S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том ??, стр. ?–? (2023) УДК 512.54
MSC 05C25

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ АБЕЛЕВЫ TI-ПОДГРУППЫ ПОРЯДКА 4 В ЛИНЕЙНЫХ ГРУППАХ

Н. Д. Зюляркина, Т. Г. Ножкина

Abstract. We study linear groups for the presence of elementary Abelian TI-subgroups of order 4. It is proved that if $G = F^*(G) \cdot A$, where $F^*(G)$ is a quasi-simple group that is a covering group for $L_n(q)$, where q is odd, A is an elementary Abelian TI-subgroup of order 4. Then $F^*(G) \cong L_2(5)$.

Keywords: finite group, elementary Abelian TI-subgroup, centralizers of involutions and semi-involutions.

1. Введение

Многие задачи теории конечных групп связаны с описанием классов групп, содержащих подгруппы с рядом определённых свойств. В частности, большой интерес представляют так называемые плотно вложенные подгруппы и TI-подгруппы.

Подгруппа H конечной группы G называется плотно вложенной в G, если $|H|$ чётен, а $|H \cap H^g|$ нечётен для любого $g \in G - N_G(H)$.

Подгруппа A группы G называется TI-подгруппой, если $A \cap A^g = 1$ для любого $g \in G - N_G(A)$.

Заметим, что плотно вложенная 2-группа является TI-подгруппой.

Исследование плотно вложенных подгрупп началось с работы М. Судзуки [9], где были описаны группы, в которых силовская 2-подгруппа является TI-подгруппой. Следующий важный результат в этом направлении был получен Н. Бендером, который в [2] описал группы с сильно вложенной подгруппой. М. Ашбахером в [1] изучались плотно вложенные подгруппы корневого типа. При этом остались неисследованными случаи, когда силовская 2-подгруппа этой группы элементарная абелева или содержит единственную инволюцию.

Zyulyarkina, N.D., Nozhkina, T.G.,

Ввиду того, что в известных простых группах, содержащих плотно вложенную подгруппу, эта подгруппа оказывается в большинстве случаев 2-группой, особый интерес представляет изучение групп, содержащих 2-подгруппу, являющуюся TI-подгруппой. Описанию таких групп посвящены многие работы Ф.Тиммесфельда и его соавторов [5], [10], [11].

А.А. Махневым в [7] был изучен случай плотно вложенной подгруппы корневого типа с неэлементарной циклической силовской 2-подгруппой A при условии, что слабое замыкание инволюции из A в силовской 2-подгруппе является абелевой группой. Там же показано, что при изучении плотно вложенных подгрупп с неэлементарной циклической силовской 2-подгруппой можно ограничиться случаем, когда эта подгруппа циклическая порядка 4. Им же в [8] был получен следующий результат для TI-подгрупп:

Теорема 1. *Пусть 2-группа A является TI-подгруппой конечной группы G и $G_0 = \langle A^G \rangle$. Тогда выполнено одно из следующих условий:*

(1) *A является циклической или элементарной абелевой группой.*
(2) *$[A, A^g] = 1$ для любого $g \in G - N(A)$.*
(3) *$\langle A^{G_0} \rangle \cong L_2(2^n), Sz(2^n), U_3(2^n)$ или $SU_3(2^n)$, A является силовской 2-подгруппой в $\langle A^{G_0} \rangle$.*
(4) *A содержит подгруппу A_0 индекса 2, которая инвертируется элементом x из $A - A_0$, $V = \langle A_0^G \rangle$ является абелевой группой и $\overline{G}_0 = G_0/V$ порождается множеством нечётных транспозиций $\bar{x}^G$.*
(5) *$A \cong Q_8 \times E_{2^n}$ или A абелева группа порядка 4, группа $\left\langle \Omega(A)^G \right\rangle$ элементарная, и, для множества D элементов из G сопряжённых с элементами из $A - V$, $\bar{D}$ является множеством корневых инволюций в $\overline{G}_0 = G/V$.*
(6) *$A \cong Z_4 \times Z_4$ и $\langle A^{G_0} \rangle \cong L_3(4)$ или $SL_3(4)$.*
(7) *$A \cong Q_8$ и $\langle A^{G_0} \rangle \cong G_2(2), G_2(3), M_{10}, M_{11}, M_{12}$ или $\langle A^{G_0} \rangle$ является гоморфным образом универсальной группы Шевалле G^* над полем из трёх элементов, и A есть образ $O^{2'}(K)$, где K является фундаментальной подгруппой G^*, представленной длинными корнями; $\langle A^{G_0} \rangle = G^*$, если G^* – ортогональная группа размерности не меньшей, чем 4.*

Из этой теоремы следует, что наименее иссследованы случаи, когда эта подгруппа элементарная абелева или циклическая. В дальнейшем циклический случай исследовался А.А. Махнёвым и Н.Д. Зюляркиной в работах [12], [13], [14]. В частности, в [12] было показано, что циклическая TI-подгруппа нормализует любую компоненту (если таковые имеются).

