S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 517.98
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 82B26,60K35

СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ HC-МОДЕЛИ СО СЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

Р.М. ХАКИМОВ, М.Т.МАХАММАДАЛИЕВ

Abstract. In this paper, we study weakly periodic Gibbs measures for the HC-model with a countable set $\mathbb{Z}$ of spin values and with a countable set of parameters $\lambda_i > 0$, $i \in \mathbb{Z}$ on a Cayley tree of order $k \geq 2$. For the considered model for $\sum_i \lambda_i = \lambda < +\infty$ a complete description of weakly periodic Gibbs measures is obtained in the case of any normal divisor of index two and for $\lambda = +\infty$ it is shown that there is no weakly periodic Gibbs measure. Moreover, in the case of a normal index divisor of four uniqueness conditions for weakly periodic Gibbs measures are found. As well as under certain conditions an exact critical value is found under which there exist weakly periodic (non-periodic) Gibbs measures.

Keywords: Cayley tree, admissible configuration, HC model, Gibbs measure, periodic Gibbs measures, weakly periodic Gibbs measures.

1. Введение

Описание всех предельных мер Гиббса для данного гамильтониана является одним из основных задач теории гиббсовских мер. Известно, что каждой предельной мере Гиббса сопоставляется одна фаза физической системы. Поэтому в теории мер Гиббса одной из важных задач является существование фазового перехода, т.е. когда физическая система меняет свое состояние при изменении температуры. Это происходит, когда количество мер при изменении температуры меняется. При этом температура, при которой меняется состояние физической системы, обычно называется критической (см. [1]-[4]).

Khakimov, R.M., Makhammadaliev, M.T., Weakly periodic Gibbs measures.

Работа поддержана фундаментальным проектом Министерства инновационного развития республики Узбекистан (грант F-FA-2021- 425).

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

Для многих классических моделей с конечным множеством значений спина из физики (например, модель Изинга, модель Поттса, HC-модель) хорошо развита теория мер Гиббса. Надо отметить, что несмотря на наличие многочисленных работ, посвященных изучению предельных мер Гиббса, ни для одной модели не было получено полное описание всех предельных мер Гиббса.

А в случае счетного множества значений спина существование мер Гиббса не гарантировано. Но имеются несколько работ, посвященных изучению таких моделей (см. например, работы [5]-[11]).

А.Е.Мазелью и Ю.М.Суховым была введена и изучена HC-модель (жесткий диск, жесткая сердцевина) на d-мерной решетке $\mathbb{Z}^d$ (см. [12]). Эта модель вызывает интерес с точки зрения статистической механики, комбинаторики и теории нейронных сетей [1], [13], [14]. Достаточно много работ посвящены изучению предельных мер Гиббса для HC моделей с конечным числом состояний на дереве Кэли (см. например, литературу работ [4], [15], [16]).

HC-модель со счетным числом значений спина впервые изучена в работе [17]. Для этой модели на дереве Кэли произвольного порядка найдены условия существования и не существования трансляционно-инвариантной меры Гиббса, а также доказана единственность такой меры при условии существования. Кроме того, для рассматриваемой модели исследованы периодические меры Гиббса с периодом два. Найдены условия существования и неединственности периодических(не трансляционно-инвариантных) мер Гиббса с периодом два.

В данной работе изучаются слабо периодические меры Гиббса для HC-модели со счетным числом значений спина на дереве Кэли в случаях нормальных делителей индекса два и четыре. В случае произвольного нормального делителя индекса два доказано, что если ряд $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}\lambda_j$, полученный из последовательности параметров активности $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{Z}_0=\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ сходится, то слабо периодическая мера Гиббса является трансляционно-инвариантной и она единственна, если же ряд $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}\lambda_j$ расходится, то не существует слабо периодической меры Гиббса. А в случае нормального делителя индекса четыре при некоторых условиях показана трансляционно-инвариантность (значит, единственность) слабо периодических мер Гиббса на дереве Кэли произвольного порядка. А также на дереве Кэли порядка два и три при некоторых условиях найдены точные критические значения λ_{cr}, которая является суммой ряда, полученной из последовательности параметров $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{Z}_0}$ такая, что при $0<\lambda\leq\lambda_{cr}$ существует ровно одна слабо периодическая мера Гиббса μ_0, которая является трансляционно-инвариантной, а при $\lambda>\lambda_{cr}$ существуют ровно три слабо периодические меры Гиббса, одна из которых совпадает с μ_0, а две остальные являются слабо периодическими(не периодическими) мерами Гиббса.

2. Предварительные сведения

Пусть $\tau^k=(V,L,i)-$ есть дерево Кэли порядка $k\geq 1$, где V есть множество вершин τ^k, $L-$множество его ребер и $i-$функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l\in L$ его концевые точки $x,y\in V$. Если $i(l)=\{x,y\}$, то x и y называются *ближайшими соседями вершины* и обозначается $l=\langle x,y\rangle$. Пусть $d(x,y)$ есть расстояние между вершинами $x,y\in V$, т.е. количество ребер кратчайшей пути, соединяющей x и y.

Для фиксированного $x^0 \in V$ обозначим

$$W_n = \{x \in V | \ d(x, x^0) = n\}, \ V_n = \cup_{j=0}^n W_j.$$

Будем писать $x \prec y$, если путь от x^0 до y проходит через x. Вершину y назовем прямым потомком вершины x, если $y \succ x$ и x, y являются ближайшими соседями. Заметим, что на дереве τ^k всякая вершина $x \neq x^0$ имеет k прямых потомков, а вершина x^0 имеет $k+1$ потомков. Для $x \in W_n$ множество прямых потомков вершины x обозначим через $S(x)$:

$$S(x) = \{y_i \in W_{n+1} | d(x, y_i) = 1, i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Пусть $\Phi = \mathbb{Z}$ и $\sigma \in \Phi^V$-конфигурация, то есть $\sigma = \{\sigma(x) \in \mathbb{Z} : x \in V\}$, где $\sigma(x) \neq 0$ означает, что вершина x на дереве Кэли занятая, а $\sigma(x) = 0$ означает, что она свободная. Конфигурация σ называется допустимой, если $\sigma(x)\sigma(y) = 0$ для любых соседних $\langle x, y \rangle$ из $V(V_n$ или W_n, соответственно) и обозначим множество таких конфигураций через Ω (Ω_{V_n} и Ω_{W_n}). Ясно, что $\Omega \subset \Phi^V$.

Рассмотрим множество $\mathbb{Z}$ как множество вершин некоторого бесконечного графа G. С помощью графа G определим G-допустимую конфигурацию следующим образом. Конфигурация σ называется *G-допустимой конфигурацией* на дереве Кэли (в V_n или W_n), если $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$-ребро графа G для любой ближайшей пары соседей x, y из V (из V_n). Обозначим множество G-допустимых конфигураций через Ω^G ($\Omega^G_{V_n}$).

Множество активности [16] для графа G есть ограниченная функция $\lambda : G \mapsto \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+ -$ множество положительных действительных чисел). Значение λ_i функции λ в вершине $i \in \mathbb{Z}$ называется ее “активностью”.

Для данных G и λ определим гамильтониан $G-$НС-модели как

$$H_G^\lambda(\sigma) = \begin{cases} J \sum\limits_{x \in V} \ln \lambda_{\sigma(x)}, & \text{если } \sigma \in \Omega^G, \\ +\infty, & \text{если } \sigma \notin \Omega^G, \end{cases} \tag{1}$$

где $J \in \mathbb{R}$.

Пусть $L(G)-$множество ребер графа G, обозначим через $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ матрицу смежности G, т.е.

$$a_{ij} = a_{ij}^G = \begin{cases} 1, & \text{если } \ \{i, j\} \in L(G), \\ 0, & \text{если } \ \{i, j\} \notin L(G). \end{cases}$$

Пусть $\mathbf{B}$ есть σ-алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами Ω^G. Понятие меры Гиббса и градиентных мер Гиббса для НС-модели определяется стандартным образом (см. [1, Глава 12], [5], [11]).

