

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том ??, стр. ?-? (2024)

УДК 512.54

MSC 05C25

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ АБЕЛЕВЫ TI -ПОДГРУППЫ ПОРЯДКА 4 В
ЛИНЕЙНЫХ ГРУППАХ

Н. Д. Зюляркина, Т. Г. Ножкина

АБСТРАКТ. In the paper, we prove that if A is an elementary Abelian TI -subgroup of order 4 in a group G such that $G = F^*(G) \cdot A$, and $F^*(G)$ is a quasi-simple group which covers the group $L_n(q)$ where q is odd, then $F^*(G) \cong L_2(5)$.

Keywords: finite group, elementary Abelian TI -subgroup, centralizers of involutions and semi-involutions.

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи теории конечных групп связаны с описанием классов групп, содержащих подгруппы с рядом определённых свойств. В частности, большой интерес представляют так называемые плотно вложенные подгруппы и TI -подгруппы.

Подгруппа H конечной группы G называется плотно вложенной в G , если $|H|$ чётен, а $|H \cap H^g|$ нечётен для любого $g \in G - N_G(H)$.

Подгруппа A группы G называется TI -подгруппой, если $A \cap A^g = 1$ для любого $g \in G - N_G(A)$.

Заметим, что плотно вложенная 2-группа является TI -подгруппой.

Исследование плотно вложенных подгрупп началось с работы М. Судзуки [10], где были описаны группы, в которых силовская 2-подгруппа является TI -подгруппой. Следующий важный результат в этом направлении был получен Х. Бендером, который в [3] описал группы с сильно вложенной подгруппой. М. Ашбахером в [2] изучались плотно вложенные подгруппы корневого типа. При этом остались неисследованными случаи, когда силовская 2-подгруппа этой группы элементарная абелева или содержит единственную инволюцию. Ввиду того, что в известных простых группах, содержащих плотно вложенную подгруппу, эта подгруппа оказывается в большинстве случаев 2-группой,

особый интерес представляет изучение групп, содержащих 2-подгруппу, являющуюся TI -подгруппой. Описанию таких групп посвящены многие работы Ф.Тиммесфельда и его соавторов [6], [11], [12].

А.А. Махневым в [8] был изучен случай плотно вложенной подгруппы корневого типа с неэлементарной циклической силовской 2-подгруппой A при условии, что слабое замыкание инволюции из A в силовской 2-подгруппе является абелевой группой. Там же показано, что при изучении плотно вложенных подгрупп с неэлементарной циклической силовской 2-подгруппой можно ограничиться случаем, когда эта подгруппа циклическая порядка 4. Им же в [9] был получен следующий результат для TI -подгрупп:

Теорема 1. Пусть 2-группа A является TI -подгруппой конечной группы G и $G_0 = \langle A^G \rangle$. Тогда выполнено одно из следующих условий:

- (1) A является циклической или элементарной абелевой группой.
- (2) $[A, A^g] = 1$ для любого $g \in G - N(A)$.
- (3) $\langle A^{G_0} \rangle \cong L_2(2^n), Sz(2^n), U_3(2^n)$ или $SU_3(2^n)$, A является силовской 2-подгруппой в $\langle A^{G_0} \rangle$.
- (4) A содержит подгруппу A_0 индекса 2, которая инвертируется элементом x из $A - A_0$, $V = \langle A_0^G \rangle$ является абелевой группой и $\bar{G}_0 = G_0/V$ порождается множеством нечётных транспозиций \bar{x}^G .
- (5) $A \cong Q_8 \times E_{2^n}$ или A абелева группа порядка 4, группа $\langle \Omega(A)^G \rangle$ элементарная, и, для множества D элементов из G сопряжённых с элементами из $A - V$, \bar{D} является множеством корневых инволюций в $\bar{G}_0 = G/V$.
- (6) $A \cong Z_4 \times Z_4$ и $\langle A^{G_0} \rangle \cong L_3(4)$ или $SL_3(4)$.
- (7) $A \cong Q_8$ и $\langle A^{G_0} \rangle \cong G_2(2), G_2(3), M_{10}, M_{11}, M_{12}$ или $\langle A^{G_0} \rangle$ является гомоморфным образом универсальной группы Шевалле G^* над полем из трёх элементов, и A есть образ $O^2(K)$, где K является фундаментальной подгруппой G^* , представленной длинными корнями; $\langle A^{G_0} \rangle = G^*$, если G^* – ортогональная группа размерности не меньшей, чем 4.

Из этой теоремы следует, что наименее исследованы случаи, когда TI -подгруппа A элементарная абелева или циклическая. В дальнейшем циклический случай исследовался А.А. Махнёвым и Н.Д. Зюляркиной в работах [13], [14], [15]. В частности, в [13] было показано, что циклическая TI -подгруппа нормализует любую компоненту (если таковые имеются).