В данной работе авторы исследуют линейные группы на предмет наличия в них элементарных абелевых TI-подгрупп порядка 4. Основной результат:

Теорема 2. *Пусть $G = F^*(G) \cdot A$, где $F^*(G)$ – квазипростая группа, являющаяся накрывающей группой для $L_n(q)$, где q нечётно, A – элементарная абелева TI-подгруппа порядка 4. Тогда $F^*(G) \cong L_2(5)$.*

2. Предварительные результаты

В дальнейшем будем считать, что $A \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{e, a_0, b_0, a_0b_0\}$ – TI-подгруппа конечной группы G.

Лемма 1. *Пусть x – элемент нечётного порядка из $C_G(a_0)$. Тогда $x \in C_G(A)$.*

Доказательство. Пусть $|x| = 2n+1$. Так как A являетя TI-подгруппой группы G, то $x \in N_G(A)$. Если $x \notin C_G(A)$, то $a_0^x = a_0, b_0^x = a_0b_0, (a_0b_0)^x = b_0$. Тогда

$$b_0 = b_0^{x^{2n+1}} = \left(b_0^{x^{2n}}\right)^x = b_0^x = a_0b_0.$$

Из полученного противоречия, следует, что $x \in C_G(A)$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть A – элементарная абелева TI-подгруппа порядка 4 конечной группы G. Тогда $A \trianglelefteq C_G(a)$ для любого элемента $a \in A, a \neq e$.*

Доказательство. Пусть $x \in C_G(a)$. Тогда для $a \in A$, $a \neq e$, имеем $a = a^x \in A^x \cap A$, следовательно, $A^x = A$ и $A \trianglelefteq C_G(a)$.

Лемма доказана.

Следствие 1. *Если L – компонента из $C_G(a)$, то A централизует L.*

Следующая лемма показывает, что если конечная группа G содержит элементарную абелеву TI-подгруппу A порядка 4, то A нормализует любую компоненту из G, если таковые имеются.

Лемма 3. *Пусть A – элементарная абелева TI-подгруппа порядка 4 конечной группы G, L компонента из G, тогда $A \leq N_G(L)$.*

Доказательство.

Пусть G – контрпример к лемме наименьшего порядка. Очевидно, что тогда $\left\langle L^A \right\rangle = L \cdot L^{a_0} \cdot L^{b_0} \cdot L^{a_0b_0} \leq G$ и $G = \left\langle L^A \right\rangle \cdot A$.

Случай 1. $\left\langle L^A \right\rangle = L \cdot L^{a_0} \cdot L^{b_0} \cdot L^{a_0b_0}$ – центральное произведение четырёх различных компонент. Введём следующие обозначения:

$$L = L_1, \quad L^{a_0} = L_2, \quad L^{b_0} = L_3, \quad L^{a_0b_0} = L_4,$$

$$H_{1,2} = \{ll^{a_0} \,|l \in L_1, l^{a_0} \in L_2\}, \quad H_{3,4} = \left\{l^{b_0}l^{a_0b_0} \,\middle|l^{b_0} \in L_3, l^{a_0b_0} \in L_4\right\}.$$

Для диагонали $H_{1,2} = \{ll^{a_0} \,|l \in L_1, l^{a_0} \in L_2\}$ выполняется равенство $(ll^{a_0})^{a_0} = l^{a_0}l = ll^{a_0}$, поэтому $H_{1,2} \leq C_G(a_0)$ и, следовательно, $H_{1,2} \leq N_G(A)$. Так как $H_{1,2}$ порождается элементами нечётного порядка, то, по лемме 1, $H_{1,2} \leq C_G(A)$. Но, в то же время $H_{1,2}^{b_0} = H_{3,4}$ и, следовательно, $H_{1,2} = H_{3,4}$, что невозможно, так как $H_{1,2}$ и $H_{3,4}$ различны в указанном центральном произведении.

