0}(x_3)}\,\|\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1}\quad\forall\,\mathbf{u}\in\mathcal{H}_1,
\end{aligned}$$

то есть оператор T ограничен в $\mathcal{H}_1$: $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$[5]. Далее для любого $\mathbf{u}\in\mathcal{H}_1$ имеем

$$\begin{aligned}
(T\mathbf{u},\mathbf{u})_{\mathcal{H}_1}&=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\\
&=-\sum_{i>j}a_{ij}(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)}-\sum_{i<j}a_{ij}(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\\
&=-\sum_{i>j}a_{ij}(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)}-\sum_{j<i}a_{ji}(\mathbf{u}_i-\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_j)_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\\
&=\sum_{i>j}a_{ij}\|\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_i\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\geqslant 0,
\end{aligned}$$

то есть оператор T самосопряжён и неотрицателен в $\mathcal{H}_1$. □

Введём оператор $B:\mathcal{D}(B)\subset\mathcal{H}_1\longrightarrow\mathcal{H}_2$ по следующему закону:

$$(19)\qquad B\mathbf{u}:=\Big(-\frac{c_1^{1/2}}{\rho_{10}^{1/2}}\operatorname{div}(\rho_{10}\mathbf{u}_1);\ldots;-\frac{c_n^{1/2}}{\rho_{n0}^{1/2}}\operatorname{div}(\rho_{n0}\mathbf{u}_n)\Big)^{\tau},$$

$$\mathcal{D}(B):=\bigoplus_{j=1}^{n}\Big\{\mathbf{u}_j\in\mathbf{L}_2(\Omega):\ \operatorname{div}(\rho_{j0}\mathbf{u}_j)\in\mathbf{L}_2(\Omega),\ \mathbf{u}_j\cdot\mathbf{n}=0\ (x\in\partial\Omega)\Big\}.$$

Лемма 3. *Сопряжённый оператор $B^*:\mathcal{D}(B^*)\subset\mathcal{H}_2\longrightarrow\mathcal{H}_1$ имеет вид*

$$B^*\rho=\Big(\nabla\Big(\frac{c_1^{1/2}\rho_1}{\rho_{10}^{1/2}}\Big);\ldots;\nabla\Big(\frac{c_n^{1/2}\rho_n}{\rho_{n0}^{1/2}}\Big)\Big)^{\tau},\quad\mathcal{D}(B^*):=\bigoplus_{j=1}^{n}\Big\{W_2^1(\Omega)\cap L_{2,\rho_{j0}}(\Omega)\Big\}.$$

[5] Через $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ обозначена алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H}$.

Доказательство. По определению сопряжённого оператора имеем

$$\mathcal{D}(B^*) = \big\{\rho \in \mathcal{H}_2 :\ \exists \eta \in \mathcal{H}_2 : (B\mathbf{u}, \rho)_{\mathcal{H}_2} = (\mathbf{u}, \eta)_{\mathcal{H}_1}\ \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{D}(B)\big\},$$

а значит, $\rho \in \bigoplus_{j=1}^n \big\{W_2^1(\Omega) \cap L_{2,\rho_{j0}}(\Omega)\big\} = \mathcal{D}(B^*)$. Отсюда теперь следует, что

$$\begin{aligned}(B\mathbf{u}, \rho)_{\mathcal{H}_2} &= \sum_{j=1}^n \Big(-\frac{c_j^{1/2}}{\rho_{j0}^{1/2}} \operatorname{div}(\rho_{j0}\mathbf{u}_j), \rho_j\Big)_{L_{2,\rho_{j0}}(\Omega)} = -\sum_{j=1}^n \int_\Omega \frac{c_j^{1/2}\overline{\rho_j}}{\rho_{j0}^{1/2}} \operatorname{div}(\rho_{j0}\mathbf{u}_j)\, d\Omega \\ &= -\sum_{j=1}^n \int_{\partial\Omega} c_j^{1/2}\rho_{j0}^{1/2}\overline{\rho_j}(\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n})\, dS + \sum_{j=1}^n \int_\Omega \rho_{j0}\mathbf{u}_j \cdot \nabla\Big(\frac{c_j^{1/2}\overline{\rho_j}}{\rho_{j0}^{1/2}}\Big)\, d\Omega \\ &= \sum_{j=1}^n \Big(\mathbf{u}_j, \nabla\Big(\frac{c_j^{1/2}\rho_j}{\rho_{j0}^{1/2}}\Big)\Big)_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{j0})} = (\mathbf{u}, B^*\rho)_{\mathcal{H}_1}\ \ \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{D}(B), \quad \rho \in \mathcal{D}(B^*).\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Лемма 4. *$B^*BL^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$.*

Доказательство. Рассмотрим краевую задачу

$$\sum_{j=1}^n L_{ij}\mathbf{u}_j = \mathbf{w}_i, \quad x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} = g_i, \quad 2\sum_{j=1}^n \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \tau_s = h_{s,i}, \quad x \in \partial\Omega, \quad s = 1, 2, \quad i = 1, \dots, n$$

и обозначим через $\mathcal{L}$ и $\mathcal{B}$ соответствующий матричный дифференциальный оператор и матрицу граничных условий.

Можно проверить, что матричное дифференциальное выражение $\mathcal{L}$ определяет невырожденную правильно эллиптическую по Дуглису–Ниренбергу систему, а граничное условие $\mathcal{B}$ удовлетворяет условию дополнительности (см. [33, с. 379], [32]). Соответствующие вычисления, как и в лемме 1, здесь опущены. Из теоремы о нормальной разрешимости (см. [32, теорема 2.2]) следует, что существуют константы $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, не зависящие от $\mathbf{u}$, такие, что

$$\begin{gathered}C_1\|\mathbf{u}\|^2_{\oplus_{j=1}^n \mathbf{W}_2^2(\Omega)} \leqslant \|\mathcal{L}\mathbf{u}\|^2_{\oplus_{j=1}^n \mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant C_2\|\mathbf{u}\|^2_{\oplus_{j=1}^n \mathbf{W}_2^2(\Omega)} \quad \forall\, \mathbf{u} \in \widetilde{\mathbf{W}}_2^2(\Omega, \mathcal{B}), \\ \widetilde{\mathbf{W}}_2^2(\Omega, \mathcal{B}) := \big\{\mathbf{u} \in \mathcal{H}_1 :\ \mathbf{u}_j \in \mathbf{W}_2^2(\Omega), \quad \mathcal{B}\mathbf{u} = 0\ \ (x \in \partial\Omega)\big\} = \mathcal{D}(L), \\ \|\mathbf{u}_j\|^2_{\mathbf{W}_2^2(\Omega)} := \sum_{l=1}^3 \Big(\|u_{jl}\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u_{jl}\|^2_{L_2(\Omega)}\Big), \quad j = 1, \dots, n.\end{gathered} \tag{20}$$

Здесь и далее до конца доказательства леммы норма в пространстве $\mathbf{W}_2^2(\Omega)$ вводится, как описано выше. Символ D^α как обычно обозначает смешанную производную порядка α, где α соответствующий мультииндекс. Далее, из неравенства Эрлинга–Ниренберга (см. [4, с. 33]) следует, что существует константа $C_3 > 0$, не зависящая от $\mathbf{u}_j$, такая, что

$$\Big\|\frac{\partial u_{jl}}{\partial x_k}\Big\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C_3\|\mathbf{u}_j\|^2_{\mathbf{W}_2^2(\Omega)} \quad \forall\, \mathbf{u}_j \in \mathbf{W}_2^2(\Omega), \quad l, k = 1, 2, 3, \quad j = 1, \dots, n. \tag{21}$$

Пусть теперь $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(L) = \widetilde{\mathbf{W}}_2^2(\Omega, \mathcal{B})$. Из (20), (21), (19) и леммы 3 получим

$$\|B^* B\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}_1}^2 = \sum_{j=1}^n \int_\Omega \left| -\nabla\left(\frac{c_j}{\rho_{j0}(x_3)} \operatorname{div}\big(\rho_{j0}(x_3)\mathbf{u}_j\big)\right)\right|^2 d\Omega \leqslant C_4 \sum_{j=1}^n \|\mathbf{u}_j\|_{\mathbf{W}_2^2(\Omega)}^2 =$$

$$= C_4\|\mathbf{u}\|^2_{\oplus_{j=1}^n \mathbf{W}_2^2(\Omega)} \leqslant C_4 C_1^{-1} \|\mathcal{L}\mathbf{u}\|^2_{\oplus_{j=1}^n \mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant C_4 C_1^{-1} \max_{j=\overline{1,n},\, x\in\overline{\Omega}} \rho_{j0}(x_3) \|L\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1},$$

где $C_4 > 0$ не зависит от $\mathbf{u}$. Отсюда после замены $L\mathbf{u} = \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_1$ следует требуемое утверждение. □

Введём оператор $A := L + T$ (см. (12), (18)). Из лемм 1, 2 и определения оператора B (см. (19)) следует, что $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{D}(L^{1/2}) \subset \mathcal{D}(B)$. Оператор B замыкаем, так как оператор B^* плотно определён (см. [17, гл. V, § 3, п. 1] и лемму 3). Следовательно, операторы $BA^{-1/2}$ и BA^{-1} ограниченно действуют из пространства $\mathcal{H}_1$ в пространство $\mathcal{H}_2$:

$$Q := BA^{-1/2} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2), \quad BA^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2). \tag{22}$$

Лемма 5. *Оператор $A^{-1/2}B^*$ замыкаем, $\overline{A^{-1/2}B^*} = Q^*$, $Q^*|_{\mathcal{D}(B^*)} = A^{-1/2}B^*$. Аналогичные утверждения верны и для оператора $A^{-1}B^*$.*

Доказательство. Учитывая $Q^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, имеем

$$(Q\mathbf{u}, \rho)_{\mathcal{H}_2} = (\mathbf{u}, A^{-1/2}B^*\rho)_{\mathcal{H}_1} = (\mathbf{u}, Q^*\rho)_{\mathcal{H}_1} \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{H}_1, \quad \rho \in \mathcal{D}(B^*).$$

Отсюда следует, что $Q^*|_{\mathcal{D}(B^*)} = A^{-1/2}B^*$. Таким образом, оператор $A^{-1/2}B^*$ ограничен на $\mathcal{D}(B^*)$ и расширяется по непрерывности (можно считать, что замыкается) до ограниченного оператора Q^*. □

3.2. **Операторная формулировка задачи.** Наша цель — записать максимальную L_2-реализацию оператора системы (7) в виде операторной блок-матрицы с использованием введённых в (12), (18), (19), (22) операторов. Сужение максимальной L_2-реализации оператора системы (7) на $\mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(B^*)$ с использованием введённых операторов можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} A & B^* \\ -B & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(B^*) \subset \mathcal{H}. \tag{23}$$

Покажем, что оператор $\mathcal{A}_0$ замыкаем и замыкание $\overline{\mathcal{A}_0}$ есть максимальный аккретивный оператор, то есть других замкнутых аккретивных расширений у оператора $\mathcal{A}_0$ нет. Это означает, что множество $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ является "ядром" (см. [17, гл. III, § 5, п. 3]) для максимальной L_2-реализации оператора системы (7). Таким образом, оператор $\overline{\mathcal{A}_0}$ и будет максимальной L_2-реализацией оператора системы (7). Подобные построения для операторных блоков проводились в работах А.А. Шкаликова [3, 26], Н.Д. Копачевского и Т.Я. Азизова [2], и др.