Пусть $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Известно, что (см. [17] или [1, Глава 12]) каждой мере Гиббса на $(\Omega^G, \mathbf{B})$ соответствует совокупность векторов $z_x = \{z_{i,x}, i \in \mathbb{Z}_0\} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}_0}$ такая, что $\forall x \in V$ имеют место следующие равенства:

$$z'_{i,x} = \lambda'_i \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{i0} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{im} z'_{m,y}}{a_{00} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{0m} z'_{m,y}}, \quad i, m \in \mathbb{Z}_0, \tag{2}$$

где $z'_{i,x} = \lambda'_i \frac{z_{i,x}}{z_{0,x}}$, $\lambda'_i = \frac{\lambda_i \nu(i)}{\lambda_0 \nu(0)}$, $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ и $\nu = \{\nu(i) > 0, i \in \mathbb{Z}\}-$фиксированная вероятностная мера.

Таким образом, чтобы получить полное описание всех мер Гиббса для данного гамильтониана (1) надо найти все решения системы уравнений (2). Но эта задача является очень сложной.

Поэтому рассмотрим конкретный граф G с $a_{i0} = 1$ для всех $i \in \mathbb{Z}$ и $a_{im} = 0$ для всех $i, m \in \mathbb{Z}_0$ (см. Рис.1).

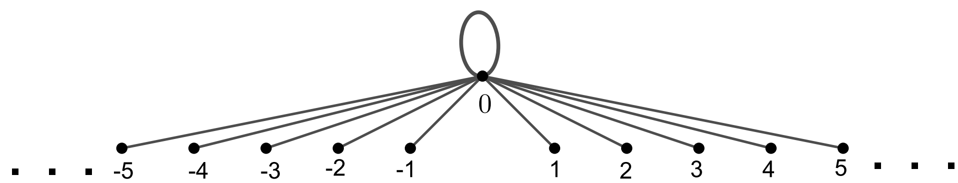

Рис. 1. Счетный граф G с множеством вершин $\mathbb{Z}$, все вершины связаны только с 0.

Соответствующая допустимая конфигурация удовлетворяет $\sigma(x)\sigma(y) = 0$ для любых соседних $\langle x, y\rangle$ из $V(V_n$ или W_n, соответственно), т.е. если вершина x имеет спиновое значение $\sigma(x) = 0$, то на соседние вершины можем ставить любое значение из $\mathbb{Z}$, если же на вершине x находится любое значение из $\mathbb{Z}_0$, то на соседние вершины ставим только нули. Полагая $z_{0,x} = 1$, $\lambda'_i = \lambda_i$, $z_{i,x} = z'_{i,x}$, $i \in \mathbb{Z}_0$, из (2) получим

$$z_{i,x} = \lambda_i \prod_{y \in S(x)} \frac{1}{1 + \sum_{j \in \mathbb{Z}_0} z_{j,y}}, \quad i \in \mathbb{Z}_0. \tag{3}$$

Известно, что дерево Кэли представляется как группа G_k, являющаяся свободным произведением $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, ..., a_{k+1}$.

Пусть $\widehat{G}_k-$нормальный делитель конечного индекса $r \geq 1$. Рассмотрим факторгруппу $G_k/\widehat{G}_k = \{H_1, ..., H_r\}$.

Определение 1. *Совокупность векторов $z = \{z_x, x \in G_k\}$ называется $\widehat{G}_k$-периодической, если $z_{yx} = z_x$ для любого $x \in G_k$ и $y \in \widehat{G}_k$.*

G_k-периодические совокупности векторов называются трансляционно-инвариантными.

Для любого $x \in G_k$ множество $\{y \in G_k : \langle x, y\rangle\} \setminus S(x)$ имеет единственный элемент, которого обозначим через $x_\downarrow$ (см.[18]).

Определение 2. *Совокупность векторов $z = \{z_x, x \in G_k\}$ называется $\widehat{G}_k$-слабо периодической, если $z_x = z_{ij}$ при $x \in H_i, x_\downarrow \in H_j$ для любого $x \in G_k$.*

Определение 3. *Мера μ называется $\widehat{G}_k$-(слабо) периодической, если она соответствует $\widehat{G}_k$-(слабо) периодической совокупности векторов z.*

3. Случай нормального делителя индекса два

Пусть $\emptyset \neq A \subset N_k = \{1, 2, ..., k+1\}$. Известно, что любая подгруппа индекса два группы G_k имеет вид

$$H_A = \{x \in G_k : \sum_{i\in A} w_x(a_i) - \text{четное число}\},$$

где $w_x(a_i)-$число букв a_i в слове $x \in G_k$ (см. [4]).

Заметим, что H_A-слабо периодическая совокупность векторов z имеет вид

$$z_x = \begin{cases} y, & x \in H_A, \;\; x_\downarrow \in H_A, \\ u, & x \in H_A, \;\; x_\downarrow \in G_k \backslash H_A, \\ v, & x \in G_k \backslash H_A, \;\; x_\downarrow \in H_A, \\ t, & x \in G_k \backslash H_A, \;\; x_\downarrow \in G_k \backslash H_A, \end{cases}$$

где

$$y = (\cdots, y_{-2}, y_{-1}, 1, y_1, y_2, \cdots), \;\; u = (\cdots, u_{-2}, u_{-1}, 1, u_1, u_2, \cdots),$$
$$v = (\cdots, v_{-2}, v_{-1}, 1, v_1, v_2, \cdots), \;\;\; t = (\cdots, t_{-2}, t_{-1}, 1, t_1, t_2 \cdots).$$

Тогда в силу (3) $y_s,\ u_s,\ v_s,\ t_s\big(s \in \mathbb{Z}_0\big)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} y_s = \lambda_s \cdot \frac{1}{\left(1+\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} v_j\right)^i} \cdot \frac{1}{\left(1+\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} y_j\right)^{k-i}}, \\ u_s = \lambda_s \cdot \frac{1}{\left(1+\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} v_j\right)^{i-1}} \cdot \frac{1}{\left(1+\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} y_j\right)^{k-i+1}}, \\ v_s = \lambda_s \cdot \frac{1}{\left(1+\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} u_j\right)^{i-1}} \cdot \frac{1}{\left(1+\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} t_j\right)^{k-i+1}}, \\ t_s = \lambda_s \cdot \frac{1}{\left(1+\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} u_j\right)^i} \cdot \frac{1}{\left(1+\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} t_j\right)^{k-i}}, \end{cases} \tag{4}$$

где $|A| = i-$мощность множества A.

Лемма 1. *Пусть $k \geq 2$. Если для некоторой последовательности параметров $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{Z}_0}$ существует положительное решение (y_j, u_j, v_j, t_j), $j \in \mathbb{Z}_0$, системы уравнений (4), то ряды $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} y_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} u_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} v_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} t_j$ и $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} \lambda_j$ сходятся.*

Доказательство. Пусть $k \geq 2$ и существует положительное решение (y_j, u_j, v_j, t_j), $j \in \mathbb{Z}_0$, системы уравнений (4). Сначала покажем, что ряды $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} y_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} u_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} v_j$ и $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} t_j$ сходятся. Предположим обратное, т.е. пусть один из рядов, например, ряд $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} y_j$ расходится, т.е. $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} y_j = +\infty$. Тогда из первого уравнения (4) получим, что $y_j = 0$, а это противоречит расходимость ряда $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} y_j$. А в случае, когда все ряды $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} y_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} u_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} v_j$ и $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} t_j$ расходятся, то очевидно, что система уравнений (4) не имеет решений. Значит, если существует решение (4), то ряды $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} y_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} u_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} v_j$ и $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} t_j$ сходятся.

Теперь докажем сходимость ряда $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} \lambda_j$. Для этого, предположим, что $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} y_j = Y$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} u_j = U$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} v_j = V$ и $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} t_j = T$. Тогда из первого уравнения (4) получим, что $\sum_{i\in\mathbb{Z}_0} \lambda_i = Y(1+Y)^{k-i}(1+V)^i$, т.е. ряд $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} \lambda_j$ сходится. $\square$

Из леммы 1 следует следующее.