Случай 2.$\left\langle L^A \right\rangle = L \cdot L^a$ – центральное произведение двух различных компонент, $a \in A$, $a \neq e$. Без ограничения общности, можно считать, что $a = a_0$. Введём обозначения: $L = L_1$, $\quad L^{a_0} = L_2$. Как было показано выше, $ll^{a_0} \in C_G(A)$. Заметим, что в этом случае одна из инволюций, содержащихся в A будет нормализовать компоненту L_1, а две другие будут переставлять L_1 и L_2. Обозначим через x инволюцию из A, нормализующую L_1. Если x централизует L_1, то, так как L_1 порождается элементами нечётного порядка, получаем $L_1 \leq C_G(A)$, что невозможно, так как $\left\langle L^A \right\rangle = L \cdot L^a$. Следовательно, x не централизует L_1. Пусть p – простое число, делящее порядок L_1, для которого в L_1 существуют p-элементы, не лежащие в центре L_1. Поскольку L_1 является компонентой, совокупность всех таких p-элементов будет порождать L_1. Так как x не централизует L_1, то существует p-элемент h такой, что $h \notin C_G(x)$. Для него, с одной стороны, $(hh^{a_0})^x = hh^{a_0}$, а с другой, $(hh^{a_0})^x = h^x(h^{a_0})^x$. Отсюда $hh^{a_0} = h^x(h^{a_0})^x$. Так как произведение L_1L_2 центральное, то $\begin{cases} h^x = hz \\ (h^{a_0})^x = z^{-1}h^{a_0}, \end{cases}$ $z \in Z(L_1) \cap Z(L_2)$. Следовательно, z является не единичным p-элементом из центра L_1. В силу выбора p, порядок центра L_1 делится на все простые делители $|L_1|$. Центры квазипростых групп и их порядки полностью описаны в [3] и таких групп нет. Следовательно, случай 2 невозможен и мы получаем $\langle L^A \rangle = L$, $G = L \cdot A$, и $A \leq N_G(L)$.

Лемма доказана.

Лемма 3 показывает, что при исследовании групп, содержащих компоненты, вопрос сводится к изучению групп вида $G = F^*(G) \cdot A$, где $F^*(G)$ – квазипростая группа.

Лемма 4. *Пусть G – группа из формулировки теоремы 2, тогда $A \cap Z(G) = \{e\}$.*

Доказательство. Пусть $A \cap Z(G) = x$ и $x \neq e$, тогда $A \trianglelefteq G$ и, ввиду строения G, $A \leq Z(G)$. Что невозможно, так как $Z(G)$ циклический.

Лемма доказана.

3. Линейные группы

Ввиду того, что классические группы Шевалле можно представить как группы автоморфизмов векторных пространств, нам понадобятся сведения об инволюциях и полуинволюциях в таких группах.

Пусть V векторное пространство размерности n над полем $k = GF(q)$, q нечетно, $\tilde{Y} = GL_n(k)$ и $Y \leq \tilde{Y}$. Обозначим через I_V тождественный автоморфизм пространства V, а через $\gamma I_V \quad (\gamma \in k^*)$ автоморфизм, при котором каждый вектор из V умножается на γ. Неединичные элементы ω из Y, для которых $\omega^2 = \gamma I_V$, называются полуинволюциями. Ясно, что инволюции из Y – это полуинволюции. Полуинволюции, не являющиеся инволюциями, называются истинными.

Как показано в разделе 3А из [4], каждой инволюции $\omega \in Y$ соответствуют два подпространства V_ω^+ и V_ω^- из V:

$$V_\omega^+ = C_V(\omega) = \{v \in V \mid \omega(v) = v\}, V_\omega^- = [V, \omega] = \{v \in V | \omega(v) = -v\}.$$

Тогда имеет место разложение $V = V_\omega^+ \bigoplus V_\omega^-$, и тип инволюции ω определяется как $\dim V_\omega^-$. Для инволюции ω типа m базис в V называется стандартным, если в нем первые $n-m$ векторов выбраны из V_ω^+, а последние m векторов из V_ω^-. Если ω – инволюция типа m, то из раздела 3А [4] $C_{GL_n(q)}(\omega)$ содержит нормальную подгруппу изоморфную

$$\underbrace{SL_{n-m}(q)}_{L_1} \times \underbrace{SL_m(q)}_{L_2}.$$

Если рассматривается группа $H = GL_n(q)/Z_1$, где $|Z_1|$ чётен и $m = \frac{n}{2}$, то полный прообраз $C_H(\overline{\omega})$ в $GL_n(q)$ содержит подгруппу изоморфную

$$(\underbrace{SL_m(q)}_{L_1} \times \underbrace{SL_m(q)}_{L_2}) \cdot \langle \tau \rangle,$$

где τ действует на стандартном базисе следующим образом: $\tau(e_i) = e_{m+i}$, $\tau(e_{m+i}) = e_i$ при $1 \leq i \leq m$.