В данной работе авторы исследуют линейные группы на предмет наличия в них элементарных абелевых TI -подгрупп порядка 4. Основные определения и обозначения, используемые в работе, взяты из [1]. Основной результат:

Теорема 2. Пусть $G = F^*(G) \cdot A$, где $F^*(G)$ – квазипростая группа, являющаяся накрывающей группой для $L_n(q)$, где q нечётно, A – элементарная абелева TI -подгруппа порядка 4. Тогда $F^*(G) \cong L_2(5)$.

Следствие 1. Любая компонента группы G , являющаяся накрывающей для $L_n(q)$, где q нечётно и содержащая элементарную абелеву TI -подгруппу порядка 4, изоморфна $L_2(5)$.

Заметим, что исключительный случай $F^*(G) \cong L_2(5)$ возникает из п. 3) теоремы 1 в силу изоморфизма $L_2(4) \cong L_2(5)$.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В дальнейшем будем считать, что $A \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{e, a_0, b_0, a_0b_0\}$ – ТИ-подгруппа конечной группы G .

Лемма 1. Пусть x – элемент нечётного порядка из $C_G(a_0)$. Тогда $x \in C_G(A)$.

Доказательство. Пусть $|x| = 2n + 1$. Так как A является ТИ-подгруппой группы G , то $x \in N_G(A)$. Если $x \notin C_G(A)$, то $a_0^x = a_0, b_0^x = a_0b_0, (a_0b_0)^x = b_0$. Тогда

$$b_0 = b_0^{x^{2n+1}} = \left(b_0^{x^{2n}}\right)^x = b_0^x = a_0b_0.$$

Из полученного противоречия, следует, что $x \in C_G(A)$.

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть A – элементарная абелева ТИ-подгруппа порядка 4 конечной группы G . Тогда $A \trianglelefteq C_G(a)$ для любого элемента $a \in A, a \neq e$.

Доказательство. Пусть $x \in C_G(a)$. Тогда для $a \in A, a \neq e$, имеем $a = a^x \in A^x \cap A$, следовательно, $A^x = A$ и $A \trianglelefteq C_G(a)$.

Лемма доказана.

Следствие 2. Если L – компонента из $C_G(a)$, то A централизует L .

Следующая лемма показывает, что если конечная группа G содержит элементарную абелеву ТИ-подгруппу A порядка 4, то A нормализует любую компоненту из G , если таковые имеются.

Лемма 3. Пусть A – элементарная абелева ТИ-подгруппа порядка 4 конечной группы G , L компонента из G . Тогда $A \leq N_G(L)$.

Доказательство.

Пусть G – контрпример к лемме наименьшего порядка. Очевидно, что тогда $\langle L^A \rangle = L \cdot L^{a_0} \cdot L^{b_0} \cdot L^{a_0b_0} \leq G$ и $G = \langle L^A \rangle \cdot A$.

Случай 1. $\langle L^A \rangle = L \cdot L^{a_0} \cdot L^{b_0} \cdot L^{a_0b_0}$ – центральное произведение четырёх различных компонент. Введём следующие обозначения:

$$L = L_1, \quad L^{a_0} = L_2, \quad L^{b_0} = L_3, \quad L^{a_0b_0} = L_4,$$

$$H_{1,2} = \{l^{a_0} \mid l \in L_1, l^{a_0} \in L_2\}, \quad H_{3,4} = \{l^{b_0} \mid l \in L_3, l^{a_0b_0} \in L_4\}.$$

Для диагонали $H_{1,2} = \{l^{a_0} \mid l \in L_1, l^{a_0} \in L_2\}$ выполняется равенство $(l^{a_0})^{a_0} = l^{a_0} = l^{a_0}$, поэтому $H_{1,2} \leq C_G(a_0)$ и, следовательно, $H_{1,2} \leq N_G(A)$. Так как $H_{1,2}$ порождается элементами нечётного порядка, то, по лемме 1, $H_{1,2} \leq C_G(A)$. Но, в то же время $H_{1,2}^{b_0} = H_{3,4}$ и, следовательно, $H_{1,2} = H_{3,4}$, что невозможно, так как $H_{1,2}$ и $H_{3,4}$ различны в указанном центральном произведении.