Следствие 1. *Если один из рядов $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} y_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} u_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} v_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} t_j$ и $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} \lambda_j$ расходится, то система уравнений (4) не имеет положительного решения.*

Пусть ряды $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} y_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} u_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} v_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} t_j$ сходятся и $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} y_j = Y$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} u_j = U$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} v_j = V$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} t_j = T$. Тогда из системы уравнений (4) имеем

$$\begin{cases} y_s = \lambda_s \cdot \frac{1}{\left(1+V\right)^{i}} \cdot \frac{1}{\left(1+Y\right)^{k-i}}, \\ u_s = \lambda_s \cdot \frac{1}{\left(1+V\right)^{i-1}} \cdot \frac{1}{\left(1+Y\right)^{k-i+1}}, \\ v_s = \lambda_s \cdot \frac{1}{\left(1+U\right)^{i-1}} \cdot \frac{1}{\left(1+T\right)^{k-i+1}}, \\ t_s = \lambda_s \cdot \frac{1}{\left(1+U\right)^{i}} \cdot \frac{1}{\left(1+T\right)^{k-i}}. \end{cases} \tag{5}$$

Суммируя обе части каждого уравнения в (5) по $s \in \mathbb{Z}_0$, можем получить

$$\begin{cases} Y = \lambda \cdot \frac{1}{\left(1+V\right)^{i}} \cdot \frac{1}{\left(1+Y\right)^{k-i}}, \\ U = \lambda \cdot \frac{1}{\left(1+V\right)^{i-1}} \cdot \frac{1}{\left(1+Y\right)^{k-i+1}}, \\ V = \lambda \cdot \frac{1}{\left(1+U\right)^{i-1}} \cdot \frac{1}{\left(1+T\right)^{k-i+1}}, \\ T = \lambda \cdot \frac{1}{\left(1+U\right)^{i}} \cdot \frac{1}{\left(1+T\right)^{k-i}}, \end{cases} \tag{6}$$

где $\lambda = \sum_{s\in\mathbb{Z}_0} \lambda_s$.

Следующее утверждение очевидно.

Предложение 1. *Для решений системы уравнений (6) верны следующие оценки:*

$$0 < \frac{\lambda}{(1+\lambda)^k} < Y < \lambda,\ 0 < \frac{\lambda}{(1+\lambda)^k} < U < \lambda,$$
$$0 < \frac{\lambda}{(1+\lambda)^k} < V < \lambda,\ 0 < \frac{\lambda}{(1+\lambda)^k} < T < \lambda.$$

Доказательство. Получается из (6). □

Далее, разделив в системе уравнений (6) первое уравнение на второе, третье на четвертое, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{Y}{U} = \frac{1+Y}{1+V} \\ \frac{V}{T} = \frac{1+U}{1+T}. \end{cases} \tag{7}$$

Используя (7), систему уравнений (6) можно переписать как

$$\begin{cases} Y = \left(\frac{Y}{U}\right)^{i} \cdot \frac{\lambda}{(1+Y)^k} \\ U = \left(\frac{Y}{U}\right)^{i-1} \cdot \frac{\lambda}{(1+Y)^k} \\ V = \left(\frac{T}{V}\right)^{i-1} \cdot \frac{\lambda}{(1+T)^k} \\ T = \left(\frac{T}{V}\right)^{i} \cdot \frac{\lambda}{(1+T)^k}. \end{cases} \tag{8}$$

Из первого уравнения системы (8) найдем U, из четвертого V и, подставив их в четвертое и первое уравнения системы уравнений (6), соответственно, получим

$$\begin{cases} Y = \frac{(1+T)^k}{\left(\left(1+T\right)^{k/i} + \lambda^{1/i}\cdot T^{1-1/i}\right)^{i}} \cdot \frac{\lambda}{\left(1+Y\right)^{k-i}}, \\ T = \frac{(1+Y)^k}{\left(\left(1+Y\right)^{k/i} + \lambda^{1/i}\cdot Y^{1-1/i}\right)^{i}} \cdot \frac{\lambda}{\left(1+T\right)^{k-i}} \end{cases} \tag{9}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *1) Если в системе уравнений (6) выполнены равенства $Y = T$ и $U = V$, тогда $Y = U = V = T$.*

2) $Y = T$ тогда и только тогда, когда $U = V$.

Доказательство. Легко получается из системы уравнений (7). □

Для удобства введем обозначения $Y = y$, $T = x$ и перепишем систему уравнений (9)

$$\begin{cases} y = \varphi(x) \cdot \psi(y), \\ x = \varphi(y) \cdot \psi(x), \end{cases} \tag{10}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{(1+x)^k}{\left((1+x)^{k/i} + \lambda^{1/i} \cdot x^{1-1/i}\right)^i}, \ \psi(x) = \frac{\lambda}{(1+x)^{k-i}}.$$

Следующая теорема дает полное описание слабо периодических мер Гиббса для рассматриваемой HC модели в случае нормального делителя индекса два.

Теорема 1. *Пусть $k \geq 2$. Тогда для HC модели со счетным числом состояний (соответствующей графу из рис. 1) в случае нормального делителя индекса два справедливы следующие утверждения:*

1. Если ряд $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} \lambda_j$, полученный из последовательности параметров $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{Z}_0}$, сходится и его сумма $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} \lambda_j = \lambda$, то для любых $i \leq k$ и при любом $\lambda > 0$, H_A-слабо периодическая мера Гиббса единственна. Более того, эта мера совпадает с единственной трансляционно-инвариантной мерой Гиббса.

2. Если ряд $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} \lambda_j$ расходится, то H_A-слабо периодическая мера Гиббса не существует.

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что система функциональных уравнений (6) имеет корни только вида $Y = U = V = T$. Для этого в (10) вычтем из первого уравнения второе и в правую часть полученного уравнения прибавим и вычтем $\varphi(x) \cdot \psi(x)$, затем используя теорему Лагранжа о среднем для функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на (y, x), получим:

$$y - x = \psi(y) \cdot \varphi^{'}(\xi) \cdot (x - y) + \varphi(y) \cdot \psi^{'}(\eta) \cdot (y - x),$$

где $\xi \in (y, x), \eta \in (y, x)$.

Отсюда

$$(y - x) \cdot [1 + \psi(y) \cdot \varphi^{'}(\xi) - \varphi(y) \cdot \psi^{'}(\eta)] = 0. \tag{11}$$

Из этого уравнения получим, что $y = x$ или

$$1 + F(y, \xi, \eta) = 0, \tag{12}$$

где

$$F(y, \xi, \eta) = \psi(y) \cdot \varphi^{'}(\xi) - \varphi(y) \cdot \psi^{'}(\eta).$$

Здесь

$$\psi^{'}(\eta) = -\frac{\lambda(k-i)}{(1+\lambda\eta)^{k-i+1}} \leq 0,$$

т.е. функция $\psi(\eta)$ убывает, т.к. $i \le k, \lambda > 0, \eta > 0$, а производная функции $\varphi(y)$ в точке $\xi \in (y, x)$ имеет вид

$$\varphi^{'}(\xi) = \frac{\lambda^{1/i}(1+\xi)^{k-1}[\xi(k-i+1)-i+1]}{\xi^{1/i}[(1+\xi)^{k/i}+\lambda^{1/i}\xi^{1-1/i}]^{i+1}}.$$

Покажем, что уравнение (12) не имеет решений, т.е.

$$F(y,\xi,\eta) > -1. \tag{13}$$

Очевидно, что для функции

$$F(y,\xi,\eta) = \frac{\lambda}{(1+y)^{k-i}} \cdot \frac{\lambda^{1/i}(1+\xi)^{k-1}[\xi(k-i+1)-i+1]}{\xi^{1/i}[(1+\xi)^{k/i}+\lambda^{1/i}\xi^{1-1/i}]^{i+1}} +$$
$$+ \frac{(1+y)^k}{\left((1+y)^{k/i}+\lambda^{1/i}\cdot y^{1-1/i}\right)^i} \cdot \frac{\lambda(k-i)}{(1+\lambda\eta)^{k-i+1}}$$

верна оценка

$$F(y,\xi,\eta) > \frac{\lambda}{(1+y)^{k-i}} \cdot \frac{\lambda^{1/i}(1+\xi)^{k-1}[\xi(k-i+1)-i+1]}{\xi^{1/i}[(1+\xi)^{k/i}+\lambda^{1/i}\xi^{1-1/i}]^{i+1}}.$$

Далее, используя оценку из предложения 1, при $0 < y < \xi < x < \lambda$ уменьшая числитель и увеличивая знаменатель правой части последнего неравенства, можем получить

$$F(y,\xi,\eta) > \frac{(1-i)\,(1+\lambda)^{i-1}\lambda}{\left((1+\lambda)^{k/i}+\lambda\right)^{i+1}}.$$

Покажем справедливость неравенства

$$\frac{(1-i)\,(1+\lambda)^{i-1}\lambda}{\left((1+\lambda)^{k/i}+\lambda\right)^{i+1}} > -1,$$

т.е.

$$\left((1+\lambda)^{k/i}+\lambda\right)^{i+1} > (i-1)\,(1+\lambda)^{i-1}\lambda.$$

Очевидно, что при $i = 1$ последнее неравенство верно.