Пусть теперь $\omega \in Y$ истинная полуинволюция и $\omega^2 = \gamma I_V$. Если $\gamma = \beta^2$ для некоторого элемента β из k, то $\omega = \beta I_V \omega_1$, где ω_1 инволюция из $\tilde{Y}$. Определим в этом случае тип ω как минимум из типов двух инволюций ω_1 и $-I_V\omega_1$. Стандартный базис для ω определяется как стандартный базис той из инволюций ω_1 или $-I_V\omega_1$, тип которой минимален. Если $\gamma \notin (k^*)^2$, то тип для ω считается равным 0. Тогда для централизатора смежного класса, содержащего ω, в некотором частном группы $GL_n(q)$, его полный прообраз в $GL_n(q)$ состоит из блочных матриц вида:

$$\begin{pmatrix} A & \gamma B \\ B & A \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \gamma B & A \\ A & B \end{pmatrix},$$

где A и B квадратные матрицы размерности m, E – единичная матрица той же размерности.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: X – частное группы $SL_n(q)$ по некоторой центральной подгруппе; через X^* обозначим множество таких расширений группы X, что для любой группы $\tilde{X}$ из X^* любой элемент из $\tilde{X} - X$ индуцирует на X внешний внутренне-диагональный автоморфизм. Пусть $g \in GL_n(q)$. Если $g \in Z(GL_n(q)) \cdot SL_n(q)$, то через $\overline{g}$ будем обозначать смежный класс в этом частном, который содержит элемент $gz \in SL_n(q)$, $z \in Z(GL_n(q))$. Если $g \notin Z(GL_n(q)) \cdot SL_n(q)$, то через $\overline{g}$ будем обозначать внешний автоморфизм, индуцируемый элементом g на X.

Разобьём доказательство теоремы 2 на четыре леммы.

Пусть $G = XA$, $X = F^*(G)$ – частное $SL_n(q)$, $n \geq 2$, q нечётно.

Лемма 5. *Случай $G \in X^*$ при $n \geq 3$ невозможен.*

Доказательство.

Допустим, что существует элементарная абелева TI-подгруппа A из G. Классы сопряжённых инволюций в частном $SL_n(q)$ описаны в [4]. Возможны два случая:

(1) a_0 соответствует инволюции u типа m,

(2) a_0 соответствует полуинволюции u типа 0.

Случай 1.

Пусть a_0 соответствует инволюции u типа m, которая действует на стандартном базисе следующим образом: $u(e_i) = e_i$ при $1 \leq i \leq n-m$, $u(e_i) = -e_i$ при $n-m+1 \leq i \leq n$. Если $m \neq \frac{n}{2}$ или частное берётся по центральной подгруппе нечётного порядка, то

$$\underbrace{SL_{n-m}(q)}_{L_1} \times \underbrace{SL_m(q)}_{L_2} \leq C_{GL_n(q)}(u),$$

L_1 и L_2 нормальные подгруппы в централизаторе инволюции a_0. Если $m > 2$ и $n-m > 2$, $q \neq 3$, то L_1 и L_2 компоненты. Так как $A \trianglelefteq C_G(a_0)$, то A централизует L_1 и L_2. Таким образом, $a_0 \in C_{GL_n(q)}(L_1)$ и $a_0 \in C_{GL_n(q)}(L_2)$. Следовательно, a_0 действует на стандартном базисе следующим образом: $a_0(e_i) = \alpha e_i$ при $1 \leq i \leq n-m$, $a_0(e_i) = -\alpha e_i$ при $n-m+1 \leq i \leq n$. Аналогично, так как $b_0 \in C_{GL_n(q)}(L_1)$ и $b_0 \in C_{GL_n(q)}(L_2)$, то b_0 действует на стандартном базисе:

$b_0(e_i) = \gamma e_i$ при $1 \leq i \leq n-m$, $b_0(e_i) = -\gamma e_i$ при $n-m+1 \leq i \leq n$. Тогда $a_0 b_0 \in Z(G)$, что невозможно в силу леммы 4.

Пусть теперь $m = \frac{n}{2}$, $X = SL_n(q)/Z_1$, порядок Z_1 чётен.
По разделу 3A из [4] полный прообраз $C_{GL_n(q)/Z_1}(a_0)$ в $GL_n(q)$ при естественном гомоморфизме содержит подгруппу:

$$(\underbrace{SL_m(q)}_{L_1} \times \underbrace{SL_m(q)}_{L_2}) \cdot \langle \tau \rangle .$$

Если $m > 2$ и $q \neq 3$, то L_1 и L_2 компоненты. Инволюция τ, которая действует на стандартном базисе следующим образом: $\tau(e_i) = e_{m+i}, \quad \tau(e_{m+i}) = e_i$ при $1 \leq i \leq m$, переставляет L_1 и L_2. Подгруппа $A \trianglelefteq C_G(a_0)$ централизует L_1 и L_2. Повторяя рассуждения, аналогичные случаю $m \neq \frac{n}{2}$, также получим, что A подгруппа центра G, что невозможно.