Случай 2. $\langle L^A \rangle = L \cdot L^a$ – центральное произведение двух различных компонент, $a \in A, a \neq e$. Без ограничения общности, можно считать, что $a = a_0$. Введём обозначения: $L = L_1, L^{a_0} = L_2$. Как было показано выше, $L^{a_0} \in C_G(A)$. Заметим, что в этом случае одна из инволюций, содержащихся в A будет нормализовать компоненту L_1 , а две другие будут переставлять L_1 и L_2 . Обозначим через x инволюцию из A , нормализующую L_1 . Если x централизует L_1 , то, так как L_1 порождается элементами нечётного порядка, получаем $L_1 \leq C_G(A)$, что невозможно, так как $\langle L^A \rangle = L \cdot L^a$. Следовательно, x не централизует

L_1 . Пусть p – простое число, делящее порядок L_1 , для которого в L_1 существуют p -элементы, не лежащие в центре L_1 . Поскольку L_1 является компонентой, совокупность всех таких p -элементов будет порождать L_1 . Так как x не централизует L_1 , то существует p -элемент h такой, что $h \notin C_G(x)$. Для него, с одной стороны, $(hh^{a_0})^x = hh^{a_0}$, а с другой, $(hh^{a_0})^x = h^x (h^{a_0})^x$. Отсюда $hh^{a_0} = h^x (h^{a_0})^x$. Так как произведение $L_1 L_2$ центральное, то $\begin{cases} h^x = hz \\ (h^{a_0})^x = z^{-1} h^{a_0} \end{cases}$, $z \in Z(L_1) \cap Z(L_2)$. Следовательно, z является не единичным p -элементом из центра L_1 . В силу выбора p , порядок центра L_1 делится на все простые делители $|L_1|$. Центры квазипростых групп и их порядки полностью описаны в [4] и таких групп нет. Следовательно, случай 2 невозможен и мы получаем $\langle L^A \rangle = L$, $G = L \cdot A$, и $A \leq N_G(L)$.

Лемма доказана.

Лемма 3 показывает, что при исследовании групп, содержащих компоненты, вопрос сводится к изучению групп вида $G = F^*(G) \cdot A$, где $F^*(G)$ это обобщённая подгруппа Фиттинга группы G , являющаяся квазипростой группой.

Лемма 4. Пусть G – группа из формулировки теоремы 2. Тогда $A \cap Z(G) = \{e\}$.

Доказательство. Пусть $A \cap Z(G) = x$ и $x \neq e$, тогда $A \trianglelefteq G$ и, ввиду строения G , $A \leq Z(G)$. Что невозможно, так как $Z(G)$ циклический.

Лемма доказана.

3. ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ

Ввиду того, что классические группы Шевалле можно представить как группы автоморфизмов векторных пространств, нам понадобятся сведения об инволюциях и полуинволюциях в таких группах.

Пусть V векторное пространство размерности n над полем $k = GF(q)$, q нечетно, $\tilde{Y} = GL_n(k)$ и $Y \leq \tilde{Y}$. Обозначим через I_V тождественный автоморфизм пространства V , а через γI_V ($\gamma \in k^*$) автоморфизм, при котором каждый вектор из V умножается на γ . Неединичный элемент ω из Y назовём полуинволюцией, если $\omega^2 = \gamma I_V$. Ясно, что инволюции из Y – это полуинволюции. Полуинволюции, не являющиеся инволюциями, называются истинными.

Как показано в разделе 3А из [5], каждой инволюции $\omega \in Y$ соответствуют два подпространства V_ω^+ и V_ω^- из V :

$$V_\omega^+ = C_V(\omega) = \{v \in V \mid \omega(v) = v\}, V_\omega^- = [V, \omega] = \{v \in V \mid \omega(v) = -v\}.$$

Тогда имеет место разложение $V = V_\omega^+ \oplus V_\omega^-$, и тип инволюции ω определяется как $\dim V_\omega^-$. Для инволюции ω типа m базис в V называется стандартным, если в нем первые $n - m$ векторов выбраны из V_ω^+ , а последние m векторов из V_ω^- . Если ω – инволюция типа m , то из раздела 3А [5] $C_{GL_n(q)}(\omega)$ содержит нормальную подгруппу изоморфную

$$\underbrace{SL_{n-m}(q)}_{L_1} \times \underbrace{SL_m(q)}_{L_2}.$$

Пусть рассматривается группа $H = GL_n(q)/Z_1$, где $|Z_1|$ чётен и $m = \frac{n}{2}$. Обозначим $\bar{\omega} = \omega Z_1$. Тогда полный прообраз $C_H(\bar{\omega})$ в $GL_n(q)$ содержит подгруппу

изоморфную

$$\underbrace{(SL_m(q) \times SL_m(q))}_{L_1} \cdot \langle \tau \rangle,$$

где τ действует на стандартном базисе следующим образом: $\tau(e_i) = e_{m+i}$, $\tau(e_{m+i}) = e_i$ при $1 \leq i \leq m$.