Пусть $i > 1$. Учитывая $\frac{k}{i} \ge 1$, запишем последнее неравенство

$$\left(1+\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^{i-1} \cdot \left((1+\lambda)^{k/i}+\lambda\right)^2 > (i-1)\lambda \tag{14}$$

и воспользовавшись неравенством Бернулли

$$\left(1+\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^{i-1} > 1+\frac{(i-1)\lambda}{\lambda+1},$$

при $i \le k$ для левой части (14) получим следующую оценку:

$$\left(1+\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^{i-1} \cdot \left((1+\lambda)^{k/i}+\lambda\right)^2 > \frac{1+i\lambda}{\lambda+1} \cdot (1+2\lambda)^2.$$

Отсюда и из (14) получим неравенство

$$\frac{1+i\lambda}{\lambda+1} \cdot (1+2\lambda)^2 > (i-1)\lambda,$$

которое верно при любых $\lambda > 0$ и $i \le k$, т.к.

$$(1+i\lambda)(1+2\lambda)^2 > (i-1)\lambda(\lambda+1) \quad \Rightarrow \quad 4i\lambda^3 + (3i+5)\lambda^2 + (3i+5)\lambda + 1 > 0.$$

Следовательно, получим справедливость неравенства (13). Это значит, что уравнение (11) имеет корни только вида $x = y$, следовательно, по выше доказанной лемме 2, система уравнений (6) при этом условии имеет единственное решение вида $Y = U = V = T$, т.е. соответствующая такому решению слабо периодическая мера Гиббса единственна и она совпадает с единственной трансляционно-инвариантной мерой Гиббса для рассматриваемой модели (см. Теорему 1 из [17]). $\square$

В работе [11] (стр.8) показано, что если $z \in l^{\frac{k+1}{k}}$, то решение $z \in \mathbb{R}_+^\infty$ удовлетворяет условию нормализуемости. Заметим, что решение $\{z_j\}_{j\in\mathbb{Z}_0}$ в предложении 1 будет нормализуемым, потому что ряд $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} z_j^{\frac{k+1}{k}}$ сходится, т.к. сходится ряд $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} z_j$. Тогда по [11, Теорема 3.5.] существует мера Гиббса, соответствующая этому решению.

4. Случай нормального делителя индекса четыре

Пусть $H_{\{a_1\}} = \{x \in G_k : w_x(a_1) -$ четное число$\}$, где $w_x(a_1)-$число буквы a_1 в слове $x \in G_k$, $G_k^{(2)} = \{x \in G_k :\mid x \mid -$четное число$\}$, где $\mid x \mid -$длина слова $x \in G_k$ и $G_k^{(4)} = H_{\{a_1\}} \cap G_k^{(2)}-$нормальный делитель индекса четыре.

Рассмотрим фактор-группу $G_k^{(4)} = \{H_0, H_1, H_2, H_3\}$, где

$$H_0 = \{x \in G_k : w_x(a_1) - \text{четно}, |x| - \text{четно}\}$$

$$H_1 = \{x \in G_k : w_x(a_1) - \text{нечетно}, |x| - \text{четно}\}$$

$$H_2 = \{x \in G_k : w_x(a_1) - \text{четно}, |x| - \text{нечетно}\}$$

$$H_3 = \{x \in G_k : w_x(a_1) - \text{нечетно}, |x| - \text{нечетно}\}$$

Тогда в силу (3) $G_k^{(4)}$-слабо периодическая величина z_x имеет вид

$$z_x = \begin{cases} q, & x \in H_3,\ x_\downarrow \in H_1, \\ b, & x \in H_1,\ x_\downarrow \in H_3, \\ c, & x \in H_3,\ x_\downarrow \in H_0, \\ d, & x \in H_0,\ x_\downarrow \in H_3, \\ y, & x \in H_1,\ x_\downarrow \in H_2, \\ u, & x \in H_2,\ x_\downarrow \in H_1, \\ v, & x \in H_2,\ x_\downarrow \in H_0, \\ t, & x \in H_0,\ x_\downarrow \in H_2. \end{cases}$$

Здесь $\quad q = (\cdots, q_{-2}, q_{-1}, 1, q_1, q_2, \cdots), \quad b = (\cdots, b_{-2}, b_{-1}, 1, b_1, b_2, \cdots),$

$$c = (\cdots, c_{-2}, c_{-1}, 1, c_1, c_2, \cdots), \quad d = (\cdots, d_{-2}, d_{-1}, 1, d_1, d_2 \cdots),$$

$$y = (\cdots, y_{-2}, y_{-1}, 1, y_1, y_2, \cdots), \quad u = (\cdots, u_{-2}, u_{-1}, 1, u_1, u_2, \cdots),$$

$$v = (\cdots, v_{-2}, v_{-1}, 1, v_1, v_2, \cdots), \quad t = (\cdots, t_{-2}, t_{-1}, 1, t_1, t_2 \cdots).$$

Тогда в силу (3) $q_s,\ b_s,\ c_s,\ d_s,\ y_s,\ u_s,\ v_s,\ t_s\big(s\in\mathbb{Z}_0\big)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$
(15)\qquad \begin{cases}
q_s=\lambda_s\cdot\frac{1}{\left(1+\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}d_j\right)^i}\cdot\frac{1}{\left(1+\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}b_j\right)^{k-i}},\\
b_s=\lambda_s\cdot\frac{1}{\left(1+\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}u_j\right)^{i-1}}\cdot\frac{1}{\left(1+\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}q_j\right)^{k-i+1}},\\
c_s=\lambda_s\cdot\frac{1}{\left(1+\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}d_j\right)^{i-1}}\cdot\frac{1}{\left(1+\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}b_j\right)^{k-i+1}},\\
d_s=\lambda_s\cdot\frac{1}{\left(1+\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}c_j\right)^i}\cdot\frac{1}{\left(1+\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}v_j\right)^{k-i}},\\
y_s=\lambda_s\cdot\frac{1}{\left(1+\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}u_j\right)^i}\cdot\frac{1}{\left(1+\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}q_j\right)^{k-i}},\\
u_s=\lambda_s\cdot\frac{1}{\left(1+\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}y_j\right)^{i-1}}\cdot\frac{1}{\left(1+\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}t_j\right)^{k-i+1}},\\
v_s=\lambda_s\cdot\frac{1}{\left(1+\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}y_j\right)^{i-1}}\cdot\frac{1}{\left(1+\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}t_j\right)^{k-i+1}},\\
t_s=\lambda_s\cdot\frac{1}{\left(1+\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}c_j\right)^i}\cdot\frac{1}{\left(1+\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}v_j\right)^{k-i}},
\end{cases}
$$

где $|A|=i$.

Лемма 3. *Пусть $k\geq 2$. Если для некоторой последовательности параметров $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{Z}_0}$ существует положительное решение $(q_j,b_j,c_j,d_j,y_j,u_j,v_j,t_j)$, $j\in\mathbb{Z}_0$, системы уравнений (15), то ряды $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}q_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}b_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}c_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}d_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}y_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}u_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}v_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}t_j$ и $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}\lambda_j$ сходятся.*

Доказательство. Доказывается аналогично доказательству леммы 1. □

Из леммы 3 следует

Следствие 2. *Если один из рядов $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}q_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}b_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}c_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}d_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}y_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}u_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}v_j$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}t_j$ и $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}\lambda_j$ расходится, то система уравнений (15) не имеет положительного решения.*

Пусть все ряды сходятся и их суммы $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}q_j=Q$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}b_j=B$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}C_j=C$ и $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}d_j=D$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}y_j=Y$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}u_j=U$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}v_j=V$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}t_j=T$.