Если $m = 1$ или $n - m = 1$, то данная ситуация разбирается аналогично.

При $m = 2$ и $q = 3$ в централизаторе инволюции содержится нормальная подгруппа, изоморфная $SL_2(3)$. В этом случае, по лемме 1, она централизуется подгруппой A, так как порождается элементами нечётного порядка.

Случай 2. Пусть a_0 соответствует полуинволюции u типа 0 из $GL_n(q)$. Тогда $u^2 = \gamma I_V$ для некоторого $\gamma \in k^* - (k^*)^2$, $n = 2m$. В данном случае $U = \langle Z, u \rangle$ – циклическая и $C_{GL_n(q)}(U) = C_{GL_n(q)}(u) \cong GL_m(q^2)$. Тогда из раздела 3A [4] следует, что существует элемент $x \in GL_n(q)$, действующий на стандартном базисе следующим образом: $x(e_i) = e_{m+i}, \quad x(e_{m+i}) = -e_i$ при $1 \leq i \leq m, \quad det(x) = (-1)^m, \quad |x| = 2, \quad u^x = -u$, такой, что

$$C_{GL_n(q)/Z}(u) = \left(GL_m(q^2)/Z\right) \cdot \langle x \rangle ,$$

где x индуцирует полевой автоморфизм порядка 2 на $GL_m(q^2)/Z$. Тогда в централизаторе инволюции a_0 есть компонента $L \cong SL_m(q^2)$. Подгруппа A централизует L, что невозможно ввиду того, что $Z\left(C_{GL_n(q)/Z}(u)\right)$ – циклический.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $G \in X^*$ и $n = 2$, тогда $q = 5$.*

Доказательство.

(1) Пусть $A = \{e, a_0, b_0, a_0 b_0\}$ является TI-подгруппой группы G и $G \in X^*$, X – частное $SL_2(q)$ по подгруппе Z_1 и все инволюции из A соответчтвуют инволюциям типа 1. Зафиксируем инволюяию $a_0 = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$. Если $|Z_1|$ нечётен (то есть $X = SL_2(q)$), то из [4] $C_G(a_0) = \left\{ e; \overline{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}} \right\}$. Так как инволюция $b_0 \in A$ должна централизовать a_0, то $b_0 = \overline{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$, и $a_0 b_0 = \overline{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \in Z(G)$, что невозможно в силу леммы 4.

Пусть $|Z_1|$ чётен (то есть $X = L_2(q)$). Тогда

$$C_G(a_0) = \left\{ e; \overline{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}}; \overline{\begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}}; \overline{\begin{pmatrix} 0 & \alpha\gamma \\ \beta\gamma & 0 \end{pmatrix}} \right\}.$$

Из строения $C_G(a_0)$ следует, что в качестве инволюции b_0 можно взять инволюцию типа 1 вида $b_0 = \overline{\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \frac{1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix}}$, так как из $\begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ следует $uv = 1$ и $v = \frac{1}{u}$. Тогда $a_0 b_0 = \overline{\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\frac{1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix}}$, $(a_0 b_0)^2 = -E$. Если $(-1) \notin \left(F_q^*\right)^2$, то $a_0 b_0$ – полуинволюция типа 0, что в этом случае невозможно. Пусть $(-1) \in \left(F_q^*\right)^2$, тогда $a_0 b_0$ – инволюция типа 1, $q \equiv 1(4)$ и

$$A = \left\{ e; \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}; \overline{\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \frac{1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix}}; \overline{\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\frac{1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix}} \right\}.$$

Обозначим $s_1 = \overline{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}} \in C_G(a_0)$. Так как $A \trianglelefteq C_G(a_0)$, то $b_0^{s_1} = \overline{\begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda\beta}{\alpha} \\ \frac{\alpha}{\lambda\beta} & 0 \end{pmatrix}} \in A$, отсюда $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha}$ или $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\beta}{\alpha}$. Эти равенства эквивалентны системе уравнений $\alpha^2 = \pm\beta^2$. Рассмотрим количество решений уравнений $\alpha^2 = \pm\beta^2$. Из теоремы 6.26 [6], для невырожденной квадратичной формы f от чётного числа переменных над полем F_q, где q нечётно, число решений уравнения $f(x_1, \dots, x_n) = b$, для любого $b \in F_q$, в F_q^n равно

$$q^{n-1} + v(b) \cdot q^{\frac{n-2}{2}} \cdot \eta\left((-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \Delta\right),$$