Пусть теперь $\omega \in Y$ истинная полуинволюция и $\omega^2 = \gamma I_V$. Если $\gamma = \beta^2$ для некоторого элемента β из k , то $\omega = \beta I_V \omega_1$, где ω_1 инволюция из \tilde{Y} . Определим в этом случае тип ω как минимум из типов двух инволюций ω_1 и $-I_V \omega_1$. Стандартный базис для ω определяется как стандартный базис той из инволюций ω_1 или $-I_V \omega_1$, тип которой минимален. Если $\gamma \notin (k^*)^2$, то тип для ω считается равным 0. Тогда для централизатора смежного класса, содержащего ω , в некотором частном группы $GL_n(q)$, его полный прообраз в $GL_n(q)$ состоит из блочных матриц вида:

$$\begin{pmatrix} A & \gamma B \\ B & A \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \gamma B & A \\ A & B \end{pmatrix},$$

где A и B квадратные матрицы размерности m , E – единичная матрица той же размерности.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: X – частное группы $SL_n(q)$ по некоторой центральной подгруппе; через X^* обозначим множество таких расширений группы X , что для любой группы \tilde{X} из X^* любой элемент из $\tilde{X} - X$ индуцирует на X внешний внутренне-диагональный автоморфизм. Пусть $g \in GL_n(q)$. Если $g \in Z(GL_n(q)) \cdot SL_n(q)$, то через \bar{g} будем обозначать смежный класс в этом частном, который содержит элемент $gz \in SL_n(q)$, $z \in Z(GL_n(q))$. Если $g \notin Z(GL_n(q)) \cdot SL_n(q)$, то через \bar{g} будем обозначать внешний автоморфизм, индуцируемый элементом g на X .

Разобьём доказательство теоремы 2 на четыре леммы.

Пусть $G = XA$, $X = F^*(G)$ – частное $SL_n(q)$, $n \geq 2$, q нечётно.

Лемма 5. *Случай $G \in X^*$ при $n \geq 3$ невозможен.*

Доказательство.

Допустим, что существует элементарная абелева TI -подгруппа A из G . Классы сопряжённых инволюций в частном $SL_n(q)$ описаны в [5]. Возможны два случая:

- (1) a_0 соответствует инволюции u типа m ,
- (2) a_0 соответствует полуинволюции u типа 0.

Случай 1.

Пусть a_0 соответствует инволюции u типа m , которая действует на стандартном базисе следующим образом: $u(e_i) = e_i$ при $1 \leq i \leq n - m$, $u(e_i) = -e_i$ при $n - m + 1 \leq i \leq n$. Если $m \neq \frac{n}{2}$ или частное берётся по центральной подгруппе нечётного порядка, то

$$\underbrace{SL_{n-m}(q)}_{L_1} \times \underbrace{SL_m(q)}_{L_2} \leq C_{GL_n(q)}(u),$$

L_1 и L_2 нормальные подгруппы в централизаторе инволюции u . Допустим, $m \geq 2$ и $n - m \geq 2$. Если $q \neq 3$, то L_1 и L_2 являются компонентами, поэтому A централизует L_1 и L_2 . Если $m = 2$ ($n - m = 2$) и $q = 3$, то соответствующая

подгруппа $L_i \cong SL_2(3)$, которая порождается элементами нечётногo порядка. Тогда по лемме 1, A централизует L_i .

Обозначим через v элемент из $GL_n(q)$, соответствующий инволюции $b_0 \in A$. Тогда, аналогично, $v \in C_{GL_n(q)}(L_1)$, $v \in C_{GL_n(q)}(L_2)$ и v действует на стандартном базисе: $v(e_i) = \gamma e_i$ при $1 \leq i \leq n-m$, $v(e_i) = -\gamma e_i$ при $n-m+1 \leq i \leq n$. Тогда $uv \in Z(GL_n(q))$ и, следовательно, $a_0 b_0 \in Z(G)$, что невозможно в силу леммы 4.

Пусть теперь $m = \frac{n}{2}$, $X = SL_n(q)/Z_1$, порядок Z_1 чётен. По разделу 3А из [5] полный прообраз $C_{GL_n(q)/Z_1}(a_0)$ в $GL_n(q)$ при естественном гомоморфизме содержит подгруппу:

$$\underbrace{(SL_m(q))}_{L_1} \times \underbrace{(SL_m(q))}_{L_2} \cdot \langle \tau \rangle.$$

Инволюция τ , которая действует на стандартном базисе следующим образом: $\tau(e_i) = e_{m+i}$, $\tau(e_{m+i}) = e_i$ при $1 \leq i \leq m$, переставляет L_1 и L_2 . Если $m \geq 2$, то L_1 и L_2 либо являются компонентами, либо порождаются элементами нечётногo порядка, поэтому они централизуются подгруппой A . Повторяя рассуждения, аналогичные случаю $m \neq \frac{n}{2}$, также получим, что A подгруппа центра G , что невозможно.