Лемма 6. *Оператор $\mathcal{A}_0$ замыкаем и $\overline{\mathcal{A}_0} =: \mathcal{A}$ — замкнутый максимальный аккретивный оператор. Оператор $\mathcal{A}$ представи́м в следующем виде:*

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Q^* \\ -Q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \equiv \tag{24}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} I & 0 \\ -QA^{-1/2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & QQ^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1/2}Q^* \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \Big\{ \xi = (\mathbf{u}; \rho)^\tau \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 :\ \mathbf{u} + A^{-1/2}Q^*\rho \in \mathcal{D}(A) \Big\}.$$

Доказательство. 1) Оператор $\mathcal{A}_0$, очевидно, плотно определён. Далее, легко проверить, что для любого $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ будет $\mathrm{Re}(\mathcal{A}_0\xi,\xi)_{\mathcal{H}} = \|A^{1/2}\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1} \geqslant 0$, то есть оператор $\mathcal{A}_0$ аккретивен, а значит, замыкаем (см. [20, гл. I, § 4, п. 2]).

Построим замыкание $\overline{\mathcal{A}_0}$, используя включение $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$. Пусть

$$\xi_n := (\mathbf{u}_n;\rho_n)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0), \quad \xi_n \longrightarrow \xi := (\mathbf{u};\rho)^\tau, \quad \mathcal{A}_0\xi_n \longrightarrow \xi_0 := (\mathbf{u}_0;\rho_0)^\tau. \tag{25}$$

Отсюда имеем $\mathbf{u}_n + A^{-1}B^*\rho_n \in \mathcal{D}(A)$ и $\mathbf{u}_n + A^{-1}B^*\rho_n = \mathbf{u}_n + (BA^{-1})^*\rho_n \longrightarrow \mathbf{u} + (BA^{-1})^*\rho$, $A(\mathbf{u}_n + A^{-1}B^*\rho_n) \longrightarrow \mathbf{u}_0$. Оператор A самосопряжён, а значит, замкнут, поэтому имеем включение $\mathbf{u} + (BA^{-1})^*\rho \in \mathcal{D}(A)$ и равенство $A(\mathbf{u} + (BA^{-1})^*\rho) = \mathbf{u}_0$.

Далее, из (25) следует, что $\mathbf{u}_n \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$, $\mathbf{u}_n \longrightarrow \mathbf{u}$, $-B\mathbf{u}_n \longrightarrow \rho_0$. Но оператор B, как отмечено выше, замыкаем, а значит, $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\overline{B})$ и $-\overline{B}\mathbf{u} = \rho_0$.

Таким образом, $\xi \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0})$ и $\overline{\mathcal{A}_0}\xi = \xi_0$, где

$$\overline{\mathcal{A}_0}\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \rho\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\mathbf{u} + (BA^{-1})^*\rho) \\ -\overline{B}\mathbf{u}\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0}) = \Big\{\xi = (\mathbf{u};\rho)^\tau \in \mathcal{H} :\ \mathbf{u} \in \mathcal{D}(\overline{B}),\ \ \mathbf{u} + (BA^{-1})^*\rho \in \mathcal{D}(A)\Big\}.$$

Используем теперь включение $\mathcal{D}(A^{1/2}) \subset \mathcal{D}(B)$ (см. лемму 1 и (19)). Отсюда следует равенство $(BA^{-1})^* = (BA^{-1/2}A^{-1/2})^* = A^{-1/2}(BA^{-1/2})^* = A^{-1/2}Q^*$. Теперь из включения $\mathbf{u} + (BA^{-1})^*\rho = \mathbf{u} + A^{-1/2}Q^*\rho \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2})$ и факта, что $\mathcal{D}(A^{1/2})$ линеал, следует, что $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \subset \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(\overline{B})$. Таким образом, условие $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\overline{B})$ в описании множества $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0})$ можно опустить, а выражение $\overline{B}\mathbf{u}$ записать в виде $\overline{B}\mathbf{u} = (\overline{B}A^{-1/2})A^{1/2}\mathbf{u} = QA^{1/2}\mathbf{u}$. Из проведённых рассуждений теперь получим, что

$$\overline{\mathcal{A}_0}\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \rho\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\mathbf{u} + A^{-1/2}Q^*\rho) \\ -QA^{1/2}\mathbf{u}\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0}) = \Big\{\xi = (\mathbf{u};\rho)^\tau \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 :\ \mathbf{u} + A^{-1/2}Q^*\rho \in \mathcal{D}(A)\Big\}.$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться, что множество $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ в (24) является естественной областью определения для каждой факторизации, обе факторизации определяют один и тот же оператор $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}_0}$.

2) Докажем, что замкнутый аккретивный оператор $\mathcal{A}$ максимален. Аккретивность оператора $\mathcal{A}$ следует из аккретивности $\mathcal{A}_0$, однако может быть проверена и непосредственно. Действительно, если $\xi = (\mathbf{u};\rho)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, то $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(A^{1/2})$. Отсюда и из факторизации (24) оператора $\mathcal{A}$ с симметричными крайними сомножителями найдём, что $\mathrm{Re}(\mathcal{A}\xi,\xi)_{\mathcal{H}} = \|A^{1/2}\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1} \geqslant 0$ для любого $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, а значит, оператор $\mathcal{A}$ аккретивен. Для доказательства максимальности оператора $\mathcal{A}$ достаточно установить (см. [20, гл. I, § 4, п. 2, теорема 4.3]), что оператор $\mathcal{A}$ имеет отрицательные регулярные точки: $\rho(\mathcal{A}) \cap \{\lambda < 0\} \neq \varnothing$. Здесь $\rho(\mathcal{A})$ — резольвентное множество оператора $\mathcal{A}$.

Действительно, при $\lambda \neq 0$ непосредственно проверяется (см. (28)), что

$$\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I} = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -\lambda^{-1}Q^* \\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I - \lambda A^{-1} - \lambda^{-1}Q^*Q & 0 \\ 0 & -\lambda I\end{pmatrix}\times \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\lambda^{-1}Q & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix}. \tag{26}$$

Введём оператор-функцию $L(\lambda) := I - \lambda A^{-1} - \lambda^{-1}Q^*Q$. При $\lambda < 0$ (ограниченный) оператор $L(\lambda)$ самосопряжён и положительно определён, очевидно, а значит, существует, ограничен и задан на всём пространстве $\mathcal{H}_1$ оператор $L^{-1}(\lambda)$: $L^{-1}(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$. Из последней факторизации при $\lambda < 0$ тогда найдём, что существует

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ \lambda^{-1}Q & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & -\lambda^{-1}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & \lambda^{-1}Q^* \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{27}$$
$$= \begin{pmatrix} A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2} & \lambda^{-1}A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)Q^* \\ -\lambda^{-1}QL^{-1}(\lambda)A^{-1/2} & -\lambda^{-1}I - \lambda^{-2}QL^{-1}(\lambda)Q^* \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),$$
$$L(\lambda) = I - \lambda A^{-1} - \lambda^{-1}Q^*Q,$$

а значит, $\{\lambda < 0\} \subset \rho(\mathcal{A})$. □

Таким образом, начально краевую задачу (7), (5), (8) можно записать в виде задачи Коши (9) с замкнутым максимальным аккретивным оператором $\mathcal{A}$.

Замечание 3. *Формула* (27) *при всех* $\lambda \notin \sigma(L(\lambda)) \cup \{0\}$, *где* $\sigma(L(\lambda))$ *— спектр оператор-функции* $L(\lambda)$, *даёт представление для резольвенты оператора* $\mathcal{A}$. *Из* (27), *в частности, следует, что* $\sigma(\mathcal{A})\backslash\{0\} \subset \sigma(L(\lambda))$. *Более того, из факторизации* (26) *и теоремы о произведении фредгольмовых операторов (см.* [13, гл. XVII, §3, теорема 3.1]*) следует, что* $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \subset \sigma_{ess}(L(\lambda))$. *Можно доказать, что* $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \sigma_{ess}(L(\lambda))$, *однако далее этот факт не понадобится.*

Замечание 4. *Приведём необходимые для дальнейшего факторизации Шура–Фробениуса операторных блоков с ограниченными операторными коэффициентами.*

Пусть E_1, E_2 *— банаховы пространства. Пусть* $A_{kl} \in \mathcal{L}(E_l, E_k)$ $(k, l = 1, 2)$, $A_{22}^{-1} \in \mathcal{L}(E_2)$, $D_1 := A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$. *Если* $D_1^{-1} \in \mathcal{L}(E_1)$, *то существует*

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \left(\begin{pmatrix} I & A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{pmatrix} \right)^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} D_1^{-1} & -D_1^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}D_1^{-1} & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}D_1^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2). \tag{28}$$

Пусть $A_{11}^{-1} \in \mathcal{L}(E_1)$, $D_2 := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$. *Если* $D_2^{-1} \in \mathcal{L}(E_2)$, *то существует*

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} \right)^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1} \\ -D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & D_2^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2). \tag{29}$$

4. Задача о спектре оператора $\mathcal{A}$

4.1. **Определение локальных координат и эллиптической краевой задачи.** Приведём необходимые определения и факты из теории эллиптических краевых задач (см. [32, 33, 18, 19]), необходимые для исследования существенного спектра оператора $\mathcal{A}$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных не выше второго порядка

$$\mathcal{L}(x, D)\mathbf{v}(x) = \mathbf{f}(x), \quad x \in \Omega, \tag{30}$$

где $x=(x_1;x_2;x_3)\in\Omega$, $D:=(-i\frac{\partial}{\partial x_1};-i\frac{\partial}{\partial x_2};-i\frac{\partial}{\partial x_3})$, $\mathbf{v}(x):=(v_1(x);\ldots;v_m(x))^\tau$, $\mathbf{f}(x):=(f_1(x);\ldots;f_m(x))^\tau$. Пусть $\mathcal{L}(x,\xi)$, $\xi:=(\xi_1;\xi_2;\xi_3)^\tau$ — полиномиальная матрица, получаемая из (30) заменой символа D на ξ. Будем считать далее, что (30) определяет невырожденную систему Дуглиса–Ниренберга (см. [33, с. 375], а также [32]).

Определение 3. (см. [33, с. 376]) *Оператор $\mathcal{L}(x,D)$ называется эллиптическим в замкнутой области $\overline{\Omega}$, если $\pi\det\mathcal{L}(x,\xi)\neq 0$ для любого $x\in\overline{\Omega}$ и любого $\xi\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$, где символ π обозначает старшую однородную часть многочлена.*

Известно, что $\pi\det\mathcal{L}(x,\xi)=\det\pi\mathcal{L}(x,\xi)$, где $\pi\mathcal{L}$ — главная часть матрицы $\mathcal{L}$. О выделении главной части системы Дуглиса–Ниренберга см. в [33, с. 377].

Возьмём произвольную точку $z_0\in\partial\Omega$ и введём, следуя [18, 19], в окрестности этой точки следующую локальную систему координат. Пусть локально граница $\partial\Omega$ задаётся бесконечно дифференцируемыми функциями $z_i=z_i(y_1,y_2)$ $(i=1,2,3)$ параметров y_1, y_2, которые выбираются так, что $y_i=\mathrm{const}$ есть линии кривизны. В векторной записи $z=z(y')$, где $y':=(y_1;y_2)$. Обозначим через $N(y')$ внутреннюю единичную нормаль к $\partial\Omega$. В окрестности границы $\partial\Omega$ введём координаты y_1, y_2, y_3, где y_3 — расстояние от точки x до $\partial\Omega$. Тогда $x=z(y')+y_3N(y')$. При этом нумерация y_1, y_2 задаётся так, чтобы направление векторного произведения $\partial z/\partial y_1\times\partial z/\partial y_2$ совпадало с нормалью $N(y')$, а начало координат находится в точке z_0. Пусть $E_i(y')$ $(i=1,2)$ — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности $\partial\Omega$, тогда $\partial z/\partial y_i\cdot\partial z/\partial y_j=E_i(y')\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Обозначим через $\tau_s:=E_s^{-1/2}(y')\partial z/\partial y_s$ $(s=1,2)$ единичные векторы, касательные к границе $\partial\Omega$. Тогда $\tau_i^\tau\tau_j=\delta_{ij}$ $(i,j=1,2)$, $\tau_s^\tau N=N^\tau\tau_s=0$ $(s=1,2)$.