Перепишем систему уравнений (15) в виде

$$
(16)\qquad \begin{cases}
q_s=\lambda_s\cdot\frac{1}{(1+D)^i}\cdot\frac{1}{(1+B)^{k-i}}, & b_s=\lambda_s\cdot\frac{1}{(1+U)^i}\cdot\frac{1}{(1+Q)^{k-i}},\\
c_s=\lambda_s\cdot\frac{1}{(1+D)^{i-1}}\cdot\frac{1}{(1+B)^{k-i+1}}, & d_s=\lambda_s\cdot\frac{1}{(1+C)^{i-1}}\cdot\frac{1}{(1+V)^{k-i+1}},\\
y_s=\lambda_s\cdot\frac{1}{(1+U)^{i-1}}\cdot\frac{1}{(1+Q)^{k-i+1}}, & u_s=\lambda_s\cdot\frac{1}{(1+Y)^{i-1}}\cdot\frac{1}{(1+T)^{k-i+1}},\\
v_s=\lambda_s\cdot\frac{1}{(1+Y)^i}\cdot\frac{1}{(1+T)^{k-i}}, & t_s=\lambda_s\cdot\frac{1}{(1+C)^i}\cdot\frac{1}{(1+V)^{k-i}}.
\end{cases}
$$

Суммируя обе части каждого уравнения в (16) по $s\in\mathbb{Z}_0$ можем получить

$$
(17)\qquad \begin{cases}
Q=\lambda\cdot\frac{1}{(1+D)^i}\cdot\frac{1}{(1+B)^{k-i}}, & B=\lambda\cdot\frac{1}{(1+U)^i}\cdot\frac{1}{(1+Q)^{k-i}},\\
C=\lambda\cdot\frac{1}{(1+D)^{i-1}}\cdot\frac{1}{(1+B)^{k-i+1}}, & D=\lambda\cdot\frac{1}{(1+C)^{i-1}}\cdot\frac{1}{(1+V)^{k-i+1}},\\
Y=\lambda\cdot\frac{1}{(1+U)^{i-1}}\cdot\frac{1}{(1+Q)^{k-i+1}}, & U=\lambda\cdot\frac{1}{(1+Y)^{i-1}}\cdot\frac{1}{(1+T)^{k-i+1}},\\
V=\lambda\cdot\frac{1}{(1+Y)^i}\cdot\frac{1}{(1+T)^{k-i}}, & T=\lambda\cdot\frac{1}{(1+C)^i}\cdot\frac{1}{(1+V)^{k-i}}.
\end{cases}
$$

где $\lambda = \sum_{s\in\mathbb{Z}_0} \lambda_s$.

Разделив в этой системе уравнений первое уравнение на третье, второе на пятое, шестое на седьмое, четвертое на восьмое, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{Q}{C} = \frac{1+B}{1+D}, & \frac{B}{Y} = \frac{1+Q}{1+U}, \\ \frac{U}{V} = \frac{1+Y}{1+T}, & \frac{D}{T} = \frac{1+C}{1+V}. \end{cases}$$

Используя эту систему уравнений, (17) можно записать так:

$$\begin{cases} Q = \left(\frac{A}{C}\right)^i \cdot \frac{\lambda}{(1+B)^k}, & B = \left(\frac{B}{Y}\right)^i \cdot \frac{\lambda}{(1+Q)^k}, \\ C = \left(\frac{A}{C}\right)^{i-1} \cdot \frac{\lambda}{(1+B)^k}, & D = \left(\frac{T}{D}\right)^{i-1} \cdot \frac{\lambda}{(1+V)^k}, \\ Y = \left(\frac{B}{Y}\right)^{i-1} \cdot \frac{\lambda}{(1+Q)^k}, & U = \left(\frac{V}{U}\right)^{i-1} \cdot \frac{\lambda}{(1+T)^k}, \\ V = \left(\frac{V}{U}\right)^i \cdot \frac{\lambda}{(1+T)^k}, & T = \left(\frac{T}{D}\right)^i \cdot \frac{\lambda}{(1+V)^k}. \end{cases} \tag{18}$$

Из первого уравнения системы (18) найдем C, из второго$-Y$, из седьмого$-U$, из восьмого$-D$ и, подставив их в восьмое, седьмое, второе и первое уравнения системы уравнений (17), соответственно, получим:

$$\begin{cases} Q = \frac{(1+V)^k}{\left((1+V)^{k/i}+\lambda^{1/i}T^{1-1/i}\right)^i} \cdot \frac{\lambda}{(1+B)^{k-i}}, \\ B = \frac{(1+T)^k}{\left((1+T)^{k/i}+\lambda^{1/i}V^{1-1/i}\right)^i} \cdot \frac{\lambda}{(1+Q)^{k-i}}, \\ V = \frac{(1+Q)^k}{\left((1+Q)^{k/i}+\lambda^{1/i}B^{1-1/i}\right)^i} \cdot \frac{\lambda}{(1+T)^{k-i}}, \\ T = \frac{(1+B)^k}{\left((1+B)^{k/i}+\lambda^{1/i}Q^{1-1/i}\right)^i} \cdot \frac{\lambda}{(1+V)^{k-i}}. \end{cases} \tag{19}$$

Рассмотрим отображение $W : R^4 \to R^4$, определенное следующим образом:

$$\begin{cases} Q' = \frac{(1+V)^k}{\left((1+V)^{k/i}+\lambda^{1/i}T^{1-1/i}\right)^i} \cdot \frac{\lambda}{(1+B)^{k-i}}, \\ B' = \frac{(1+T)^k}{\left((1+T)^{k/i}+\lambda^{1/i}V^{1-1/i}\right)^i} \cdot \frac{\lambda}{(1+Q)^{k-i}}, \\ V' = \frac{(1+Q)^k}{\left((1+Q)^{k/i}+\lambda^{1/i}B^{1-1/i}\right)^i} \cdot \frac{\lambda}{(1+T)^{k-i}}, \\ T' = \frac{(1+B)^k}{\left((1+B)^{k/i}+\lambda^{1/i}A^{1-1/i}\right)^i} \cdot \frac{\lambda}{(1+V)^{k-i}}. \end{cases} \tag{20}$$

Заметим, что (19) есть уравнение $z = W(z)$. Чтобы решить систему уравнений (19), необходимо найти неподвижные точки отображения $z^{'} = W(z)$.

Лемма 4. *Следующие множества являются инвариантными относительно отображения W:*

$I_1 = \left\{(Q,B,V,T) \in R^4 :\ Q = B = V = T\right\},\ I_2 = \left\{(Q,B,V,T) \in R^4 : Q = V,\ B = T\right\},$

$I_3 = \left\{(Q,B,V,T) \in R^4 : Q = B,\ V = T\right\},\ I_4 = \left\{(Q,B,V,T) \in R^4 : Q = T,\ B = V\right\}.$

Доказательство. Доказывается аналогично доказательству леммы 2 из [19]. □

Из определений 1 и 2 следует, что в случае I_2 (или I_3 или I_4) слабо периодическая мера Гиббса не совпадает периодической, если из условий $Q = V,\ B = T$ (или $Q = B,\ V = T$ или $Q = T,\ B = V$) вытекает, что хотя бы одно из равенств $Q = C$, $B = Y$, $D = T$, $U = V$ не выполняется, т.е. значение z_i зависит от $x_\downarrow$.

Лемма 5. *Если на инвариантных множествах I_2 и I_4 существуют слабо периодические меры Гиббса, то они являются либо трансляционно-инвариантными, либо слабо периодическими (не периодическими).*

Доказательство. Проверим для I_2(остальные доказываются аналогично.) Пусть $Q = V,\ B = T$. Тогда из системы уравнений (17) при $B \neq D$ получим

$$Q = \frac{1}{(1+D)^i} \cdot \frac{\lambda}{(1+B)^{k-i}} \neq C = \frac{1}{(1+D)^{i-1}} \cdot \frac{\lambda}{(1+B)^{k-i+1}},$$

а то, что $B \neq D$ можно увидеть из второго и четвертого уравнений этой же системы. □

Заметим, что в случае инвариантного множества I_3 мы получим систему уравнений (20), которая уже изучена в предыдущем пункте и следовательно, в этом случае получим утверждение Теоремы 1.

Случай I_2 и $k = 2, i = 1$. В этом случае запишем систему уравнений (19):

$$\begin{cases} Q = \frac{(1+Q)^2}{(1+Q)^2+\lambda} \cdot \frac{\lambda}{1+B}, \\ B = \frac{(1+B)^2}{(1+B)^2+\lambda} \cdot \frac{\lambda}{1+Q}. \end{cases} \tag{21}$$

Верно следующее утверждение.