Если $m = 1$ или $n-m = 1$, то данная ситуация разбирается аналогично.

Случай 2. Пусть a_0 соответствует полуинволюции u типа 0 из $GL_n(q)$. Тогда $u^2 = \gamma I_V$ для некоторого $\gamma \in k^* - (k^*)^2$, $n = 2m$. В данном случае $U = \langle Z, u \rangle$ – циклическая и $C_{GL_n(q)}(U) = C_{GL_n(q)}(u) \cong GL_m(q^2)$. Тогда из раздела 3А [5] следует, что существует элемент $x \in GL_n(q)$, действующий на стандартном базисе следующим образом: $x(e_i) = e_{m+i}$, $x(e_{m+i}) = -e_i$ при $1 \leq i \leq m$, $\det(x) = (-1)^m$, $|x| = 2$, $u^x = -u$, такой, что

$$C_{GL_n(q)/Z}(u) = (GL_m(q^2)/Z) \cdot \langle x \rangle,$$

где x индуцирует полевой автоморфизм порядка 2 на $GL_m(q^2)/Z$. Тогда в централизаторе инволюции a_0 есть компонента $L \cong SL_m(q^2)$. Подгруппа A централизует L , что невозможно ввиду того, что $Z(C_{GL_n(q)/Z}(u))$ – циклический.

Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть $G \in X^*$ и $n = 2$, тогда $q = 5$.

Доказательство.

- (1) Пусть $A = \{e, a_0, b_0, a_0 b_0\}$ является TI -подгруппой группы G и $G \in X^*$, X – частное $SL_2(q)$ по подгруппе Z_1 и все инволюции из A соответствуют инволюциям типа 1. Зафиксируем инволюцию $a_0 = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$. Если $|Z_1|$ нечётен (то есть $X = SL_2(q)$), то из [5] $C_G(a_0) = \left\{ e; \overline{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}} \right\}$. Так как инволюция $b_0 \in A$ должна централизовать a_0 , то $b_0 = \overline{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$, и $a_0 b_0 = \overline{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \in Z(G)$, что невозможно в силу леммы 4.

Пусть $|Z_1|$ чётен (то есть $X = L_2(q)$). Тогда

$$C_G(a_0) = \left\{ e; \overline{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}}; \overline{\begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}}; \overline{\begin{pmatrix} 0 & \alpha\gamma \\ \beta\gamma & 0 \end{pmatrix}} \mid \alpha, \beta \in F_5^* \right\}.$$

Из строения $C_G(a_0)$ следует, что в качестве инволюции b_0 можно взять инволюцию типа 1 вида $b_0 = \overline{\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \frac{1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix}}$, так как из $\begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ следует $uv = 1$ и $v = \frac{1}{u}$. Тогда $a_0b_0 = \overline{\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\frac{1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix}}$, $(a_0b_0)^2 = -E$. Если $(-1) \notin (F_q^*)^2$, то a_0b_0 – полуинволюция типа 0, что в этом случае невозможно. Пусть $(-1) \in (F_q^*)^2$, тогда a_0b_0 – инволюция типа 1, $q \equiv 1(4)$ и

$$A = \left\{ e; \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}; \overline{\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \frac{1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix}}; \overline{\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\frac{1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix}} \right\}.$$

Обозначим $s_1 = \overline{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}} \in C_G(a_0)$. Так как $A \trianglelefteq C_G(a_0)$, то $b_0^{s_1} = \overline{\begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda\beta}{\alpha} \\ \frac{\alpha}{\lambda\beta} & 0 \end{pmatrix}} \in A$, отсюда $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha}$ или $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\beta}{\alpha}$. Эти равенства эквивалентны системе уравнений $\alpha^2 = \pm\beta^2$. Рассмотрим количество решений уравнений $\alpha^2 = \pm\beta^2$. Из теоремы 6.26 [7], для невырожденной квадратичной формы f от чётного числа переменных над полем F_q , где q нечётно, число решений уравнения $f(x_1, \dots, x_n) = b$, для любого $b \in F_q$, в F_q^n равно

$$q^{n-1} + v(b) \cdot q^{\frac{n-2}{2}} \cdot \eta\left((-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \Delta\right),$$

