

**Отзыв на статью “Слабо периодические меры Гиббса для
НС-Модели со счетным числом состояний:
Слабо периодические меры Гиббса”**

Статья Р.М. Хакимова и М.Т. Махаммадалиева посвящена исследованию мер Гиббса на дереве Кэли со счетным множеством состояний. Известно (см., например, [2, Theorem 12.12]), что каждая такая мера представляется в терминах некоторого граничного закона, который задается системой из счетного числа уравнений со счетным числом переменных. Верно также и обратное: каждому граничному закону соответствует какая-то мера Гиббса. Однако, далеко не для каждой системы возможно найти явное решение.

В связи с этим, авторы рассматривают следующий частный случай данной общей задачи. Во-первых, множество допустимых конфигураций модели ограничивается теми, в которых среди любых соседних вершин обязательно есть хотя бы одна, находящаяся в начальном (нулевом) состоянии. Более того, определенную специфику модели придает тот факт, что рассматриваются так называемые слабо периодические меры Гиббса, которые в определенном смысле периодичны относительно нормальной подгруппы группы, для которой рассматриваемое дерево Кэли является графом Кэли. При этом, рассматриваются только подгруппы индекса 2 и 4, что накладывает дополнительные существенные ограничения на и так уже весьма специфическую модель.

Для вышеописанной модели, система уравнений, описывающая граничный закон (и, следовательно, саму меру Гиббса), существенно упрощается и становится конечной. Основным вкладом автором является исследование данной системы (в указанных выше случаях индекса 2 и 4). При этом, несмотря на довольно громоздкие выкладки, использованные методы не выходят за рамки стандартного университетского курса первых двух лет обучения.

Таким образом, хотя тематика статьи актуальна и интересна, представленные результаты не вносят значительного новшества в теорию гиббсовских мер, а отсутствие инновационных методов или значимых теоретических выводов снижает ценность исследования.

Основываясь на анализе представленных результатов, я не рекомендую статью к публикации в текущем виде. Рекомендую авторам усилить теоретическую значимость результатов для повышения вклада в развитие данной области.

Ниже приводится список второстепенных замечаний, которые могут оказаться полезными при подготовке новой версии работы. Номеру каждого замечания соответствует пометка в приложенной zdf-версии статьи.

- (1) условия существования и не существования \rightarrow условия существования и условия отсутствия
- (2) ближайшими соседями вершины \rightarrow ближайшими соседями
- (3) кратчайшей пути, соединяющей \rightarrow кратчайшего пути, соединяющего
- (4) $n \neq 0$, иначе в $S(x)$ $k + 1$ элемент
- (5) для любых соседних $\langle x, y \rangle \rightarrow$ для любых соседних x, y , так как $\langle x, y \rangle$ - это ребро
- (6) как две соседние вершины могут одновременно принадлежать W_n ?
- (7) см. (6)

- (8) Используется понятие НС-модели, однако явным образом она нигде не определена. Можно догадаться, что этим термином обозначаются модели, заданные гамильтонианом (1), однако явно это нигде не указано.
- (9) Стоит сделать замечание о сходимости бесконечной суммы.
- (10) см. (6)
- (11) Известно \rightarrow Легко видеть
- (12) как группа $G_k \rightarrow$ как граф Кэли группы G_k
- (13) ..., образующие которой мы обозначим...
- (14) $x \neq x_0$
- (15) $\{y \in G_k : \langle x, y \rangle\} \rightarrow \{y \in G_k : \langle x, y \rangle \in L\}$
- (16) которого \rightarrow который
- (17) мощность A не совсем удачно обозначать i , так как эта же буква использовалась при суммировании по элементам из A
- (18) расходимость \rightarrow расходимости
- (19) то очевидно \rightarrow очевидно
- (20) один \rightarrow хотя бы один
- (21) Для удобства понимания, следует в самом начале доказательства указать, что используется [1, Теорема 1], сформулировав ее утверждение.
- (22) получим \rightarrow установим
- (23) число буквы \rightarrow число повторений буквы
- (24) см. (17)
- (25) один \rightarrow хотя бы один
- (26) доказывается \rightarrow устанавливается
- (27) не совпадает \rightarrow не является

В работе иногда нумерованные утверждения начинаются с прописной буквы, иногда - со строчной. В русской литературе принят второй вариант, но в любом случае, надо унифицировать. Также стоит обратить внимание на множество пунктуационных ошибок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R.M. Khakimov, M.T. Makhmamadaliyev, U.A. Rozikov, *Gibbs measures for HC-Model with a countable set of spin values on a Cayley tree*, Preprint on arXiv:2205.02025v1 [math-ph], 2022.
- [2] Hans-Otto Georgii, *Gibbs Measures and Phase Transitions*, Berlin, New York: De Gruyter, 2011. <https://doi.org/10.1515/9783110250329>.