Рассмотрим теперь систему граничных условий

$$\mathcal{B}(x,D)\mathbf{v}(x)=\mathbf{g}(x),\quad x\in\partial\Omega,\tag{31}$$

где $\mathcal{B}(x,D)$ — $(r\times m)$-матрица, составленная из линейных дифференциальных операторов не выше первого порядка. Перепишем операторы краевой задачи (30), (31) во введённой выше локальной системе координат и рассмотрим главные части этих операторов:

$$\pi\mathcal{L}\Big(y,-i\frac{\partial}{\partial y}\Big)=\pi\mathcal{L}\Big(y,-i\frac{\partial}{\partial y'},-i\frac{\partial}{\partial y_3}\Big),\quad \pi\mathcal{B}\Big(y,-i\frac{\partial}{\partial y}\Big)=\pi\mathcal{B}\Big(y,-i\frac{\partial}{\partial y'},-i\frac{\partial}{\partial y_3}\Big).$$

Определение 4. (см. [33, с. 380], а также [18, с. 12]) *Краевая задача* (30), (31) *называется эллиптической, если выполнено определение 3 и условие Шапиро–Лопатинского:*

$$\operatorname{rank}\int\limits_{\gamma_+}\pi\mathcal{B}(0,\xi',\xi_3)\big(\pi\mathcal{L}(0,\xi',\xi_3)\big)^{-1}\big(I_m,\xi_3I_m\big)\,d\xi_3=r$$

для любого $\xi'\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. Здесь I_m — единичная матрица в $\mathbb{R}^m$, а через $\big(I_m,\xi_3I_m\big)$ обозначена составная $(m\times 2m)$-матрица; γ_+ — спрямляемый контур в верхней ξ_3-полуплоскости, обходящий в положительном направлении все ξ_3-корни уравнения $\det\pi\mathcal{L}(0,\xi',\xi_3)=0$*, лежащие в верхней полуплоскости.*

Для проверки условия Шапиро–Лопатинского понадобятся также следующие леммы и обозначения из [18].

Лемма 7. (см. [18, с. 14]) *В построенной выше локальной системе координат операторы $\partial/\partial x_i$ принимают вид*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{2} \big(1 - K_j y_3\big)^{-1} E_j^{-1}(y') \frac{\partial z_i}{\partial y_j} \, \frac{\partial}{\partial y_j} + N_i \frac{\partial}{\partial y_3},$$

где K_j $(j = 1, 2)$ — главные кривизны поверхности $\partial\Omega$.

Введём некоторые обозначения. Пусть

$$\beta := (\beta_1; \beta_2; \beta_3)^\tau, \quad \beta_l := \sum_{j=1}^{2} E_j^{-1}(y') \frac{\partial z_l}{\partial y_j} \xi_j \quad (l = 1, 2, 3), \quad \alpha := \beta + \xi_3 N, \tag{32}$$

тогда $\beta^\tau N = 0$, $N^\tau \beta = 0$, $N^\tau N = 1$, поскольку $\beta = E_1^{-1/2} \xi_1 \tau_1 + E_2^{-1/2} \xi_2 \tau_2$. Положим $|\xi'|^2 := |\beta|^2$, тогда $|\xi'|^2 := \beta^\tau \beta = E_1^{-1} \xi_1^2 + E_2^{-1} \xi_2^2$. В локальной системе координат под символом $|\xi|^2$ будем понимать следующее выражение $|\xi|^2 := |\xi'|^2 + \xi_3^2 = \alpha^\tau \alpha$.

Лемма 8. (см. [18, с. 15]) *Во введённой выше локальной системе координат при $y_3 = 0$ имеют место следующие формулы для главных символов:*

$$\sigma_0\Big(\frac{\partial}{\partial x_l}\Big) = i\alpha_l, \quad \sigma_0(\nabla) = i\alpha, \quad \sigma_0(\mathrm{div}) = i\alpha^\tau, \quad \sigma_0(\Delta) = -|\xi|^2 = -\big(|\xi'|^2 + \xi_3^2\big).$$

Лемма 9. (см. [18, с. 16]) *Справедливы следующие формулы для контурных интегралов, в которых контур интегрирования лежит в верхней ξ_3-полуплоскости и в положительном направлении окружает точку $\xi_3 = i|\xi'|$:*

$$\int_{\gamma_+} \frac{d\xi_3}{|\xi|^2} = \frac{\pi}{|\xi'|}, \quad \int_{\gamma_+} \frac{\xi_3 \, d\xi_3}{|\xi|^2} = \pi i, \quad \int_{\gamma_+} \frac{\xi_3^2 \, d\xi_3}{|\xi|^2} = -\pi|\xi'|, \quad \int_{\gamma_+} \frac{d\xi_3}{|\xi|^4} = \frac{\pi}{2|\xi'|^3},$$

$$\int_{\gamma_+} \frac{\xi_3 \, d\xi_3}{|\xi|^4} = 0, \quad \int_{\gamma_+} \frac{\xi_3^2 \, d\xi_3}{|\xi|^4} = \frac{\pi}{2|\xi'|}, \quad \int_{\gamma_+} \frac{\xi_3^3 \, d\xi_3}{|\xi|^4} = \pi i, \qquad |\xi|^2 = |\xi'|^2 + \xi_3^2.$$

4.2. **О существенном и дискретном спектре оператора $\mathcal{A}$.** Напомним (см. определение 1), что существенный спектр оператора $\mathcal{A}$ состоит из тех точек $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$ не является фредгольмовым. Выпишем систему дифференциальных уравнений, порождающих спектральную задачу $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})\xi = 0$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho_{i0}} \sum_{j=1}^{n} L_{ij} \mathbf{u}_j + \nabla\bigg(\frac{c_i^{1/2} \rho_i}{\rho_{i0}^{1/2}}\bigg) - \frac{1}{\rho_{i0}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) - \lambda \mathbf{u}_i = \mathbf{0}, \\ &\frac{c_i^{1/2}}{\rho_{i0}^{1/2}} \mathrm{div}(\rho_{i0} \mathbf{u}_i) - \lambda \rho_i = 0, \quad x \in \Omega, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{33}$$

Можно проверить, что система из (33) составляет невырожденную систему Дуглиса–Ниренберга (см. [33, с. 375], а также [32]). Из работы [15] следует, что оператор $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$ фредгольмов тогда и только тогда, когда соответствующая краевая задача является эллиптической.

Выделим из системы (33) главную часть:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n} L_{ij}\mathbf{u}_j + c_i^{1/2}\rho_{i0}^{1/2}\nabla\rho_i = \mathbf{0},\\ &c_i^{1/2}\rho_{i0}^{1/2}\mathrm{div}\mathbf{u}_i - \lambda\rho_i = 0, \quad x\in\Omega, \quad i=1,\dots,n.\end{aligned} \tag{34}$$

Выделим из граничных условий (5) (с учётом (11)) главную часть:

$$\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{n} = 0, \quad 2\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n}\cdot\tau_s = 0, \quad x\in\partial\Omega, \quad s=1,2, \quad i=1,\dots,n. \tag{35}$$

Обозначим через $\mathcal{L}_\lambda(x,D)$ матричный дифференциальный оператор системы уравнений (33) — это $(4n\times 4n)$-матрица; а через $\mathcal{B}(x,D)$ матрицу, отвечающую граничным условиям — это $(3n\times 4n)$-матрица. В этом случае главная часть $\pi\mathcal{L}_\lambda(x,D)$ оператора $\mathcal{L}_\lambda(x,D)$ определяется системой (34), а $\pi\mathcal{B}(x,D) = \mathcal{B}(x,D)$, где $\mathcal{B}(x,D)$ определяется граничными условиями (35).

Таким образом, существенный спектр исследуемого оператора $\mathcal{A}$ будет состоять из тех точек $\lambda\in\mathbb{C}$, в которых нарушается эллиптичность краевой задачи (34)–(35).

Лемма 10. *Дифференциальный оператор $\mathcal{L}_\lambda(x,D)$ эллиптичен в замкнутой области $\overline{\Omega}\subset\mathbb{R}^3$ при $\lambda\notin\Lambda_E$, где*

$$\Lambda_E = \bigl\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \det\bigl(\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})-\mathbf{\Phi}\bigr) = 0,\ \ x\in\overline{\Omega}\bigr\}.$$

Доказательство. Рассмотрим главный символ $\sigma_0(\mathcal{L}_\lambda(x,D)) = \pi\mathcal{L}_\lambda(x,\xi)$, где $\xi = (\xi_1;\xi_2;\xi_3)^\tau$, системы (33), определяемый системой (34):

$$\pi\mathcal{L}_\lambda(x,\xi) = \begin{pmatrix}\mathbf{M}\otimes|\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\xi\xi^\tau & \mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\xi\\ \mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\xi^\tau & -\lambda I_n\end{pmatrix}, \tag{36}$$

где $\mathbf{M} = \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\mathbf{\Lambda} = \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\mathbf{\Phi} = \mathrm{diag}(c_1\rho_{10}(x_3),\dots,c_n\rho_{n0}(x_3))$ — матрицы вязкостей и плотностей. Здесь и далее знак $\otimes$ означает тензорное (кронекеровское) произведение матриц. Основные свойства тензорного произведения можно найти в [21, гл. 8, п. 8.2].

Обозначим

$$\pi\mathcal{L}_\lambda(x,\xi) = \begin{pmatrix}\mathbf{M}\otimes|\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\xi\xi^\tau & \mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\xi\\ \mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\xi^\tau & -\lambda I_n\end{pmatrix} =: \begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix} \tag{37}$$

и применим факторизацию (29) при $E_1 = \mathbb{C}^{3n}$, $E_2 = \mathbb{C}^n$. С учётом $\xi^\tau\xi = |\xi|^2$ непосредственными вычислениями проверяется (см. (3) и замечание 1), что

$$\begin{aligned}A_{11}^{-1} &= \Bigl(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\xi\xi^\tau\Bigr)^{-1}\\ &= \frac{1}{|\xi|^4}\Bigl(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\otimes\xi\xi^\tau\Bigr).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$
\begin{aligned}
&A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}=\\
&\qquad=-\lambda I_n-\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\xi^{\tau}\cdot\Big(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\xi\xi^{\tau}\Big)^{-1}\cdot\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\xi\\
&\qquad=\mathbf{\Phi}^{1/2}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}-\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}-\lambda I_n\\
&\qquad=\mathbf{\Phi}^{1/2}\big(I_n-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}-\lambda I_n\\
&\qquad=\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\big((2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})-(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}-\lambda I_n\\
&\qquad=\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}-\lambda I_n=\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{I}_2\mathbf{\Phi}^{-1/2}.
\end{aligned}\tag{38}
$$

Здесь и далее для сокращения записи обозначено

$$
\mathbf{I}_j:=\mathbf{\Phi}-\lambda(j\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}),\quad j=1,2,3.\tag{39}
$$

Обозначим через $\Gamma_\xi:=(|\xi|^{-1}\xi,\mathbf{a}^{\perp},\mathbf{b}^{\perp})$ матрицу, составленную из вектор-столбцов $|\xi|^{-1}\xi$, $\mathbf{a}^{\perp}$, $\mathbf{b}^{\perp}$ ($|\mathbf{a}^{\perp}|=|\mathbf{b}^{\perp}|=1$), где $\mathbf{a}^{\perp}$, $\mathbf{b}^{\perp}$ ортогональны ξ и между собой. Непосредственной проверкой доказываются следующие формулы:

$$
\Gamma_\xi^{\tau}\Gamma_\xi=I_3,\quad \Gamma_\xi^{\tau}\xi=(|\xi|;0;0)^{\tau}=:|\xi|\mathbf{e}_1,\quad \Gamma_\xi^{\tau}\xi\xi^{\tau}\Gamma_\xi=\operatorname{diag}(|\xi|^2,0,0)=:|\xi|^2P_1.\tag{40}
$$