где $\Delta = \det(f)$,

$$v(b) = \begin{cases} -1 & \text{при } b \in F_q^* \\ q-1 & \text{при } b = 0, \end{cases} \quad \eta(c) = \begin{cases} -1 & \text{при } c \notin (F_q^*)^2 \\ 1 & \text{при } c \in (F_q^*)^2. \end{cases}$$

Тогда уравнение $\alpha^2 = \beta^2$ имеет $N = q + q - 1 = 2q - 1$ решений, среди которых ненулевых и с условием $\alpha \neq \beta$: $N = 2q - 1 - 1 - (q - 1) = q - 1$. Уравнение $\alpha^2 = -\beta^2$ имеет также $N = 2q - 1$ решений, среди них $N = 2q - 2$ ненулевых. Таким образом, количество различных ненулевых решений уравнений $\alpha^2 = \pm\beta^2$ с условием $\alpha \neq \beta$ равно $3q - 3$. Так как в F_q^* количество пар (α, β) равно $A_{q-1}^2 = \frac{(q-1)!}{(q-3)!} = q^2 - 3q + 2$, то из $q^2 - 3q + 2 \leq 3q - 3$ следует, что $q \leq 5$. То есть, при $q > 5$ в F_q^* всегда существует пара (α, β) которая не является решением уравнений $\alpha^2 = \pm\beta^2$ и A не является нормальной подгруппой в $C_G(a_0)$.

Если $q = 5$, то $a_0 = \overline{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}$, $b_0 = \overline{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}$, $a_0b_0 = \overline{\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

Но, так как $L_2(5) \cong A_5$ можно считать, что

$$A = V_4 = \{e; (12)(34); (13)(24); (14)(32)\}.$$

Пусть $x \in G - N_G(A)$, $A \cap A^x = u_0$, $u_0 \in V_4$, $u_0 \neq e$. Так как $|C_{A_5}(u_0)| = \frac{60}{15} = 4$, то $A = A^x$ и, следовательно, A является TI -подгруппой в группе G .

- (2) В A есть элемент, соответствующий полуинволюции типа 0. Рассмотрим $GL_2(q)/Z_1$, где $|Z_1|$ чётен.

Пусть $a_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma \notin k^2$, $q \geq 5$, тогда $b_0 \in C_G(a_0)$, где

$$C_G(a_0) = \left\{ e, \overline{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma\beta & \alpha \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \gamma\beta & -\alpha \end{pmatrix}} \mid \alpha, \beta \in F_q, \alpha^2 - \gamma\beta^2 \neq 0 \right\}.$$

Непосредственный подсчёт показывает, что $b_0 = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$,

$$a_0 b_0 = \overline{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}} \text{ (или наоборот).}$$

Пусть $s_1 = \overline{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma\beta & \alpha \end{pmatrix}} \in C_{GL_2(q)/Z_1}(a_0)$, тогда

$$b_0^{s_1} = \frac{1}{\alpha^2 - \gamma\beta^2} \overline{\begin{pmatrix} \alpha^2 + \gamma\beta^2 & 2\alpha\beta \\ -2\alpha\beta\gamma & -\alpha^2 - \gamma\beta^2 \end{pmatrix}}.$$

Например, при $\alpha = 1, \beta = 2$ $b_0^{s_1} \notin A$. То есть $A \not\leq C_G(a_0)$ и, следовательно, A не является TI -подгруппой в группе G .

Лемма доказана.

Лемма 7. *Случай $G \notin X^*$ при $n \geq 3$ невозможен.*

Доказательство.

Обозначим через φ полевой автоморфизм порядка 2, τ – инверсно-транспонирующий автоморфизм. Как показано в лемме 4.27 [5], все автоморфизмы порядка 2 вида $g\varphi$, где g индуцирует внутренне-диагональный автоморфизм, сопряжены в G с полевым автоморфизмом φ порядка 2, а все автоморфизмы порядка 2 вида $g\varphi\tau$ сопряжены с $\varphi\tau$, достаточно рассмотреть следующие варианты:

- (1) $a_0 = \varphi$ полевой автоморфизм порядка 2;
- (2) $a_0 = \varphi\tau$ графово-полевой автоморфизм порядка 2;
- (3) подгруппа A имеет вид $A = \{e; \bar{g}; \bar{g}_1\tau, \overline{g\bar{g}_1\tau}\}$, g и g_1 соответствуют элементам из $GL_n(q)$.

Если $a_0 = \varphi$ полевой автоморфизм порядка 2, тогда из раздела 3А [5] $C_X(a_0)$ содержит компоненту L , изоморфную частному $SL_n(q_0)$, где $q = q_0^2$. Согласно следствию 1, подгруппа A централизует L , что невозможно, так как $C_G(L)$ циклический.