где $\Delta = \det(f)$,

$$v(b) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad b \in F_q^* \\ q-1 & \text{при} \quad b = 0, \end{cases} \qquad \eta(c) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad c \notin \left(F_q^*\right)^2 \\ 1 & \text{при} \quad c \in \left(F_q^*\right)^2. \end{cases}$$

Тогда уравнение $\alpha^2 = \beta^2$ имеет $N = q + q - 1 = 2q - 1$ решений, среди которых ненулевых и с условием $\alpha \neq \beta$: $N = 2q - 1 - 1 - (q-1) = q - 1$. Уравнение $\alpha^2 = -\beta^2$ имеет также $N = 2q - 1$ решений, среди них $N = 2q - 2$ ненулевых. Таким образом, количество различных ненулевых решений уравнений $\alpha^2 = \pm\beta^2$ с условием $\alpha \neq \beta$ равно $3q - 3$. Так как в F_q^* количество пар (α, β) равно $A_{q-1}^2 = \frac{(q-1)!}{(q-3)!} = q^2 - 3q + 2$, то из $q^2 - 3q + 2 \leq 3q - 3$ следует, что $q \leq 5$. То есть, при $q > 5$ в F_q^* всегда существует пара (α, β) которая не является решением уравнений $\alpha^2 = \pm\beta^2$ и A не является нормальной подгруппой в $C_G(a_0)$.

Если $q = 5$, то $L_2(5) \cong A_5$. Тогда

$$A = V_4 = \{e;\ (1\,2)(3\,4);\ (1\,3)(2\,4);\ (1\,4)(3\,2)\}.$$

Пусть $x \in G - N_G(A)$, $A \cap A^x = u_0$, $u_0 \in V_4$, $u_0 \neq e$. Так как $|C_{A_5}(u_0)| = \frac{60}{15} = 4$, то $A = A^x$ и, следовательно, A является TI-подгруппой в группе G.

(2) В A есть элемент, соответствующий полуинволюции типа 0. Рассмотрим $GL_2(q)/Z_1$, где $|Z_1|$ чётен.

Пусть $a_0 = \overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}}, \quad \gamma \notin k^2, \quad q \geq 5$, тогда

$$b_0 \in C_G(a_0) = \left\{ e, \quad \overline{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma\beta & \alpha \end{pmatrix}}, \quad \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}, \quad \overline{\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \gamma\beta & -\alpha \end{pmatrix}} \right\},$$

$\alpha, \beta, \gamma \in F_q$.

Непосредственный подсчёт показывает, что $b_0 = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$, $a_0 b_0 = \overline{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}}$ (или наоборот).

Пусть $s_1 = \overline{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma\beta & \alpha \end{pmatrix}} \in C_{GL_2(q)/Z_1}(a_0)$, тогда

$$b_0^{s_1} = \frac{1}{\alpha^2 - \gamma\beta^2} \overline{\begin{pmatrix} \alpha^2 + \gamma\beta^2 & 2\alpha\beta \\ -2\alpha\beta\gamma & -\alpha^2 - \gamma\beta^2 \end{pmatrix}}.$$

Например, при $\alpha = 1, \beta = 2$ $\; b_0^{s_1} \notin A$. То есть $A \ntrianglelefteq C_G(a_0)$ и, следовательно, A не является TI-подгруппой в группе G.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Случай $G \notin X^*$ при $n \geq 3$ невозможен.*

Доказательство.

Обозначим через φ полевой автоморфизм порядка 2, τ – инверсно-транспонирующий автоморфизм. Как показано в лемме 4.27 [4], все автоморфизмы порядка 2 вида $g\varphi$, где g индуцирует внутренне-диагональный автоморфизм, сопряжены в G с полевым автоморфизмом φ порядка 2, а все автоморфизмы порядка 2 вида $g\varphi\tau$ сопряжены с $\varphi\tau$, достаточно рассмотреть следующие варианты:

(1) $a_0 = \varphi$ полевой автоморфизм порядка 2;
(2) $a_0 = \varphi\tau$ графово-полевой автоморфизм порядка 2;
(3) подгруппа A имеет вид $A = \{e; \overline{g}; \overline{g_1}\tau, \overline{gg_1}\tau\}$, g и g_1 соответствуют элементам из $GL_n(q)$.

Если $a_0 = \varphi$ полевой автоморфизм порядка 2, тогда из раздела 3A [4] $C_X(a_0)$ содержит компоненту L, изоморфную частному $SL_n(q_0)$, где $q = q_0^2$. Согласно следствию 1, подгруппа A централизует L, что невозможно, так как $C_G(L)$ циклический.