Предложение 2. *Система уравнений (21) при $\lambda \leq 4$ имеет только одно решение, а при $\lambda > 4$ имеет ровно три решения.*

Доказательство. Введя обозначения $x = 1 + Q$ и $y = 1 + B$, из (21) после некоторых преобразований можем получить

$$\begin{cases} x = f(y) \\ y = f(x), \end{cases}$$

где $f(x) = \frac{\lambda x^2}{(x^2+\lambda)(x-1)}$.

Заметим, что уравнение $f(x) = x$ имеет единственное положительное решение при любых $\lambda > 0$, т.к. уравнение

$$x = \frac{\lambda x^2}{(x^2+\lambda)(x-1)}$$

эквивалентно уравнению $\xi(x) = x^3 - x^2 - \lambda = 0$, которое по известной теореме Декарта о количестве положительных корней многочлена имеет не более одного положительного корня. С другой стороны, $\xi(1) = -\lambda < 0$ и $\xi(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, т.е. уравнение $\xi(x) = 0$ имеет по крайней мере одно положительное решение.

Очевидно, что это решение больше единицы. Кроме того, оно находится среди решений уравнения $f(f(x)) = x$. Поэтому рассмотрим уравнение

$$\frac{x - f(f(x))}{x - f(x)} = 0,$$

которое эквивалентно уравнению

$$h(x) = x^6 - (\lambda+2)x^5 + (5\lambda+1)x^4 - \lambda(2\lambda+5)x^3 + 2\lambda(2\lambda+1)x^2 - 3\lambda^2 x + \lambda^2 = 0.$$

Перепишем последнее уравнение

$$h(x) = \left(x^2 - \lambda x + \lambda\right)\left(x^2 - x - \sqrt{\lambda^2-\lambda} + \lambda\right)\left(x^2 - x + \sqrt{\lambda^2-\lambda} + \lambda\right) = 0.$$

Тогда оно имеет корни вида

$$x_{1,2}=\frac{\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-4\lambda}}{2},\quad x_i=\frac{1\pm\sqrt{1\pm 4\sqrt{\lambda^2-\lambda}-4\lambda}}{2},\ (i=3,4,5,6).$$

Нетрудно увидеть, что $x_{1,2}>0$ при $\lambda>4$, и x_i $(i=3,4,5,6)$ принимает отрицательные или комплексные значения при $\lambda>0$. Отсюда уравнение $h(x)=0$ не имеет решений при $\lambda<4$, имеет одно решение при $\lambda=4$ и имеет два решения при $\lambda>4$. Заметим, что при $\lambda=4$ уравнение $h(x)=0$ имеет решение $x=2$ и оно при $\lambda=4$ совпадает с единственным решением уравнения $f(x)=x$. $\square$

Случай I_2 и $k=3, i=1$. В этом случае, обозначив $x=1+Q$, $y=1+B$, аналогично предыдущему случаю из системы уравнений (19) получим

$$\begin{cases} y^2=\frac{\lambda x^3}{(x^3+\lambda)(x-1)}\\ x^2=\frac{\lambda y^3}{(y^3+\lambda)(y-1)}\end{cases}\tag{22}$$

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 3. *Система уравнений (22) при $\lambda\leq\frac{27}{16}$ имеет только одно решение и при $\lambda>\frac{27}{16}$ имеет ровно три решения.*

Доказательство. В системе уравнений (22) найдем из первого уравнения y и подставим во второе уравнение. Тогда после некоторых преобразований получим уравнение

$$\lambda x^6-((x^3+\lambda)(x-1))^2=x\sqrt{\lambda x(x^3+\lambda)(x-1)}(\lambda x+x^3-(x^3+\lambda)(x-1)).\tag{23}$$

Здесь необходимо, чтобы выражения в левой и правой частях уравнения (23)

$$\lambda x^6-((x^3+\lambda)(x-1))^2,\tag{24}$$

$$\lambda x+x^3-(x^3+\lambda)(x-1)\tag{25}$$

имели одинаковые знаки.

Легко проверить, что выражение (24) при $\acute{\lambda}_1(x)<\lambda<\acute{\lambda}_2(x)$ будет положительным, при $\lambda<\acute{\lambda}_1(x)$ и $\lambda>\acute{\lambda}_2(x)$ отрицательным, где $\acute{\lambda}_1(x)$ и $\acute{\lambda}_2(x)$ есть корни квадратного трехчлена (24) относительно переменной λ:

$$\acute{\lambda}_1(x)=\frac{x^3(x^3-2(x-1)^2)-x^3\sqrt{x^6-4x^3(x-1)^2}}{2(x-1)^2},$$

$$\acute{\lambda}_2(x)=\frac{x^3(x^3-2(x-1)^2)+x^3\sqrt{x^6-4x^3(x-1)^2}}{2(x-1)^2}.$$

Далее, перепишем выражение (25)

$$\lambda x+x^3-(x^3+\lambda)(x-1)=\lambda+2x^3-x^4.$$

Отсюда, если $\lambda>\breve{\lambda}(x)=x^4-2x^3$, то (25) будет положительным, в противном случае отрицательным. Значит, одновременно должны выполняться условия:

$$\acute{\lambda}_1(x)<\lambda<\acute{\lambda}_2(x),\ \lambda>\breve{\lambda}(x)\tag{26}$$

или

$$\lambda<\acute{\lambda}_1(x),\ \lambda>\acute{\lambda}_2(x),\ \lambda<\breve{\lambda}(x).\tag{27}$$

Теперь, обе стороны уравнения (23) возведем в квадрат. Тогда получим уравнение

(28)
$$f(\lambda,x)=x^{16}-(\lambda+4)x^{15}+3(\lambda+2)x^{14}-4x^{13}+(1-14\lambda)x^{12}+3\lambda(\lambda+8)x^{11}-$$
$$-16\lambda x^{10}-4\lambda(5\lambda-1)x^{9}+36\lambda^2x^8+\lambda^2(\lambda-24)x^7+\lambda^2(6-13\lambda)x^6+24\lambda^3x^5-$$
$$-16\lambda^3x^4+\lambda^3(4-3\lambda)x^3+6\lambda^4x^2-4\lambda^4x+\lambda^4=0.$$

Заметим, что если $y=x$, то решения системы уравнений (22) соответствуют решениям из инвариантного множества I_1, а на I_1 известно, что решение системы уравнений (19), и значит, решение системы уравнений (22) единственно. Кроме того, это решение находится среди решений (28).

При $y=x$ из (22) получим

$$\lambda_1(x)=\lambda=-x^3+x^4.$$

Рассмотрим уравнение (28) относительно переменной λ и разделим его на многочлен $\lambda+x^3-x^4$. В результате будем иметь уравнение вида

$$g(\lambda,x)=(-3x^3+6x^2-4x+1)\lambda^3+(-2x^7-4x^6+14x^5-11x^4+3x^3)\lambda^2+$$
$$+(x^{11}-2x^{10}-2x^9+11x^8-10x^7+3x^6)\lambda-x^{12}+3x^{11}-3x^{10}+x^9=0.$$

Решив уравнение $g(\lambda,x)=0$ с помощью формулы Кардано, получим следующие решения:

$$\lambda_2(x)=\frac{x^3(x-1)^3}{3x^2-3x+1},$$
$$\lambda_3(x)=\frac{x^3(2-x-x^2+x\sqrt{x^2+2x-3})}{2x-2},$$
$$\lambda_4(x)=\frac{x^3(2-x-x^2-x\sqrt{x^2+2x-3})}{2x-2}$$

Ясно, что $\lambda_4(x)<0$, т.к. $x>1$.

Рассмотрим $\lambda=\lambda_2(x)$. Заметим, что $\lambda_2(x)$ при $x>1$ должно одновременно удовлетворяет условиям (26) или (27).

Проверив условия (26), получим, что условие $\acute{\lambda_1}(x)<\lambda_2(x)<\acute{\lambda_2}(x)$ эквивалентно неравенству $2x^3-6x^2+4x-1>0$, а условие $\lambda_2(x)>\breve{\lambda}(x)$ эквивалентно неравенству $2x^3-6x^2+4x-1<0$. Значит, $\lambda_2(x)$ одновременно не удовлетворяет условиям (26). Заметим, что условия (27) также одновременно не выполняются, т.к. $\lambda_2(x)<\acute{\lambda_2}(x)$ при любых значениях $x>1$. Значит, если $\lambda=\lambda_2(x)$, то не существует ни одного значения x, которое соответствовало бы значению $\lambda_2(x)$.