Обозначим $\mathrm{S}_\xi:=I_n\otimes\Gamma_\xi$, тогда $\mathrm{S}_\xi^{\tau}\mathrm{S}_\xi=I_n\otimes I_3=I_{3n}$. Из (29), (37), (38), (40) и теоремы Лапласа о вычислении определителей теперь найдём, что (см. определение 3)

$$
\begin{aligned}
&\pi\det\mathcal{L}_\lambda(x,\xi)=\det\pi\mathcal{L}_\lambda(x,\xi)=\\
&\qquad=\det\begin{pmatrix}I&0\\A_{21}A_{11}^{-1}&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&0\\0&A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&A_{11}^{-1}A_{12}\\0&I\end{pmatrix}\\
&\qquad=\det\begin{pmatrix}\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\xi\xi^{\tau}&0_{3n\times n}\\0_{n\times 3n}&\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{I}_2\mathbf{\Phi}^{-1/2}\end{pmatrix}\\
&\qquad=\det\mathrm{S}_\xi^{\tau}\big(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\xi\xi^{\tau}\big)\mathrm{S}_\xi\cdot\det(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\cdot\det\mathbf{I}_2\\
&\qquad=\det\big(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2\Gamma_\xi^{\tau}\Gamma_\xi+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\Gamma_\xi^{\tau}\xi\xi^{\tau}\Gamma_\xi\big)\cdot\det(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\cdot\det\mathbf{I}_2\\
&\qquad=\det\big(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes|\xi|^2P_1\big)\cdot\det(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\cdot\det\mathbf{I}_2\\
&\qquad=\big(|\xi|^2\big)^{3n}\cdot\det(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\cdot\det{}^2\mathbf{M}\cdot\det(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\cdot\det\mathbf{I}_2\\
&\qquad=(-1)^n|\xi|^{6n}\cdot\det{}^2\mathbf{M}\cdot\det\big(\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})-\mathbf{\Phi}\big)\neq 0
\end{aligned}\tag{41}
$$

для любого $x\in\overline{\Omega}$ и $\xi\in\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$, если только $\lambda\notin\Lambda_E$. □

Лемма 11. *Задача* (33), (5) *эллиптична при* $\lambda\notin\Lambda_E$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что если $\lambda\in\Lambda_E$, то по лемме 10 оператор $\mathcal{L}_\lambda(x,D)$ теряет эллиптичность и, следовательно, задача (33), (5) не является эллиптической (см. определение 4). Таким образом, далее считаем, что $\lambda\notin\Lambda_E$. Дальнейшее доказательство разобьём на несколько шагов.

1) Зафиксируем $z_0\in\partial\Omega$ и введём в окрестности этой точки локальную систему координат, как описано в предыдущем пункте. Перепишем операторную матрицу системы (33) в локальной системе координат и выделим из неё главную часть. Эта главная часть представляет собой операторную матрицу системы (34), записанную в локальной системе координат. Главный символ последней системы имеет вид (36) с заменой ξ на α (см. (32) и лемму 8). При этом

$\det \pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)$ вычисляется по формуле (41) с заменой $|\xi|^2$ на $\alpha^\tau\alpha = \xi'^2+\xi_3^2$. Уравнение $\det \pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)=0$ имеет $3n$-кратные ξ_3-корни $\xi_3=\pm i|\xi'|$.

2) Найдём выражение для матрицы $\big(\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)\big)^{-1}$ в определении 4. Далее для краткости положим $\xi'^2+\xi_3^2 =: |\xi|^2$. Обозначим

$$\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3) = \begin{pmatrix} \mathbf{M}\otimes|\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\alpha\alpha^\tau & \mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\alpha \\ \mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\alpha^\tau & -\lambda I_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix} \tag{42}$$

и найдём матрицу, обратную к $\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)$, с помощью факторизации (29) при $E_1=\mathbb{C}^{3n}$, $E_2=\mathbb{C}^n$. С учётом $\alpha^\tau\alpha=\beta^\tau\beta+\xi_3^2=\xi'^2+\xi_3^2=|\xi|^2$ (см. (32)) непосредственными вычислениями проверяется (см. (3) и замечание 1), что

$$\begin{aligned} A_{11}^{-1} &= \Big(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)^{-1} \\ &= \frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big). \end{aligned} \tag{43}$$

Отсюда следует (см. аналогичные вычисления в (38)), что

$$\begin{aligned} D_2^{-1} = (A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} &= \big(\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{I}_2\mathbf{\Phi}^{-1/2}\big)^{-1} \\ &= \mathbf{\Phi}^{1/2}\mathbf{I}_2^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{\Phi}^{-1/2}\otimes I_1. \end{aligned} \tag{44}$$

Из (42)–(44) с учётом (39) имеем

$$\begin{aligned} &A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} = \\ &\quad = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}\cdot\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\alpha\cdot\mathbf{\Phi}^{1/2}\mathbf{I}_2^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{\Phi}^{-1/2}\otimes I_1\cdot\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\alpha^\tau\cdot A_{11}^{-1} \\ &\quad = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}\cdot\mathbf{\Phi}\mathbf{I}_2^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\alpha\alpha^\tau\times \\ &\qquad\qquad \times\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big) \\ &\quad = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}\cdot\frac{1}{|\xi|^2}\,\mathbf{\Phi}\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau \\ &\quad = A_{11}^{-1} - \frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)\times \\ &\qquad\qquad \times\frac{1}{|\xi|^2}\,\mathbf{\Phi}\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau \\ &\quad = A_{11}^{-1} - \frac{1}{|\xi|^4}\,(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{\Phi}\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau \\ &\quad = \frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big) - \\ &\qquad\qquad - \frac{1}{|\xi|^4}\,(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{\Phi}\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau \\ &\quad = \frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\Big((\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1} + \mathbf{\Phi}\mathbf{I}_2^{-1}\Big)\otimes\alpha\alpha^\tau\Big) \\ &\quad = \frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\Big((\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1} + \\ &\qquad\qquad + \big(\mathbf{\Phi} - \lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}) + \lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\mathbf{I}_2^{-1}\Big)\otimes\alpha\alpha^\tau\Big) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\Big((\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1} + I_n + {} + \lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{I}_2^{-1}\Big)\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)$$

$$= \frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2 I_3 - \big(\mathbf{M}^{-1}+\lambda\mathbf{I}_2^{-1}\big)\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)$$

$$= \frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2 I_3 - \mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{I}_1\mathbf{M}^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big), \tag{45}$$

$$-A_{11}A_{12}D_2^{-1} = -\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)\times \times\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\alpha\cdot\mathbf{\Phi}^{1/2}\mathbf{I}_2^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{\Phi}^{-1/2}\otimes I_1$$

$$= -\frac{i}{|\xi|^2}\big(\mathbf{M}^{-1} - (2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\big)\mathbf{\Phi}\mathbf{I}_2^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{\Phi}^{-1/2}\otimes\alpha$$

$$= -\frac{i}{|\xi|^2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{\Phi}\mathbf{I}_2^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{\Phi}^{-1/2}\otimes\alpha$$

$$= -\frac{i}{|\xi|^2}\Big(\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{I}_2\mathbf{\Phi}^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\Big)^{-1}\otimes\alpha$$

$$= -\frac{i}{|\xi|^2}\big(\mathbf{\Phi}^{1/2} - \lambda\mathbf{\Phi}^{-1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\otimes\alpha = -\frac{i}{|\xi|^2}\,\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes\alpha. \tag{46}$$

Из факторизации (29) и формул (45)–(46) теперь сможем найти необходимые для вычислений части матрицы $\big(\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)\big)^{-1}$.

3) Перепишем оператор граничных условий (5) во введённой выше локальной системе координат и рассмотрим его главную часть. Эта главная часть представляет собой операторную матрицу граничных условий (35), записанную в локальной системе координат.

Заметим, что часть граничных условий (35) может быть переписана в следующей форме:

$$0 = 2\sum_{j=1}^n \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n}\cdot\tau_s = \sum_{j=1}^n 2\mu_{ij}\tau_s^\tau e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n}$$

$$= \sum_{j=1}^n 2\mu_{ij}\tau_s^\tau \begin{pmatrix} e_{11}(\mathbf{u}_j) & e_{12}(\mathbf{u}_j) & e_{13}(\mathbf{u}_j) \\ e_{21}(\mathbf{u}_j) & e_{22}(\mathbf{u}_j) & e_{23}(\mathbf{u}_j) \\ e_{31}(\mathbf{u}_j) & e_{32}(\mathbf{u}_j) & e_{33}(\mathbf{u}_j) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^n \mu_{ij}\tau_s^\tau \begin{pmatrix} \nabla u_{j1}\cdot\mathbf{n} + \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{n} \\ \nabla u_{j2}\cdot\mathbf{n} + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{n} \\ \nabla u_{j3}\cdot\mathbf{n} + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{n} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^n \mu_{ij}\tau_s^\tau \begin{pmatrix} n_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{n}\cdot\nabla & n_2\frac{\partial}{\partial x_1} & n_3\frac{\partial}{\partial x_1} \\ n_1\frac{\partial}{\partial x_2} & n_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{n}\cdot\nabla & n_3\frac{\partial}{\partial x_2} \\ n_1\frac{\partial}{\partial x_3} & n_2\frac{\partial}{\partial x_3} & n_3\frac{\partial}{\partial x_3} + \mathbf{n}\cdot\nabla \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{j1} \\ u_{j2} \\ u_{j3} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^n \mu_{ij}\tau_s^\tau\Big\{n_k\frac{\partial}{\partial x_l} + \delta_{lk}\mathbf{n}\cdot\nabla\Big\}_{l,k=1}^3\mathbf{u}_j, \quad s=1,2, \quad i=1,\dots,n. \tag{47}$$

Во введённой выше локальной системе координат при $y_3=0$ с использованием леммы 8 выпишем главные символы дифференциальных операторов из (47):

$$\sigma_0\Big(\mu_{ij}\tau_s^\tau\Big\{N_k\frac{\partial}{\partial x_l}+\delta_{lk}N\cdot\nabla\Big\}_{l,k=1}^3\Big)=\mu_{ij}\tau_s^\tau\big\{iN_k\alpha_l+i\delta_{lk}N\cdot\alpha\big\}_{l,k=1}^3=$$
$$=\mu_{ij}\tau_s^\tau\big\{iN_k\alpha_l+i\delta_{lk}(\beta^\tau+\xi_3N^\tau)N\big\}_{l,k=1}^3=$$
$$=\mu_{ij}i\tau_s^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3I_3),\quad s=1,2,\quad i,j=1,\dots,n. \tag{48}$$

С учётом (47)–(48) операторная матрица граничных условий (35) запишется в локальной системе координат следующим образом:

$$\pi\mathcal{B}(0,\xi',\xi_3)=\begin{pmatrix}\mathbf{M}\otimes i\tau_1^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3I_3) & 0_n\\ \mathbf{M}\otimes i\tau_2^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3I_3) & 0_n\\ I_n\otimes N^\tau & 0_n\end{pmatrix}. \tag{49}$$

4) Из определения 4, с учётом (49), представления (42), факторизации (29) и формул (45)–(46), теперь следует, что для доказательства эллиптичности задачи (33), (5) требуется показать, что ранг следующей матрицы равен $3n$:

$$\int\limits_{\gamma_+}\pi\mathcal{B}(0,\xi',\xi_3)\big(\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)\big)^{-1}\big(I_{4n},\xi_3I_{4n}\big)\,d\xi_3 \tag{50}$$
$$=\int\limits_{\gamma_+}\begin{pmatrix}\mathbf{M}\otimes i\tau_1^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3I_3) & 0_n\\ \mathbf{M}\otimes i\tau_2^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3I_3) & 0_n\\ I_n\otimes N^\tau & 0_n\end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}A_{12}D_2^{-1}\\ *_{n\times3n} & *_{n\times n}\end{pmatrix}\big(I_{4n},\xi_3I_{4n}\big)\,d\xi_3.$$

Здесь γ_+ — спрямляемый контур в верхней ξ_3-полуплоскости, обходящий в положительном направлении точку $\xi_3=i|\xi'|$, а символами $*_{n\times3n}$, $*_{n\times n}$ обозначены несущественные для дальнейших вычислений матрицы соответствующих размеров.