Если $a_0 = \varphi\tau$ графово-полевой автоморфизм порядка 2, тогда по лемме 4.27 из [5] $C_X(a_0)$ содержит компоненту L , изоморфную $SU_n(q_0)$, где $q = q_0^2$, что невозможно, аналогично случаю 1.

Если подгруппа A имеет вид $A = \{e; \bar{g}; \bar{g}_1\tau, \overline{g\bar{g}_1\tau}\}$, g и g_1 соответствуют элементам из $GL_n(q)$. Возможны два случая.

Случай 1. Элемент g соответствует инволюции типа m из $GL_n(q)$ и $q \geq 5$. Можно считать, что $m \geq 2$. Тогда $SL_{n-m}(q) \times SL_m(q) \leq C_{GL_n(q)}(g)$. Элемент

$\bar{g}_1\tau$ централизует компоненту $SL_m(q)$, τ централизует элемент g и, следовательно, g_1 также централизует g . При этом $g_1 = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, где $C \in GL_{n-m}(q)$, $B \in GL_m(q)$. Элемент $B\tau$ централизует компоненту $SL_m(q)$, что невозможно, так как B индуцирует на $SL_m(q)$ внутренне-диагональный автоморфизм, а τ – графовый автоморфизм.

Случай 2. Элемент g соответствует полуинволюции типа 0 из $GL_n(q)$ и $q \geq 5$, $n = 2m$. Тогда g действует на стандартном базисе следующим образом: $g(e_i) = e_{m+i}$, $g(e_{m+i}) = \gamma e_i$, $1 \leq i \leq m$, γ – не квадрат в $GF(q)$, $X = SL_n(q)/Z'$, центральная подгруппа Z' содержит элемент γI . В этом случае $C_G(g)$ содержит компоненту, изоморфную $SL_m(q^2)$, которая централизуется подгруппой A . Но централизатор этой компоненты циклический и, следовательно, этот случай невозможен.

Если $q = 3$, то рассуждения, аналогичные случаю 1, можно применить при $n \geq 6$. Можно считать, что $m \geq 3$, тогда $SL_m(3)$ компонента в централизаторе инволюции g . Остаются случаи $n = 3; 4$.

При $n = 3, m = 2$ элемент $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$C_{GL_3(3)}(g) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A \in GL_2(3) \right\}.$$

Так как элементы $g_1\tau$ и τ централизуют g , то $g_1 \in C_{GL_3(3)}(g)$.

В $C_{GL_3(3)}(g)$ есть подгруппа $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \mid B \in SL_2(3) \right\}$, которая порождается элементами нечётного порядка и, следовательно, лежит в централизаторе элемента $g_1\tau$. Так как $A\tau$ централизует группу $SL_2(3)$, с помощью непосредственных вычислений получаем, что $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ или $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$g_1\tau = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tau$, $(g_1\tau)^2$ инволюция и, следовательно, $g_1\tau \notin A$, так как имеет порядок 4.

В случае $n = 4$ элемент g соответствует инволюции типа m , где $m = 3$ или $m = 2$. При $m = 3$ ситуация аналогична случаю 1. Если $m = 2$, тогда

$$A = \left\{ e; \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}; \overline{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \tau; \overline{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}} \tau \right\}.$$

Возьмём элемент $y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in C_{SL_4(3)}(g_1\tau)$. Тогда

$\bar{g}^y = \overline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \notin A$ и, следовательно, A не TI -подгруппа.

Лемма доказана.

Лемма 8. *Случай $G \notin X^*$ при $n = 2$ невозможен.*

Доказательство.

Пусть X – частное $SL_2(q)$, $a_0 = \varphi$ полевой автоморфизм порядка 2, тогда $q = q_0^2$, $C_{GL_2(q_0^2)}(a_0) \cong GL_2(q_0)$. Если $q_0 \geq 5$, то $SL_2(q_0)$ компонента из централизатора a_0 . Подгруппа A её централизует, что, по лемме 4, невозможно. Следовательно, в этом случае группа не может содержать элементарных абелевых TI -подгрупп порядка 4. Далее будем считать $q_0 = 3$.