Пусть $\lambda=\lambda_3(x)$. Легко проверить, что условия (26) выполняются одновременно при всех значениях x, которые удовлетворяют неравенству $2x^3-6x^2+4x-1<0$, а также условия (27) выполняются одновременно при всех значениях x, которые удовлетворяют неравенству $2x^3-6x^2+4x-1>0$. Иными словами, $\lambda_3(x)$ одновременно удовлетворяет условиям (26) или (27).

Найдем критические точки функции $\lambda_3(x)$:

$$\lambda_3'(x)=\frac{x^2(2x-3)\left[(-x^2-x+2+xt(x))t(x)r(x)+8x(x-1)\right]}{(2x-2)^2t(x)}=0.$$

Здесь $t(x) = \sqrt{x^2+2x-3}$ и $r(x) = \sqrt{2x^2+3x-3} + \sqrt{(2x+1)t(x)}$. Легко показать, что

$$(-x^2 - x + 2 + xt(x))t(x)r(x) + 8x(x-1) > 0.$$

Значит, функция $\lambda_3(x)$ имеет критические точки: $x = 0$ и $x = 3/2$. Отсюда, при $1 < x < 3/2$ функция $\lambda_3(x)$ убывает, а при $x > 3/2$ она возрастает, т.е. $x = 3/2$ есть точка минимума функции $\lambda_3(x)$ (см. Рис.2). Значит, минимальное значение этой функции есть:

$$\lambda_3(3/2) \equiv \lambda_{cr} = 27/16.$$

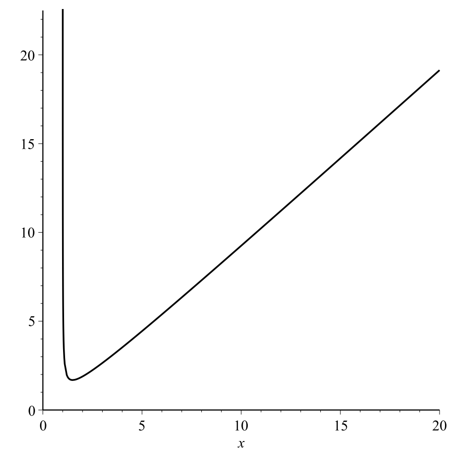

Рис. 2. График функции $\lambda_3(x)$.

Рассмотрим вторую производную функции $\lambda_3(x)$:

$$\lambda_3''(x) = \frac{s(x)}{(x-1)^2(x+3)\sqrt{(x-1)(x+3)}}.$$

Здесь

$$s(x) = 6x^5+15x^4-12x^3-54x^2+18x+27-(4x^4+7x^3-21x^2-21x-9)\sqrt{(x-1)(x+3)}.$$

Покажем, что $\lambda_3''(x) > 0$. Для этого достаточно показать справедливость следующего неравенства:

$$6x^5+15x^4-12x^3-54x^2+18x+27 > (4x^4+7x^3-21x^2-21x-9)\sqrt{(x-1)(x+3)}.$$

Для этого увеличим правую часть этого неравенства следующим образом:

$$(4x^4+7x^3-21x^2-21x-9)\sqrt{(x-1)(x+3)} < (4x^4+7x^3-21x^2-21x-9)(x+3).$$

В результате получим неравенство

$$2(x+1)(x(x-1)^3 - 6x^2 + 19x + 27) > 0.$$

Легко показать, что $x(x-1)^3 - 6x^2 + 19x + 27 > 0$ при $x > 1$. Значит, $\lambda_3''(x) > 0$

Из всего сказанного следует, что каждому значению $\lambda = \lambda_3(x)$ соответствуют ровно два значения x_1, x_2 при $\lambda > (\lambda_3(x))_{min} = \lambda_{cr}$, одно значение x_0 при $\lambda = \lambda_{cr}$ и ни одного значения при $0 < \lambda < \lambda_{cr}$.

С другой стороны, если в (22) из второго уравнения найдем y и подставим в первое уравнение, то относительно y получим точно такое же уравнение как уравнение (23). Подобно уравнению (23), анализируя это уравнение, можно получить, что оно будет иметь решение y_0 при $\lambda \leq \lambda_{cr}$ и решения вида y_0, y_1, y_2 при $\lambda > \lambda_{cr}$. Легко заметить, что $x_0 = y_0, x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ и $\lambda_1(3/2) = \lambda_{cr}$.

Итак, система уравнений (22) имеет единственное решение (x_0, x_0) при $0 < \lambda \leq \lambda_{cr}$, а при $\lambda > \lambda_{cr}$ имеет ровно три решения (x_0, x_0), (x_2, y_1), (y_1, x_2). □

Заметим, что аналогично случаю нормального делителя индекса два по [11, Теорема 3.5.] существуют меры Гиббса, соответствующие найденным решениям, т.к. эти решения удовлетворяют условию нормализуемости.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $k \geq 2$ и ряд $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} \lambda_j$, полученный из последовательности параметров $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{Z}_0}$, сходится. Тогда для HC модели со счетным числом состояний (соответствующей графу из рис. 1) в случае нормального делителя индекса четыре верны следующие утверждения:*

1. При $k \geq 1, i \leq k$ на инвариантных множествах I_1 и I_3 слабо периодическая мера Гиббса единственна. Более того, эта мера совпадает с единственной трансляционно-инвариантной мерой Гиббса.

2. Пусть $k = 2, i = 1, \lambda_{cr} = 4$. Тогда на I_2 при $\lambda \leq \lambda_{cr}$ существует ровно одна слабо периодическая мера Гиббса, которая является трансляционно-инвариантной и при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют ровно три слабо периодические меры Гибсса, одна из которых является трансляционно-инвариантной, а две другие слабо периодическими (не периодическими).

3. Пусть $k = 3, i = 1, \lambda_{cr} = \frac{27}{16}$. Тогда на I_2 при $\lambda \leq \lambda_{cr}$ существует ровно одна слабо периодическая мера Гиббса, которая является трансляционно-инвариантной и при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют ровно три слабо периодические меры Гибсса, одна из которых является трансляционно-инвариантной, а две другие слабо периодическими (не периодическими).

Доказательство. Следует из предложений 2,3 и Леммы 5. □

Заметим, что если ряд $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0} \lambda_j$ расходится, то H_A-слабо периодическая мера Гиббса не существует.

Случай I_4. В этом случае полезна следующая лемма.

Лемма 6. *(Кестен)* [22] *Пусть $f : [0,1] \to [0,1]-$ непрерывная функция с неподвижной точкой $\xi \in (0,1)$. Допустим, что f дифференцируема в точке ξ и $f^{'}(\xi) < -1$. Тогда существуют точки $x_1,\ x_2,\ 0 \leq x_1 < \xi < x_2 \leq 1$ такие, что $f(x_1) = x_2$ и $f(x_2) = x_1$.*

Пусть
$$s^{\pm} := s^{\pm}(k) = \frac{k - 3 \pm \sqrt{k^2 - 6k + 1}}{4},$$
$$\lambda^{\pm} := \lambda^{\pm}(k) = (s^{\pm} + 1)^k s^{\pm}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *При $k \geq 6$, $i = 1$ и $\lambda \in (\lambda^-(k), \lambda^+(k))$ для HC модели со счетным числом состояний (соответствующей графу из рис. 1) в случае нормального делителя индекса четыре существуют не менее трех слабо периодических мер Гиббса, соответствующих совокупности величин из I_4. При этом одна из них является трансляционно-инвариантной, а другие слабо периодическими (не периодическими) мерами Гиббса.*