Если $a_0 = \varphi\tau$ графово-полевой автоморфизм порядка 2, тогда по лемме 4.27 из [4] $C_X(a_0)$ содержит компоненту L, изоморфную $SU_n(q_0)$, где $q = q_0^2$, что невозможно, аналогично случаю 1.

Если подгруппа A имеет вид $A = \{e; \overline{g}; \overline{g_1}\tau, \overline{gg_1}\tau\}$, g и g_1 соответствуют элементам из $GL_n(q)$. Возможны два случая.

Случай 1. Элемент g соответствует инволюции типа m из $GL_n(q)$ и $q \geq 5$. Можно считать, что $m \geq 2$. Тогда $SL_{n-m}(q) \times SL_m(q) \leq C_{GL_n(q)}(g)$ Элемент $\overline{g_1}\tau$ централизует компоненту $SL_m(q)$, τ централизует элемент g и, следовательно, g_1 также централизует g. При этом $g_1 = \begin{pmatrix} A_{n-m} & 0 \\ 0 & B_m \end{pmatrix}$. Элемент $B\tau$ централизует компоненту $SL_m(q)$, что невозможно, так как B индуцирует на $SL_m(q)$ внутренне-диагональный автоморфизм, а τ – графовый автоморфизм.

Случай 2. Элемент g соответствует полуинволюции типа 0 из $GL_n(q)$ и $q \geq 5$, $n = 2m$. Тогда g действует на стандартном базисе следующим образом: $g(e_i) = e_{m+i}$, $g(e_{m+i}) = \gamma e_i, 1 \leq i \leq m$, γ – не квадрат в $GF(q)$, $X = SL_n(q)/Z'$, центральная подгруппа Z' содержит элемент γI. В этом случае $C_G(g)$ содержит компоненту, изоморфную $SL_m(q^2)$, которая централизуется подгруппой A. Но централизатор этой компоненты циклический и, следовательно, этот случай невозможен.

Если $q = 3$, то рассуждения, аналогичные случаю 1, можно применить при $n \geq 6$. Можно считать, что $m \geq 3$, тогда $SL_m(3)$ компонента в централизаторе инволюции g. Остаются случаи $n = 3; 4$.

При $n = 3, m = 2$ элемент $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$C_{GL_3(3)}(g) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \middle| A \in GL_2(3) \right\}.$$

Так как элементы $g_1\tau$ и τ централизуют g, то $g_1 \in C_{GL_3(3)}(g)$.
В $C_{GL_3(3)}(g)$ есть подгруппа $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \middle| B \in SL_2(3) \right\}$, которая порождается элементами нечётного порядка и, следовательно, лежит в централизаторе элемента $g_1\tau$. Так как $A\tau$ централизует группу $SL_2(3)$, с помощью непосредственных вычислений получаем, что $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ или $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $g_1\tau = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\tau$, $(g_1\tau)^2$ инволюция и, следовательно, $g_1\tau \notin A$, так как имеет порядок 4.

В случае $n = 4$ элемент g соответствует инволюции типа m, где $m = 3$ или $m = 2$. При $m = 3$ ситуация аналогична случаю 1. Если $m = 2$, тогда

$$A = \left\{ e; \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}; \overline{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}\tau; \overline{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}\tau \right\}.$$

Возьмём элемент $y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in C_{SL_4(3)}(g_1\tau)$. Тогда $\overline{g}^{\overline{y}} = \overline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \notin A$ и, следовательно, A не TI-подгруппа.

Лемма доказана.

Лемма 8. *Случай $G \notin X^*$ при $n = 2$ невозможен.*

Доказательство.

Пусть X – частное $SL_2(q)$, $a_0 = \varphi$ полевой автоморфизм порядка 2, тогда $q = q_0^2$, $C_{GL_2(q_0^2)}(a_0) \cong GL_2(q_0)$. Если $q_0 \geq 5$, то $SL_2(q_0)$ компонента из централизатора a_0. Подгруппа A её централизует, что, по лемме 4, невозможно. Следовательно, в этом случае группа не может содержать элементарных абелевых TI-подгрупп порядка 4. Далее будем считать $q_0 = 3$.

(1) $A = \{e, \overline{g}, \varphi, \overline{g}\varphi\}$, где g инволюция из $PGL_2(9)$. С учётом того, что элемент g в $C_{PGL_2(q)}(\varphi)$ сопряжён либо с $\overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$, либо с $\overline{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$ для элемента $b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ из $C_G(\varphi)$ имеем $\overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}^{\overline{b}} = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \notin A$ и $\overline{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{\overline{b}} = \overline{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \notin A$. Следовательно, A не TI-подгруппа.