Обозначим через $\mathcal{M}$ матрицу, составленную из $3n$ строк и первых $4n$ столбцов матрицы (50). Если ранг матрицы $\mathcal{M}$ будет равен $3n$, то и ранг матрицы (50), очевидно, будет таким же. Найдём составляющие матрицы $\mathcal{M}$ с использованием вспомогательных вычислений (см. (32)):

$$\begin{aligned}\tau_s^\tau\alpha=&E_s^{-1/2}\xi_s,\quad \tau_s^\tau\alpha\alpha^\tau=E_s^{-1/2}\xi_s(\beta^\tau+\xi_3N^\tau),\quad s=1,2,\\ &N^\tau\alpha=\xi_3,\quad N^\tau\alpha\alpha^\tau=\xi_3\beta^\tau+\xi_3^2N^\tau.\end{aligned} \tag{51}$$

Отсюда, из формул (45)–(46) и леммы 9 имеем с учётом (39)

$$\int\limits_{\gamma_+}\mathbf{M}\otimes i\tau_s^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3I_3)\cdot\big(A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}\big)\,d\xi_3$$
$$=\int\limits_{\gamma_+}\mathbf{M}\otimes i\tau_s^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3I_3)\cdot\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)\,d\xi_3$$
$$=\int\limits_{\gamma_+}i\Big(I_n\otimes\Big(\frac{1}{|\xi|^2}\,E_s^{-1/2}\xi_sN^\tau+\frac{\xi_3}{|\xi|^2}\,\tau_s^\tau\Big)-$$
$$-\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2^{-1}\otimes2E_s^{-1/2}\xi_s\Big(\frac{\xi_3}{|\xi|^4}\,\beta^\tau+\frac{\xi_3^2}{|\xi|^4}\,N^\tau\Big)\Big)d\xi_3$$

$$= i\biggl(I_n \otimes \biggl(\frac{\pi}{|\xi'|}\, E_s^{-1/2}\xi_s N^\tau + \pi i \tau_s^\tau\biggr) - \mathbf{I}_1\mathbf{I}_2^{-1} \otimes \frac{\pi}{|\xi'|}\, E_s^{-1/2}\xi_s N^\tau\biggr)$$

$$= i\biggl(I_n \otimes \pi i \tau_s^\tau - \lambda \mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1} \otimes \frac{\pi}{|\xi'|}\, E_s^{-1/2}\xi_s N^\tau\biggr), \quad s = 1,2, \tag{52}$$

$$\int\limits_{\gamma_+} I_n \otimes N^\tau \cdot \bigl(A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}\bigr)\, d\xi_3 =$$

$$= \int\limits_{\gamma_+} I_n \otimes N^\tau \cdot \frac{1}{|\xi|^4}\Bigl(\mathbf{M}^{-1} \otimes |\xi|^2 I_3 - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2^{-1} \otimes \alpha\alpha^\tau\Bigr)\, d\xi_3 =$$

$$= \int\limits_{\gamma_+} \biggl(\mathbf{M}^{-1} \otimes \frac{1}{|\xi|^2}\, N^\tau - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2^{-1} \otimes \biggl(\frac{\xi_3}{|\xi|^4}\,\beta^\tau + \frac{\xi_3^2}{|\xi|^4}\, N^\tau\biggr)\biggr) d\xi_3 =$$

$$= \mathbf{M}^{-1} \otimes \frac{\pi}{|\xi'|}\, N^\tau - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2^{-1} \otimes \frac{\pi}{2|\xi'|} N^\tau = \frac{1}{2}\,\mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_3\mathbf{I}_2^{-1} \otimes \frac{\pi}{|\xi'|}\, N^\tau, \tag{53}$$

$$\int\limits_{\gamma_+} \mathbf{M} \otimes i\tau_s^\tau(\alpha N^\tau + \xi_3 I_3) \cdot \bigl(-A_{11}A_{12}D_2^{-1}\bigr)\, d\xi_3$$

$$= \int\limits_{\gamma_+} \mathbf{M} \otimes i\tau_s^\tau(\alpha N^\tau + \xi_3 I_3) \cdot \frac{-i}{|\xi|^2}\, \mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2} \otimes \alpha\, d\xi_3$$

$$= 2\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}E_s^{-1/2}\xi_s \int\limits_{\gamma_+} \frac{\xi_3}{|\xi|^2}\, d\xi_3 = 2\pi i \mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}E_s^{-1/2}\xi_s, \quad s = 1,2, \tag{54}$$

$$\int\limits_{\gamma_+} I_n \otimes N^\tau \cdot \bigl(-A_{11}A_{12}D_2^{-1}\bigr)\, d\xi_3 = \int\limits_{\gamma_+} I_n \otimes N^\tau \cdot \frac{-i}{|\xi|^2}\, \mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2} \otimes \alpha\, d\xi_3$$

$$= -i\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2} \int\limits_{\gamma_+} \frac{\xi_3}{|\xi|^2}\, d\xi_3 = \pi\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}. \tag{55}$$

Из (52)–(55) теперь найдём, что

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} i\bigl(I_n \otimes \pi i \tau_1^\tau - \lambda\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1} \otimes \frac{\pi}{|\xi'|}\, E_1^{-1/2}\xi_1 N^\tau\bigr) & 2\pi i \mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}E_1^{-1/2}\xi_1 \\ i\bigl(I_n \otimes \pi i \tau_2^\tau - \lambda\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1} \otimes \frac{\pi}{|\xi'|}\, E_2^{-1/2}\xi_2 N^\tau\bigr) & 2\pi i \mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}E_2^{-1/2}\xi_2 \\ \frac{1}{2}\,\mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_3\mathbf{I}_2^{-1} \otimes \frac{\pi}{|\xi'|}\, N^\tau & \pi\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{N} :=& \mathcal{M} \cdot \operatorname{diag}\bigl((I_n \otimes N, I_n \otimes \tau_1, I_n \otimes \tau_2), I_n\bigr) \\ =& \begin{pmatrix} -i\lambda\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\frac{\pi}{|\xi'|}\, E_1^{-1/2}\xi_1 & -\pi I_n & 0_n & 2\pi i \mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}E_1^{-1/2}\xi_1 \\ -i\lambda\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\frac{\pi}{|\xi'|}\, E_2^{-1/2}\xi_2 & 0_n & -\pi I_n & 2\pi i \mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}E_2^{-1/2}\xi_2 \\ \frac{1}{2}\,\mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_3\mathbf{I}_2^{-1}\frac{\pi}{|\xi'|} & 0_n & 0_n & \pi\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Несложно видеть, что минор матрицы $\mathcal{N}$, составленный из $3n$ строк и последних $3n$ столбцов, отличен от нуля:

$$\pi^{3n}\det\mathbf{I}_2^{-1} \cdot \det\mathbf{\Phi}^{1/2} = \pi^{3n}{\det}^{-1}\bigl(\mathbf{\Phi} - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})\bigr) \cdot \det\mathbf{\Phi}^{1/2} \neq 0,$$

а значит, $\operatorname{rank}\mathcal{N} = 3n$. Отсюда и из равенства $\operatorname{rank}\mathcal{M} = \operatorname{rank}\mathcal{N}$ следует, что ранг матрицы (50) равен $3n$. □

Лемма 12. $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \Lambda_E$. *Множество* $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ *состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности оператора* $\mathcal{A}$.

Доказательство. Из определения 1, лемм 10, 11 и [15] следует формула для существенного спектра оператора $\mathcal{A}$. Далее, в лемме 6 доказано, что оператор $\mathcal{A}$ является максимальным аккретивным оператором. Следовательно, оператор $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$ непрерывно обратим при отрицательных λ и его дефект и индекс равны нулю. Множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$, очевидно, является связным. Отсюда и из теоремы об устойчивости индекса и дефекта замкнутого оператора (см. [17, гл. 4, § 5, п. 2, теорема 5.17] или [13, гл. 17, § 2, теорема 2.1]) следует, что множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}$. □

4.3. **Локализация и асимптотика дискретного спектра оператора $\mathcal{A}$.** Доказательство факта, что невещественный спектр оператора $\mathcal{A}$ (или оператора $\mathcal{A}^{-1}$, если он существует) состоит из конечного числа симметричных относительно вещественной оси пар собственных значений конечной кратности, состоит в проверке принадлежности оператора $\mathcal{A}^{-1}$ классу Хелтона: $\mathcal{A}^{-1} \in (H)$ (см. [1, гл. III, § 5, определение 5.1, следствие 5.21]). Чтобы не приводить здесь множество сопутствующих определений и терминов, сформулируем желаемое следствие из [1, гл. III, § 5, следствие 5.21] и [1, 23, гл. III, § 5, пример 5.23] в виде следующего предложения.

Предложение 1. *Пусть* $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ *— гильбертовы пространства. Определим в ортогональной сумме этих пространств* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ *оператор*

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_1 & -S_3^* \\ S_3 & S_2 \end{pmatrix}, \qquad T_1 = T_1^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1), \quad T_2 = T_2^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2),$$
$$S_1 = S_1^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1), \quad S_2 = S_2^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_2), \quad S_3 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2).$$

Пусть $\sigma(T_1) \cap \sigma(T_2) = \varnothing$. *Тогда невещественный спектр оператора* $\mathcal{T}$ *состоит из конечного числа симметричных относительно* $\mathbb{R}$ *пар собственных значений конечной алгебраической кратности.*

Лемма 13. *Невещественный спектр оператора* $\mathcal{A}$ *состоит из конечного числа симметричных относительно* $\mathbb{R}$ *пар собственных значений конечной алгебраической кратности.*

Доказательство. Покажем, что $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{0\}$. Допустим противное, тогда существует такой элемент $0 \neq \xi = (\mathbf{u};\rho)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, что (см. лемму 6)

$$\mathcal{A}\xi = \begin{pmatrix} A^{1/2}(A^{1/2}\mathbf{u} + Q^*\rho) \\ -QA^{1/2}\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $(\rho, QA^{1/2}\mathbf{u})_{\mathcal{H}_2} = 0$, а значит, $(A^{1/2}(A^{1/2}\mathbf{u} + Q^*\rho), \mathbf{u})_{\mathcal{H}_1} = \|A^{1/2}\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1} = 0$ и $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Тогда $A^{1/2}Q^*\rho = 0$, а значит, $\rho = 0$, так как оператор Q^* имеет тривиальное ядро: $\operatorname{Ker} Q^* = \{0\}$ (см. лемму 3, (22) и лемму 5).

Таким образом, точка $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}$. По лемме 12 точка $\lambda = 0$ — регулярная точка оператора $\mathcal{A}$: $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Отсюда и из второй факторизации в лемме 6 следует, что оператор QQ^* является положительно определённым в $\mathcal{H}_2$, а значит, существует $(QQ^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$.

Из второй факторизации в лемме 6 теперь найдём, что

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (QQ^*)^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^{-1} - A^{-1/2}Q^*(QQ^*)^{-1}QA^{-1/2} & -A^{-1/2}Q^*(QQ^*)^{-1} \\ (QQ^*)^{-1}QA^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Из представления $A = L + T$ и лемм 1, 2 следует, что $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1)$. Таким образом, оператор $\mathcal{A}^{-1}$ имеет структуру оператора $\mathcal{T}$ из предложения 1. Утверждение леммы теперь следует из $\sigma((QQ^*)^{-1}) \cap \{0\} = \varnothing$ и предложения 1. $\square$

Лемма 14. *Спектр оператора $\mathcal{A}$ содержит подпоследовательность собственных значений с асимптотическим поведением*

$$\lambda_k^{(\infty)}(\mathcal{A}) = \mathcal{C}^{-2/3}k^{2/3}(1+o(1)), \quad k \longrightarrow \infty,$$
$$\mathcal{C} := \frac{1}{6\pi^2}\int\limits_\Omega \Big(\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2} + 2\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2}\Big)\, d\Omega.$$

Доказательство. 1) Покажем, что собственные значения оператора L имеют асимптотическое распределение $\lambda_k(L) = \mathcal{C}^{-2/3}k^{2/3}(1+o(1))$ при $k \longrightarrow \infty$ с константой $\mathcal{C}$, определённой в лемме.