- (1) $A = \{e, \bar{g}, \varphi, \bar{g}\varphi\}$, где g инволюция из $PGL_2(9)$. С учётом того, что элемент g в $C_{PGL_2(q)}(\varphi)$ сопряжён либо с $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, либо с $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ для элемента $b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ из $C_G(\varphi)$ имеем $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{\bar{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin A$ и $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\bar{b}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin A$. Следовательно, A не TI -подгруппа.
- (2) $A = \{e, \bar{g}\tau, \varphi, \bar{g}\varphi\tau\}$, $\tau \in C_{\tilde{G}}(\varphi)$ где $\tilde{G} = \text{Aut } GL_2(q_0^2)$. Непосредственные вычисления показывают, что элементу g соответствует 10 смежных классов в $PGL_2(9)$, которые, с учётом сопряжения, разбиваются на 5 классов. В качестве представителей этих классов можно выбрать:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; g_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$g_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; g_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Возьмём элемент $b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ из $C_G(\varphi)$. Для него получаем:

$$(\bar{g}_1\tau)^{\bar{b}} \sim \bar{g}_5\tau \notin A; (\bar{g}_2\tau)^{\bar{b}} = \bar{g}_4\tau \notin A;$$

$$(\bar{g}_3\tau)^{\bar{b}} = -\bar{g}_2\tau \notin A; (\bar{g}_4\tau)^{\bar{b}} = -\bar{g}_3\tau \notin A.$$

Если в качестве элемента g выбран g_5 , то рассмотрим элемент $y \in C_{GL_2(9)}(g_5\tau)$, имеющий вид, $y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & p \end{pmatrix}$, где p корень неприводимого над F_3 многочлена $f(x) = x^2 + 1$. Тогда $\varphi^{\bar{y}} = \begin{pmatrix} 1 & 2p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi \notin A$.

Таким образом, во всех случаях, A не является TI -подгруппой.

Доказательство леммы 8 завершает доказательство теоремы 2. Следствие из теоремы 2 получается с использованием леммы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Aschbacher, *Finite group theory*, Cambridge University Press 2000. ISBN 0-521-78145-0 (hb) - ISBN 0-521-78675-4 (pbk.)
- [2] M. Aschbacher, *On finite groups of component type*, J. Match., 1975, N. 1, P. 87-115. DOI: 10.1215/ijm/1256050927

- [3] H. Bender, *Transitive Gruppen gerader Ordnung in denen jede Involution genau einen Punkt festlaset*, J. Algebra, V.17 P. 527-554. doi.org/10.1016/0021-8693(71)90008-1
- [4] Д. Горенштейн, *Конечные простые группы. Введение в их классификацию* Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 352 с.
- [5] M.E. Harris, *Finite groups containing an intrinsic 2-component of Chevalley type over field of odd order*, Transactions of the American math.soc., 272:1 (1982), 1–65. doi.org/10.2307/1998950
- [6] Y. Hochheim, F. Timmesfeld, *A note on TI -subgroups*, Arch.Math. 1988. V. 51. P. 97-103. doi.org/10.1007/BF01206465
- [7] Р. Лидл, Г. Нидеррайтер, *Конечные поля: В 2-х т., Т.1.* Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 430с.
- [8] А.А. Махнёв, *О плотно вложенных подгруппах с циклическими силовскими 2-подгруппами*, Междунар. алгебр. конф: Тез. докл. Новосибирск, 1989, с. 76.
- [9] А.А. Махнёв, *Теорема редукции для TI -подгрупп*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1991, том 55, выпуск 2, с. 303-317. <https://www.mathnet.ru/rus/im1011>
- [10] M. Suzuki, *Finite groups of even order in which Sylow 2-groups are independent*, Ann. Of Math. 1964. V.80. P. 58-77. doi.org/10.2307/1970491
- [11] R. Solomon, F. Timmesfeld, *A note on tightly embedded subgroups*, Arch.Math. 1979. V. 31. P. 217-223. doi.org/10.1007/BF01226440
- [12] F. Timmesfeld, *On the structure of 2-local subgroups in finite groups*, Arch.Z. 1978. V. 161. P. 119-136. doi.org/10.1007/BF01214924
- [13] Н.Д. Зюляркина, *Циклические TI -подгруппы порядка 4 в классических группах Шевалле нечетной характеристики*, Вопросы алгебры и логики. Труды ИМ СО РАН, (1996), 89–110. www.mathnet.ru/rus/mt392
- [14] Н.Д. Зюляркина, А.А. Махнёв, *Циклические TI -подгруппы порядка 4 в исключительных группах Шевалле*, Труды ИММ УрО РАН, Екатеринбург, 1994, Т.3. с. 41-49. www.mathnet.ru/rus/timm361
- [15] Н.Д. Зюляркина, А.А. Махнёв, *Циклические TI -подгруппы порядка 4 в известных группах*, 3 Междун. конф. по алгебре. Тез. докл. Красноярск, 1993, с. 130.

Наталья Дмитриевна Зюляркина, Татьяна Геннадьевна Ножкина
Южно-Уральский Государственный Университет,
пр. Ленина, 76,
454080, Челябинск, Россия
Email address: toddeath@yandex.ru, nozhkinatg@susu.ru