(2) $A = \{e, \overline{g}\tau, \varphi, \overline{g}\varphi\tau\}$, $\tau \in C_{\tilde{G}}(\varphi)$ где $\tilde{G} = Aut\ GL_2\left(q_0^2\right)$. Непосредственные вычисления показывают, что элементу g соответствует 10 смежных классов в $PGL_2(9)$, которые, с учётом сопряжения, разбиваются на 5 классов. В качестве представителей этих классов можно выбрать:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\ g_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$g_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\ g_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Возьмём элемент $b = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ из $C_G(\varphi)$. Для него получаем:

$$\left(\overline{g_1}\tau\right)^{\overline{b}} \sim \overline{g_5}\tau \notin A; \quad \left(\overline{g_2}\tau\right)^{\overline{b}} = \overline{g_4}\tau \notin A;$$
$$\left(\overline{g_3}\tau\right)^{\overline{b}} = -\overline{g_2}\tau \notin A; \quad \left(\overline{g_4}\tau\right)^{\overline{b}} = -\overline{g_3}\tau \notin A.$$

Если в качестве элемента g выбран g_5, то рассмотрим элемент $y \in C_{GL_2(9)}(g_5\tau)$, имеющий вид, $y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & p \end{pmatrix}$, где p корень неприводимого над F_3 многочлена $f(x) = x^2 + 1$. Тогда $\varphi^{\overline{y}} = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 2p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}\varphi \notin A$.

Таким образом, во всех случаях, A не является TI-подгруппой.

Доказательство леммы 8 завершает доказательство теоремы 2.

Список литературы

[1] Aschbacher M. *On finite groups of component type*, J. Match., 1975, N. 1, P. 87-115. DOI: 10.1215/ijm/1256050927

[2] Bender H. *Transitive Gruppen gerader Ordung in denen jede Involution genau einen Punkt festlast*, J. Algebra,V.17 P. 527-554. doi.org/10.1016/0021-8693(71)90008-1

[3] Горенстейн Д, *Конечные простые группы. Введение в их классификацию* Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 352 с.

[4] M.E. Harris, *Finite groups containing an intrinsic 2-component of Chevalley type over field of odd order*, Transactions of the American math.soc., 272:1 (1982), 1–65. doi.org/10.2307/1998950

[5] Hochheim Y. and Timmesfeld F. *A note on TI-subgroups*, Arch.Math. 1988. V. 51. P. 97-103. doi.org/10.1007/BF01206465

[6] Лидл Р., Нидеррайтер Г. *Конечные поля*: В 2-х т., Т.1. Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 430с.

[7] Махнёв А.А. *О плотно вложенных подгруппах с циклическими силовскими 2-подгруппами*, Междунар. алгебр. конф: Тез. докл. Новосибирск, 1989, с. 76.
[8] Makhnev A.A. *A reduction theorem for TI-subgroups*, English transl. in Math.USSR Sb. V.38. P.299 – 311. DOI 10.1070/IM1992v038n02ABEH002200
[9] Suzuki M. *Finite groups of even order in which Sylov 2-groups are independent*, Ann. Of Math. 1964. V.80. P. 58-77. doi.org/10.2307/1970491
[10] Solomon R. and Timmesfeld F. *A note on tightly embedded subgroups*, Arch.Math. 1979. V. 31. P. 217-223. doi.org/10.1007/BF01226440
[11] Timmesfeld F. *On the structure of 2-local subgroups in finite groups*, Arch.Z. 1978. V. 161. P. 119-136. doi.org/10.1007/BF01214924
[12] Н.Д. Зюляркина, *Циклические TI-подгруппы порядка 4 в классических группах Шевалле нечетной характеристики*, Вопросы алгебры и логики. Труды ИМ СО РАН, (1996), 89–110. www.mathnet.ru/rus/mt392
[13] Зюляркина Н.Д., Махнёв А.А. *Циклические TI-подгруппы порядка 4 в исключительных группах Шевалле*, Труды ИММ УрО РАН, Екатеринбург, 1994, Т.3. с. 41-49. www.mathnet.ru/rus/timm361
[14] Зюляркина Н.Д., Махнёв А.А. *Циклические TI-подгруппы порядка 4 в известных группах*, 3 Междун. конф. по алгебре. Тез. докл. Красноярск, 1993, с. 130.

Наталья Дмитриевна Зюляркина, Татьяна Геннадьевна Ножкина
Южно-Уральский Государственный Университет,
пр. Ленина, 76,
454080, Челябинск, Россия
Email address: toddeath@yandex.ru, nozhkinatg@susu.ru