Действительно, указанное асимптотическое распределение следует из обзора М.Ш. Бирмана и М.З. Соломяка [5, § 1, п. 3] с константой

$$\mathcal{C} = \frac{1}{24\pi^3}\int\limits_\Omega d\Omega \int\limits_{|\xi|=1} \mathrm{tr}\Big\{\big(a_0^{-1/2}b_0a_0^{-1/2}\big)^{3/2}\Big\}\, dS(\xi), \tag{56}$$

где $a_0 := \mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3 + (\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\xi\xi^\tau$, $b_0 := \mathbf{R}\otimes I_3$. Учитывая, что

$$\mathrm{tr}\Big\{\big(a_0^{-1/2}b_0a_0^{-1/2}\big)^{3/2}\Big\} = \mathrm{tr}\Big\{\big(a_0^{1/2}b_0^{-1}a_0^{1/2}\big)^{-3/2}\Big\} = \mathrm{tr}\Big\{\big(b_0^{-1/2}a_0b_0^{-1/2}\big)^{-3/2}\Big\},$$

вычислим собственные значения матрицы $b_0^{-1/2}a_0b_0^{-1/2}$. Используя (40) и теорему Лапласа о вычислении определителей, найдём соответствующее характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned}
&\det(b_0^{-1/2}a_0b_0^{-1/2} - \lambda I_{3n}) = \\
&\quad= \det\Big(\mathbf{R}^{-1/2}\big(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3 + (\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\xi\xi^\tau - \lambda\mathbf{R}\otimes I_3\big)\mathbf{R}^{-1/2}\Big) \\
&\quad= \det{}^2\mathbf{R}^{-1/2}\cdot\det\Big(I_n\otimes\Gamma_\xi^\tau\cdot\big(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3 + \\
&\qquad\qquad + (\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\xi\xi^\tau - \lambda\mathbf{R}\otimes I_3\big)\cdot I_n\otimes\Gamma_\xi\Big) \\
&\quad= \det\mathbf{R}^{-1}\cdot\det\big(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3 + (\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes|\xi|^2P_1 - \lambda\mathbf{R}\otimes I_3\big) \\
&\quad= |\xi|^{6n}\cdot\det\mathbf{R}^{-1}\cdot\det\big(\mathbf{M}\otimes I_3 + (\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes P_1 - \mathbf{R}\otimes\lambda|\xi|^{-2}I_3\big) \\
&\quad= |\xi|^{6n}\cdot\det\mathbf{R}^{-1}\cdot\det\big(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}) - \lambda|\xi|^{-2}\mathbf{R}\big)\cdot\det{}^2\big(\mathbf{M} - \lambda|\xi|^{-2}\mathbf{R}\big) = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что спектр матрицы $b_0^{-1/2}a_0b_0^{-1/2}$ состоит из трёх множеств:

$$\Big\{\lambda_k^{(1)} = |\xi|^2\lambda_k\big(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}\big),\ \ \lambda_k^{(2)} = \lambda_k^{(3)} = |\xi|^2\lambda_k\big(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2}\big)\Big\}_{k=1}^{n},$$

где $\lambda_k\big(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}\big)$, $\lambda_k\big(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2}\big)$ $(k=1,\ldots,n)$ — собственные значения соответственно матриц $\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}$ и $\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2}$. Из (56) и проведённых рассуждений теперь найдём, что

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \frac{1}{24\pi^3}\int\limits_{\Omega} d\Omega \int\limits_{|\xi|=1} \bigg(\sum_{k=1}^{n}\big(\lambda_k^{(1)}\big)^{-3/2} + 2\sum_{k=1}^{n}\big(\lambda_k^{(2)}\big)^{-3/2}\bigg)\, dS(\xi) \\
&= \frac{1}{24\pi^3}\int\limits_{\Omega}\Big(\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2} + \\
&\qquad\qquad + 2\,\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2}\Big)\, d\Omega \int\limits_{|\xi|=1}\frac{dS(\xi)}{|\xi|^3} \\
&= \frac{1}{6\pi^2}\int\limits_{\Omega}\Big(\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2} + 2\,\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2}\Big)\, d\Omega.
\end{aligned}$$

2) Из представления $A = L + T = (I + TL^{-1})L$ следует, что оператор A является *слабым возмущением* оператора L. Отсюда и из степенной асимптотики собственных значений оператора L следует (см., например, [25]), что главные члены асимптотик собственных значений этих операторов совпадают.

Далее, из (26) следует, что собственные значения оператора $\mathcal{A}$ и оператор-функции $L(\lambda)$ совпадают. Наличие же у оператор-функции (пучка операторов) $L(\lambda)$ последовательности собственных значений с указанным в лемме асимптотическим распределением следует из теоремы А.С. Маркуса и В.И. Мацаева о сравнении спектров (см. [25, теорема 1.2]). □

Утверждения теоремы 1 следуют из лемм 12, 13, 14.

5. Свойства эволюционной задачи

5.1. **Утверждение о разрешимости.** В дополнение к лемме 6 докажем следующие утверждения. Метод доказательства этих лемм применялся в работах [35, лемма 2.4], [36, леммы 2.3, 2.4], [8] при исследовании задач "параболического типа".

Лемма 15. *Оператор $-\mathcal{A}$ является генератором голоморфной полугруппы. Для числовой области значений $\mathcal{W}(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ выполнено включение:*

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}) \subset \bigcap_{\alpha>0}\big\{\lambda\in\mathbb{C} : \big|\arg\big(\lambda+\alpha^2\|Q^*\|^2\big)\big| \leqslant \mathrm{arctg}\,\alpha^{-1}\big\}. \tag{57}$$

Доказательство. По лемме 6 оператор $\mathcal{A}$ плотно определён и замкнут. Докажем, что оператор $\mathcal{A}$ секториален. Пусть $\xi = (\mathbf{u};\rho)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, тогда $\mathbf{u}\in\mathcal{D}(A^{1/2})$ и из факторизации (24) оператора $\mathcal{A}$ в симметричной форме получим, что

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\big(\mathcal{A}\xi,\xi\big)_{\mathcal{H}} &= \mathrm{Re}\left(\begin{pmatrix} I & Q^* \\ -Q & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{1/2}\mathbf{u} \\ \rho\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A^{1/2}\mathbf{u} \\ \rho\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} = \|A^{1/2}\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1}, \\
\big|\mathrm{Im}\big(\mathcal{A}\xi,\xi\big)_{\mathcal{H}}\big| &= \big|\mathrm{Im}\big[(Q^*\rho, A^{1/2}\mathbf{u})_{\mathcal{H}_1} - (QA^{1/2}\mathbf{u},\rho)_{\mathcal{H}_2}\big]\big| = \\
&= \big|2\,\mathrm{Im}(Q^*\rho, A^{1/2}\mathbf{u})_{\mathcal{H}_1}\big| \leqslant 2\,\|A^{1/2}\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}_1}\|Q^*\rho\|_{\mathcal{H}_1}.
\end{aligned}$$

Из этих оценок при любом $\alpha > 0$ получим, что

$$\operatorname{Re}\bigl(\mathcal{A}\xi,\xi\bigr)_{\mathcal{H}} - \alpha\bigl|\operatorname{Im}\bigl(\mathcal{A}\xi,\xi\bigr)_{\mathcal{H}}\bigr| \geqslant \bigl(\|A^{1/2}\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}_1} - \alpha\|Q^*\rho\|_{\mathcal{H}_1}\bigr)^2 - \alpha^2\|Q^*\rho\|^2_{\mathcal{H}_1} \geqslant \\ \geqslant -\alpha^2\|Q^*\|^2\cdot\|\rho\|^2_{\mathcal{H}_2} \geqslant -\alpha^2\|Q^*\|^2\cdot\|\xi\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re}\bigl([\mathcal{A}+\alpha^2\|Q^*\|^2\mathcal{I}]\xi,\xi\bigr)_{\mathcal{H}} - \alpha\bigl|\operatorname{Im}\bigl([\mathcal{A}+\alpha^2\|Q^*\|^2\mathcal{I}]\xi,\xi\bigr)_{\mathcal{H}}\bigr| \geqslant 0,$$

или

$$\frac{\bigl|\operatorname{Im}\bigl([\mathcal{A}+\alpha^2\|Q^*\|^2\mathcal{I}]\xi,\xi\bigr)_{\mathcal{H}}\bigr|}{\operatorname{Re}\bigl([\mathcal{A}+\alpha^2\|Q^*\|^2\mathcal{I}]\xi,\xi\bigr)_{\mathcal{H}}} \leqslant \frac{1}{\alpha} \quad \forall\, 0 \neq \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \ \ \alpha > 0.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{W}(\mathcal{A}) \subset \bigl\{\lambda \in \mathbb{C}: |\arg\bigl(\lambda + \alpha^2\|Q^*\|^2\bigr)| \leqslant \operatorname{arctg}\alpha^{-1}\bigr\}$ при любом $\alpha > 0$, то есть оператор $\mathcal{A}$ секториален и выполнено (57). Максимальность оператора $\mathcal{A}$ следует из $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ при $\lambda < 0$ (см. лемму 6 и (27)). □

Лемма 16. *Голоморфная полугруппа $\mathcal{U}(t)$, генерируемая оператором $-\mathcal{A}$, является равномерно экспоненциально устойчивой, то есть существуют $\omega > 0$ и $M \geqslant 1$ такие, что*

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant Me^{-\omega t} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+. \tag{58}$$

Доказательство. Известно (см., например, [7, гл. 4, § 3, следствие 3.12]), что если $\mathcal{U}(t)$ голоморфная полугруппа, то её тип совпадает со спектральной границей $s(-\mathcal{A}) = \sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(-\mathcal{A})\}$ генератора $-\mathcal{A}$. Таким образом, существование чисел $\omega > 0$, $M \geqslant 1$ и оценки (58) будет следовать из неравенства $s(-\mathcal{A}) < 0$ или, что эквивалентно, из неравенства $\inf\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} > 0$.

Из формулы (57), переписанной в виде

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}+\alpha^2\|Q^*\|^2\mathcal{I}) \subset \bigl\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| \leqslant \operatorname{arctg}\alpha^{-1}\bigr\} \quad \forall\, \alpha > 0,$$

построением огибающих соответствующих семейств прямых найдём, что числовая область значений оператора $\mathcal{A}$ содержится в параболической области:

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}) \subset \bigl\{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant 2\|Q^*\|(\operatorname{Re}\lambda)^{1/2}\bigr\}. \tag{59}$$

Из доказательства леммы 13 следует, что $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Теперь, учитывая, что резольвентное множество $\rho(\mathcal{A})$ открыто и $\sigma(\mathcal{A}) \subset \overline{\mathcal{W}(\mathcal{A})}$, из (59) найдём, что имеет место следующее неравенство: $\inf\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} > 0$. □

Лемма 17. *Пусть $\mathbf{u}^0 := (\mathbf{u}^0_1;\dots;\mathbf{u}^0_n)^\tau \in \mathcal{D}(L)$, $\rho^0 := (\rho^0_1;\dots;\rho^0_n)^\tau \in \mathcal{D}(B^*)$ (см. (8), (12) и лемму 3), а поля $\mathbf{f}_i$ $(i = 1,\dots,n)$ локально гёльдеровы, то есть для любого $T \geqslant 0$ существуют $K = K(T) > 0$, $k = k(T) \in (0,1]$ такие, что*

$$\|\mathbf{f}_i(t) - \mathbf{f}_i(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant K|t-s|^k \quad \forall\, 0 \leqslant t,s \leqslant T, \quad i = 1,\dots,n.$$

Тогда начально-краевая задача (7), (5), (8) имеет единственное решение в смысле определения 2.