Доказательство. При $k \geq 6$ и $i = 1$ на I_4 система уравнений (19) имеет вид ($x = \lambda Q$ и $y = \lambda V$):

$$\begin{cases} x = \gamma(y) \\ y = \gamma(x), \end{cases} \tag{29}$$

где

$$\gamma(x) = \frac{1 + \lambda x}{(1 + \lambda x)^k + \lambda}.$$

Ясно, что $0 < x < 1$ и $0 < y < 1$. Отсюда $0 < \gamma(x) < 1$, т.е. $\gamma : [0, 1] \to [0, 1]$. Кроме того, $\gamma(x)$−непрерывная, дифференцируемая функция на отрезке $[0, 1]$. Известно, что уравнение $\gamma(x) = x$ имеет единственную неподвижную точку $x = \xi$. Тогда

$$\xi = \frac{1 + \lambda\xi}{(1 + \lambda\xi)^k + \lambda}.$$

Отсюда после некоторых преобразований получим

$$\xi = \frac{1}{(1 + \lambda\xi)^k}. \tag{30}$$

Рассмотрим производную $\gamma'(\xi)$:

$$\gamma'(\xi) = \frac{\lambda(1 + \lambda\xi)^k + \lambda^2 - k\lambda(1 + \lambda\xi)^k}{((1 + \lambda\xi)^k + \lambda)^2}.$$

Используя (30), получим

$$\gamma'(\xi) = \frac{\lambda\xi(1 - k) + \lambda^2\xi^2}{(1 + \lambda\xi)^2}.$$

Тогда неравенство $\gamma'(\xi) < -1$ имеет вид

$$\lambda\xi(1 - k) + \lambda^2\xi^2 + (1 + \lambda\xi)^2 < 0.$$

Анализируя это неравенство можно увидеть, что оно имеет решение $\xi_1 < \xi < \xi_2$, если условия теоремы выполнены, где

$$\xi_1 = \frac{k - 3 - \sqrt{k^2 - 6k + 1}}{4\lambda},\ \xi_2 = \frac{k - 3 + \sqrt{k^2 - 6k + 1}}{4\lambda}. \tag{31}$$

Тогда $\xi \in \left(\frac{s^-}{\lambda}, \frac{s^+}{\lambda}\right)$. Из (30) получим

$$\lambda = \kappa(\xi) := \frac{1}{\xi}\left(\sqrt[k]{\frac{1}{\xi}} - 1\right). \tag{32}$$

При $0 < \xi < 1$ имеем

$$\kappa'(\xi) = -\frac{k + 1}{k\sqrt[k]{\xi^{2k+1}}} + \frac{1}{\xi^2} < 0,$$

т.е. функция $\kappa(\xi)$ убывает. Кроме того, $\kappa(1) = 0$, $\kappa(\xi) \to \infty$ при $\xi \to 0$ и $\kappa'(\xi) = 0$ при $\xi = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k > 1$. Отсюда при $\xi \in \left(\frac{s^-}{\lambda}, \frac{s^+}{\lambda}\right)$, в силу (31) и (32), имеем

$$\lambda \in (\kappa(\xi_2), \kappa(\xi_1)) = (\lambda^-(k), \lambda^+(k)).$$

Следовательно, по лемме Кестена получим, что система уравнений (29) при $\lambda^-(k) < \lambda < \lambda^+(k)$ имеет три решения (ξ, ξ), (x_1, y_1) и (y_1, x_1). Известно, что решение (ξ, ξ) соответствует трансляционно-инвариантной мере Гиббса для HC-модели. Кроме того, такая мера единственна. Значит, решения (x_1, y_1) и

(y_1, x_1) соответствуют слабо периодическим (не периодическим) мерам Гиббса для рассматриваемой модели. $\square$

References

[1] H.-O. Georgii, *Gibbs Measures and Phase Transitions*, De Gruyter Studies in Mathematics, **9**, Walter de Gruyter, Berlin, 1988.

[2] C.J. Preston, *Gibbs States on Countable Sets*, Cambridge Tracts Math., Vol. 68, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1974.

[3] Ya.G. Sinai, *Theory of Phase Transitions: Rigorous Results* [in Russian], Nauka, Moscow, 1980; English transl. (Intl. Series Nat. Philos., Vol. 108), Pergamon, Oxford, 1982.

[4] U.A. Rozikov, *Gibbs measures on Cayley trees*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2013.

[5] F. Henning, C. Külske, *Coexistence of localized Gibbs measures and delocalized gradient Gibbs measures on trees*, Ann. Appl. Probab. **31**:5, (2021), 2284–2310.

[6] S. Buchholz, *Phase transitions for a class of gradient fields*, Probability Theory and Related Fields, **179** (2021), 969–1022.

[7] F. Henning, C. Külske, *Existence of gradient Gibbs measures on regular trees which are not translation invariant*, arXiv:2102.11899v2.

[8] N.N. Ganikhodjaev, U.A. Rozikov, *The Potts Model with Countable Set of Spin Values on a Cayley Tree*, Letters in Mathematical Physics, **75** (2006), 99–109.

[9] N.N. Ganikhodjaev, *Limiting Gibbs measures of Potts model with countable set of spin values*, J. Math. Anal. Appl. /bf 336 (2007), 693–703.

[10] Ye. Zichun, *Models of gradient type with sub-quadratic actions*, J. Math. Phys. /bf 60, 073304 (2019) doi: 10.1063/1.5046860.

[11] F. Henning, C. Külske, A. Le Ny, U.A. Rozikov, *Gradient gibbs measures for the SOS-model with countable values on a Cayley tree*, Electron. J. Probab., /bf 24 (2019), doi: 10.1214/19-EJP364.

[12] a.E. Mazel, Yu.M. Suhov *Random surfaces with two-sided constraints: an application of the theory of dominant ground states*, J. Statist. Phys. **64** (1991), 111–134.

[13] G. Brightwell, O. Häggström, P. Winkler, *Non monotonic behavior in hard-core and Widom-Rowlinson models*, Jour. Stat. Phys. **94** 1999, 415–435.

[14] F.P. Kelly, *Stochastic models of computer communication systems*, With discussion, J. Roy. Stat. Soc. Ser. B 47 (1985), 379–395.

[15] R.M. Khakimov, M.T. Makhammadaliev, *Uniqueness and nonuniqueness conditions for weakly periodic Gibbs measures for the Hard-Core model*, Theor. Math. Phys. **204**:2 (2020), 1059–1078.

[16] G. Brightwell, P. Winkler, *Graph homomorphisms and phase transitions*, J.Combin. Theory Ser.B. **77** (1999), 221–262.

[17] R.M. Khakimov, M.T. Makhammadaliev, U.A. Rozikov, *Gibbs measures for HC-Model with a countable set of spin values on a Cayley tree*, arXiv:2205.02025v1 [math-ph].

[18] U.A. Rozikov, M. M. Rakhmatullaev, *Weakly periodic ground states and Gibbs measures for the Ising model with competing interactions on the Cayley tree*, Theor. Math. Phys. **160**:3 (2009), 1292–1300.

[19] U.A. Rozikov, R.M. Khakimov, *Periodic Gibbs measures for Potts model on the Cayley tree*, Theor. Math. Phys. **175**:2 (2013), 699–709.

[20] L.V. Bogachev, U.A. Rozikov, *On the uniqueness of Gibbs measure in the Potts model on a Cayley tree with external field*, J. Stat. Mech. Theory Exp. **7** (2019), 073205, 76 pp.

[21] D. Galvin, F. Martinelli, K. Ramanan, P. Tetali, *The multi-state Hard Core model on a regular tree*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, **25**:2 (2011), 894–915.

[22] H. Kesten, *Quadratic transformations: a model for population growth.I*, Adv.Appl. Probab., **2**:1 (1970), 1–82.

[23] F. Martinelli, A. Sinclair, D. Weitz, *Fast mixing for independent sets, coloring and other models on trees*, Random Structures and Algoritms, **31** (2007), 134–172.

[24] U.A. Rozikov, R.M. Khakimov and M.T. Makhammadaliev, *Periodic Gibbs measures for a two-state HC-Model on a Cayley Tree*, Contemporary Mathematics. Fundamental Directions, **68**:1 (2022), 95–109.

[25] A.N. Shiryayev, *Probability*, [in Russian], Nauka, Moscow (1989).

Rustamjon Maxmudovich Khakimov
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Namangan State University
316, Uychi str.,
160136, Namangan, Uzbekistan
E-mail address: rustam-7102@rambler.ru

Mukhtorjon Tursunmukhammad ogli Makhammadaliev
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Namangan State University
316, Uychi str.,
160136, Namangan, Uzbekistan
E-mail address: mmtmuxtor93@mail.ru