Доказательство. 1) Заметим, что если поля $\mathbf{u}_i$ и функции ρ_i $(i = 1,\dots,n)$ — решение начально-краевой задачи (7), (5), (8), то функция $\xi := (\mathbf{u};\rho)^\tau$, где $\mathbf{u} := (\mathbf{u}_1;\dots;\mathbf{u}_n)^\tau$, $\rho := (\rho_1;\dots;\rho_n)^\tau$, — решение задачи Коши

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}_0\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0 \tag{60}$$

с незамкнутым оператором $\mathcal{A}_0$ (см. (23)). Здесь

$$\xi^0 := (\mathbf{u}^0; \rho^0)^\tau, \quad \mathcal{F}(t) := \big(\mathbf{f}(t); 0\big)^\tau, \quad \mathbf{f}(t) := \big(\mathbf{f}_1(t); \ldots; \mathbf{f}_n(t)\big)^\tau.$$

Верно и обратное.

2) Рассмотрим задачу Коши (9) с замкнутым оператором $\mathcal{A}$.

Напомним, что $A = L + T$. Отсюда и из леммы 2 следует, что $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(L)$. Из условий леммы теперь имеем $\xi^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. лемму 6). Легко видеть также, что условия леммы влекут локальную гёльдеровость функции $\mathcal{F}$. Из лемм 6, 15 и теоремы о разрешимости абстрактной задачи Коши с оператором, генерирующем голоморфную полугруппу (см., например, [14, гл. 2, § 1, теорема 1.4]), следует, что задача Коши (9) имеет единственное классическое решение $\xi(\cdot)$. То есть такую функцию $\xi \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}) \cap C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ (здесь подразумевается, что на $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ введена норма графика оператора $\mathcal{A}$ или эквивалентная ей, и $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ превращено таким образом в банахово пространство), что выполнено уравнение из (9) при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и начальное условие.

Лемма будет доказана, если удастся показать, что функция $\xi(\cdot)$ является решением задачи Коши (60). То есть если $\xi \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\xi(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $\mathcal{A}_0\xi \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, выполнено уравнение из (60) при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и начальное условие.

3) Итак, пусть $\xi \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}) \cap C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ — (единственное) решение задачи Коши (9). В силу леммы 6 последнее эквивалентно тому, что $\mathbf{u} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_1)$, $\rho \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_2)$, $\mathbf{u} + A^{-1/2}Q^*\rho \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A))$ и выполнены соотношения

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -A(\mathbf{u} + A^{-1/2}Q^*\rho) + \mathbf{f}(t), \quad \frac{d\rho}{dt} = QA^{1/2}\mathbf{u}. \tag{61}$$

Из этих соотношений следует, что

$$\mathbf{u} + A^{-1/2}Q^*\rho^0 + A^{-1/2}Q^* \int_0^t QA^{1/2}\mathbf{u}(s)\, ds \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A)).$$

Отсюда и из $A^{-1/2}Q^*\rho^0 = A^{-1/2}Q^*|_{\mathcal{D}(B^*)}\rho^0 = A^{-1}B^*\rho^0 \in \mathcal{D}(A)$ (см. лемму 5) следует, что функция $\mathbf{u}(\cdot)$ является решением интегрального уравнения Вольтерра второго рода в банаховом пространстве $\mathcal{E}(A) = (\mathcal{D}(A), \|A\cdot\|_{\mathcal{H}_1})$:

$$\mathbf{u}(t) + \int_0^t A^{-1/2}Q^*QA^{1/2}\mathbf{u}(s)\, ds = \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{g} \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{E}(A)).$$

Из оценок (см. (22) и леммы 5, 4)

$$\begin{aligned}\|A^{-1/2}Q^*QA^{1/2}\mathbf{u}\|_{\mathcal{E}(A)} &= \|A^{1/2}Q^*QA^{1/2}A^{-1}(A\mathbf{u})\|_{\mathcal{H}} = \|A^{1/2}Q^*BA^{-1}(A\mathbf{u})\|_{\mathcal{H}} = \\ &= \|A^{1/2}Q^*|_{\mathcal{D}(B^*)}BA^{-1}(A\mathbf{u})\|_{\mathcal{H}} = \|B^*BA^{-1}(A\mathbf{u})\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|B^*BA^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{E}(A)},\end{aligned}$$

выполненных для любого $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(A)$, следует, что ядро рассматриваемого уравнения Вольтерра сильно непрерывно на $\mathbb{R}_+$. Отсюда и из $\mathbf{g} \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{E}(A))$ следует, что уравнение имеет единственное решение $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{E}(A) = \mathcal{D}(A))$.

Теперь заметим, что $QA^{1/2}\mathbf{u} = BA^{-1}(A\mathbf{u}) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_1)$, $QA^{1/2}\mathbf{u}(t) \in \mathcal{D}(B^*)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $B^*QA^{1/2}\mathbf{u} = B^*BA^{-1}(A\mathbf{u}) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_1)$ (см. лемму 4). Отсюда, из [14, гл. 1, § 1, лемма 1.5] и второго соотношения в (61) теперь получим, что $\rho(t) \in \mathcal{D}(B^*)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $B^*\rho \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_1)$.

Таким образом, $\xi(t) = (\mathbf{u}(t); \rho(t))^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(B^*)$ (см. (23)) при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и

$$\mathcal{A}_0 \xi = \begin{pmatrix} A\mathbf{u} + B^*\rho \\ -B\mathbf{u} \end{pmatrix} \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}),$$

а скобки первом соотношении из (61) можно раскрыть. $\square$

5.2. **Утверждение об асимптотическом поведении решения.** Метод доказательства следующей леммы применялся в работах [34, 36].

Лемма 18. *Пусть* $\mathbf{u}^0 := (\mathbf{u}_1^0; \dots; \mathbf{u}_n^0)^\tau \in \mathcal{D}(L)$, $\rho^0 := (\rho_1^0; \dots; \rho_n^0)^\tau \in \mathcal{D}(B^*)$ *(см.* (8), (12) *и лемму 3), а поля* $\mathbf{f}_j$ $(j = 1, \dots, n)$ *имеют следующий вид:*

$$\mathbf{f}_j(t) = \mathbf{g}_j(t) + \sum_{k=0}^{m} e^{-i\sigma_k t} \mathbf{f}_{j,k}(t), \quad \sigma_0 = 0, \quad 0 \neq \sigma_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Здесь $\mathbf{f}_{j,k} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega))$, $(k = 1, \dots, m)$, *а поля* $\mathbf{g}_j$ *локально гёльдеровы. Пусть* $\|\mathbf{g}_j(t)\| = o(1)$, $\|\mathbf{f}'_{j,k}(t)\| = o(1)$ $(j = 1, \dots, n,\ k = 0, 1, \dots, m)$ *при* $t \longrightarrow +\infty$. *Тогда при* $t \longrightarrow +\infty$ *будет выполнено следующее соотношение:*

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\left\| \mathbf{u}_j(t) - \sum_{k=0}^{m} e^{-i\sigma_k t} \mathbf{u}_{j,k}(t) \right\|^2 + \left\| \rho_j(t) - \sum_{k=0}^{m} e^{-i\sigma_k t} \rho_{j,k}(t) \right\|^2 \right) = o(1), \tag{62}$$

где поля $\mathbf{u}_{j,k}(t)$ *и функции* $\rho_{j,k}(t)$ $(j = 1, \dots, n)$ *при каждом* $k = 0, 1, \dots, m$ *являются решением следующей краевой задачи с параметром* t:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho_{j0}} \sum_{l=1}^{n} L_{jl} \mathbf{u}_{l,k} + \nabla \left(\frac{c_j^{1/2} \rho_{j,k}}{\rho_{j0}^{1/2}} \right) - \frac{1}{\rho_{j0}} \sum_{l=1}^{n} a_{jl} (\mathbf{u}_{l,k} - \mathbf{u}_{j,k}) - i\sigma_k \mathbf{u}_{j,k} = \mathbf{f}_{j,k}(t), \\ &\frac{c_j^{1/2}}{\rho_{j0}^{1/2}} \operatorname{div}(\rho_{j0} \mathbf{u}_{j,k}) - i\sigma_k \rho_{j,k} = 0, \quad x \in \Omega, \quad j = 1, \dots, n, \\ &\mathbf{u}_{j,k} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbf{T}_j \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{63}$$

Пусть $\mathbf{g}_j(t) \equiv \mathbf{0}$, $\mathbf{f}_{j,k}(t) \equiv \mathbf{f}_{j,k}$ $(j = 1, \dots, n,\ k = 0, 1, \dots, m)$. *Тогда существует такая константа* $N > 0$, *зависящая от начальных данных и норм элементов* $\mathbf{f}_{j,k}$, *что при всех* $t \in \mathbb{R}_+$ *будет выполнено следующее неравенство:*

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\left\| \mathbf{u}_j(t) - \sum_{k=0}^{m} e^{-i\sigma_k t} \mathbf{u}_{j,k} \right\|^2 + \left\| \rho_j(t) - \sum_{k=0}^{m} e^{-i\sigma_k t} \rho_{j,k} \right\|^2 \right) \leqslant N e^{-2\omega t}, \tag{64}$$

где $\omega > 0$ *то же, что и в лемме 16, а поля* $\mathbf{u}_{j,k}$ *и функции* $\rho_{j,k}$ $(j = 1, \dots, n)$ *при каждом* $k = 0, 1, \dots, m$ *являются решением задачи* (63) *при* $\mathbf{f}_{j,k}(t) \equiv \mathbf{f}_{j,k}$.

Доказательство. Из условий леммы и леммы 17 следует, что начально-краевая задача (7), (5), (8) имеет единственное решение в смысле определения 2. Тогда функция $\xi := (\mathbf{u}; \rho)^\tau$, где $\mathbf{u} := (\mathbf{u}_1; \dots; \mathbf{u}_n)^\tau$, $\rho := (\rho_1; \dots; \rho_n)^\tau$, — решение задачи Коши (9) со специальной правой частью:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\xi + \mathcal{G}(t) + \sum_{k=0}^{m} e^{-i\sigma_k t} \mathcal{F}_k(t), \quad \xi(0) = \xi^0, \tag{65}$$

где

$$\begin{gathered}\xi^0 :=(\mathbf{u}^0;\rho^0)^\tau, \quad \mathcal{G}(t) := \big(\mathbf{g}(t);0\big)^\tau, \quad \mathbf{g}(t) := \big(\mathbf{g}_1(t);\ldots;\mathbf{g}_n(t)\big)^\tau, \\ \mathcal{F}_k(t) :=\big(\mathbf{f}_k(t);0\big)^\tau, \quad \mathbf{f}_k(t) := \big(\mathbf{f}_{1,k}(t);\ldots;\mathbf{f}_{n,k}(t)\big)^\tau, \quad k=0,1,\ldots,m.\end{gathered} \tag{66}$$

Будем искать решение задачи (65) в виде

$$\xi(t) = \sum_{k=0}^m e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) + \zeta(t), \quad \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) := (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{-1}. \tag{67}$$

Тогда функция $\zeta(t)$ должна быть решением задачи Коши

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\mathcal{A}\zeta + \mathcal{G}(t) - \sum_{k=0}^m e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k'(t), \quad \zeta(0) = \xi^0 - \sum_{k=0}^m \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0). \tag{68}$$

Обозначим как и в лемме 16 через $\mathcal{U}(t)$ голоморфную полугруппу, генерируемую оператором $-\mathcal{A}$. Тогда из (68) и (67) найдём, что

$$\begin{aligned}\xi(t) = \sum_{k=0}^m e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) + \mathcal{U}(t)\bigg(\xi^0 - \sum_{k=0}^m \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0)\bigg) + \\ + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\bigg(\mathcal{G}(s) - \sum_{k=0}^m e^{-i\sigma_k s}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k'(s)\bigg)\,ds.\end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 16 следует, что

$$\begin{aligned}\bigg\|\xi(t) - \sum_{k=0}^m e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)\bigg\|_{\mathcal{H}} &= \bigg\|\mathcal{U}(t)\bigg(\xi^0 - \sum_{k=0}^m \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0)\bigg) + \\ &+ \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\bigg(\mathcal{G}(s) - \sum_{k=0}^m e^{-i\sigma_k s}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k'(s)\bigg)\,ds\bigg\|_{\mathcal{H}} \\ &\leqslant Me^{-\omega t}\bigg(\|\xi^0\|_{\mathcal{H}} + \sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\sum_{k=0}^m\|\mathcal{F}_k(0)\|_{\mathcal{H}}\bigg) + \\ &+ M\int_0^t e^{-\omega(t-s)}\bigg(\|\mathcal{G}(s)\|_{\mathcal{H}} + \sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\sum_{k=0}^m\|\mathcal{F}_k'(s)\|_{\mathcal{H}}\bigg)\,ds \\ &\leqslant M_0e^{-\omega t}\bigg(\|\xi^0\|_{\mathcal{H}} + \sum_{k=0}^m\|\mathcal{F}_k(0)\|_{\mathcal{H}}\bigg) + M_0\int_0^t e^{-\omega(t-s)}\bigg(\|\mathcal{G}(s)\|_{\mathcal{H}} + \sum_{k=0}^m\|\mathcal{F}_k'(s)\|_{\mathcal{H}}\bigg)\,ds,\end{aligned}$$

где $M_0 := M\max\big\{1, \sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(E)}\big\}$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\bigg\|\xi(t) - \sum_{k=0}^m e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)\bigg\|_{\mathcal{H}} \leqslant M_0e^{-\omega t}\bigg(\|\xi^0\|_{\mathcal{H}} + \sum_{k=0}^m\|\mathcal{F}_k(0)\|_{\mathcal{H}}\bigg) + \\ + M_0\int_0^t e^{-\omega(t-s)}\bigg(\|\mathcal{G}(s)\|_{\mathcal{H}} + \sum_{k=0}^m\|\mathcal{F}_k'(s)\|_{\mathcal{H}}\bigg)\,ds.\end{aligned} \tag{69}$$

Пусть $\|\mathbf{g}_i(t)\| = o(1)$, $\|\mathbf{f}_{i,k}'(t)\| = o(1)$ $(i=1,\ldots,n, k=0,\ldots,m)$ при $t\longrightarrow+\infty$. Тогда из (66) получим, что $\|\mathcal{G}(t)\|_{\mathcal{H}} = o(1)$, $\|\mathcal{F}_k'(t)\|_{\mathcal{H}} = o(1)$ при $t\longrightarrow+\infty$. Для того чтобы показать, что правая часть в (69) есть $o(1)$ при $t \longrightarrow +\infty$, достаточно доказать, что интегральное слагаемое в (69) стремится к нулю при $t \longrightarrow +\infty$. Введём функцию $h(t) := \|\mathcal{G}(t)\|_{\mathcal{H}} + \sum_{k=0}^{m} \|\mathcal{F}_k'(t)\|_{\mathcal{H}}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем последовательно числа $t_{\varepsilon,1}$ и $t_{\varepsilon,2}$ следующим образом:

$$t_{\varepsilon,1} > 0 : \sup_{t \geqslant t_{\varepsilon,1}} h(t) < \frac{\varepsilon\omega}{2}, \quad t_{\varepsilon,2} := \frac{1}{\omega} \ln\Big(\frac{2}{\varepsilon\omega} \big(e^{\omega t_{\varepsilon,1}} - 1\big) \sup_{t \geqslant 0} h(t) \Big).$$

Теперь для любого $t \geqslant t(\varepsilon) := \max\{t_{\varepsilon,1}, t_{\varepsilon,2}\}$ найдём, что

$$\int_0^t e^{-\omega(t-s)} h(s)\, ds = \int_0^{t_{\varepsilon,1}} e^{-\omega(t-s)} h(s)\, ds + \int_{t_{\varepsilon,1}}^t e^{-\omega(t-s)} h(s)\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \frac{e^{-\omega t}}{\omega} \big(e^{\omega t_{\varepsilon,1}} - 1\big) \sup_{t \geqslant 0} h(t) + \frac{1}{\omega} \sup_{t \geqslant t_{\varepsilon,1}} h(t) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отсюда, из (69) и определения оператора $\mathcal{A}$ следует (62).

Если $\mathbf{g}_j(t) \equiv \mathbf{0}$, $\mathbf{f}_{j,k}(t) \equiv \mathbf{f}_{j,k}$ $(j = 1, \ldots, n,\ k = 0, \ldots, m)$, то $\mathcal{G}(t) \equiv 0$, $\mathcal{F}_k'(t) \equiv 0$ $(k = 0, \ldots, m)$ и из (69) следует (64). $\square$

Утверждения теоремы 2 следуют из лемм 17, 18.

References

[1] T.Ya. Azizov, I.S. Iohvidov *Fundamentals of the theory of linear operators in spaces with an indefinite metric*, Nauka, Moscow, 1986.

[2] T.Ya. Azizov, N.D. Kopachevsky, L.D. Orlova *Evolutionary and spectral problems generated by the problem of small motions of a viscoelastic fluid*, Trudy Sanct-Peterburgskogo matem. obshestva, **6** (1988), 5–33.

[3] F.V. Atkinson, H. Langer, R. Mennicken, A.A. Shkalikov *The essential spectrum of some matrix operators*, Math. Nachr., **167** (1994), 5–20.

[4] Yu.M. Berezansky *Expansion in eigenfunctions of self-adjoint operators*, Naukova dumka, Kiev, 1965.

[5] M.Sh. Birman, M.Z. Solomjak *Asymptotic behavior of the spectrum of differential equations*, Itogi nauki i tehn. Ser. Mat. anal., **14** (1977), 5–58.

[6] V.N. Dorovsky, Yu.V. Perepechko *The theory of partial melting*, Geologiya i geofizika, **9** (1989), 56–64.

[7] K.-J. Engel, R. Nagel *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Eqations (Graduate Texts in Math., Vol. 194*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[8] K.V. Forduk *Oscillations of a System of Solids Partially Filled with Viscous Liquids under the Action of an Elastic-Damping Device*, Izvestia Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seria Matematika, **42** (2022), 103–120.

[9] M. Faierman, R.J. Fries, R. Mennicken, M. Möller *On the essential spectrum of the linearized Navier-Stokes operator*, Integr. equ. oper. theory, **38**:1 (2000), 9–27.

[10] J. Frehse, S. Goj, J. Málek *A Stokes-like system for mixtures*, In M.Sh. Birman, S. Hildebrandt, V.A. Solonnikov, and N.N. Uraltseva, editors, Nonlinear Problems in Mathematical Physics and Related Topics II, International Mathematical Series, pages 119–136.— Kluwer, Dordrecht, Norwell, New York, London, 2002.

[11] J. Frehse, S. Goj, J. Málek *On power and non-power asymptotic behavior of positive solutions to Emden–Fowler type higher-order equations*, SIAM J. Math. Anal., **36**:4 (2005), 1259–1281.

[12] J. Frehse, S. Goj, J. Málek *A uniqueness result for a model for mixtures in the absence of external forces and interaction momentum*, Appl. Math., **50** (2005), 527–541.

[13] I. Gohberg, S. Goldberg, M.A. Kaashoek *Classes of Linear Operators, Vol. 1*, Basel-Boston-Berlin, 1990.

[14] J.A. Goldsein *Semigroups of Linear Operators and Applications*, New York-Oxford, 1985.

[15] G. Grubb, G. Geymonat *The essential spectrum of elliptic systems of mixed order*, Math. Ann., **227** (1977), 247–276.

[16] H.H. Imomnazarov, Sh.H. Imomnazarov, M.M. Mamatkulov, E.G. Chernyh *Fundamental solution for the stationary equation of two-velocity hydrodynamics with one pressure*, Sib. jurn. industr. matem., **17**:4 (2014), 60–66.

[17] T. Kato *Perturbation theory of linear operators*, Mir, Moscow, 1972.

[18] A.N. Kozhevnikov *Functional methods of mathematical physics. Tutorial*, Izd-vo MAI, Moscow, 1991.

[19] A. Kozhevnikov, T. Skubachevskaya *Some applications of pseudo-differential operators to elasticity*, Hokkaido Math. J., **26**:2 (1997), 297–322.

[20] S.G. Krein *Linear differential equations in a Banach space*, Nauka, Moscow, 1967.

[21] P. Lancaster *Matrix theory*, Nauka, Moscow, 1973.

[22] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin *Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-D existence*, Methods Appl. Anal., **20**:2 (2013), 179–195.

[23] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin *Solvability of the initial-boundary value problem for the equations of polytropic motion of mixtures of viscous compressible fluids*, Sibirskie elektronnye matem. izvestia, **13** (2016), 541–583.

[24] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin *Solvability of nonstationary equations of multicomponent viscous compressible fluids*, Izv. RAN. Ser. matem., **82**:1 (2018), 151–197.

[25] A.S. Marcus, V.I. Matsaev *Comparison theorem for spectra and spectral asymptotics for a pencil M.V. Keldysh*, Matem. sbornik, **123(165)**:3 (1984), 391–406.

[26] R. Mennicken, A.A. Shkalikov *Spectral decomposition of symmetric operator matrices*, Math. Nachr., **179** (1996), 259–273.

[27] R.I. Nigmatulin *Dynamics of multiphase media, Vol. 1*, Nauka, Moscow, 1987.

[28] O.A. Oleynik, A.G. Iosifian, A.S. Shamaev *Mathematical problems of the theory of strongly inhomogeneous elastic media*, Izd-vo MGU, Moscow, 1990.

[29] P.K. Pal, V.N. Maslennikova *Spectral Properties of Operators in the Problem of Oscillation of a Compressible Fluid in Rotating Vessels*, Dokl. AN SSSR, **281**:3 (1985), 529–534.

[30] K.L. Rajagopal, L. Tao *Mechanics of mixtures, Ser. Adv. Math. Appl. Sci., 35*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995.

[31] K. Rektoris *Variational Methods in Mathematical Physics and Engineering*, Mir, Moscow, 1985.

[32] V.A. Solonnikov *On general boundary value problems for systems elliptic in the sense of A. Daglis–L. Nirenberg. II*, Tr. MIAN SSSR, **92** (1966), 233–297.

[33] L.R. Volevich *Solvability of boundary value problems for general elliptic systems*, Matem. sbornik, **68(110)**:3 (1965), 373–416.

[34] D.A. Zakora *Asymptotics of solutions to a system of coupled integro-differential second-order incomplete operator equations*, Sibirskie elektronnye matem. izvestia, **15** (2018), 971–986.

[35] D.A. Zakora, N.D. Kopachevsky *On the problem of small oscillations of a system of two viscoelastic fluids filling a stationary vessel (model problem)*, Sovremennaya matematika. Fundamentalnye napravlenia, **66**:2 (2020), 182–208.

[36] D.A. Zakora *Asymptotic behavior of solutions of a complete second-order integro-differential equation*, Sovremennaya matematika. Fundamentalnye napravlenia, **68**:3 (2022), 451–466.

Dmitry Alexandrovich Zakora
V.I. Vernadsky Crimean Federal University,
4, pr. Vernadskogo,
Simferopol, 295007, Russia
E-mail address: dmitry.zkr@gmail.com