S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 519.214
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 60F05

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН СТАЦИОНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

С.В. ЧЕБОТАРЕВ

Abstract. We consider some properties of limit distributions of sums of random variables of stationary sequences. We obtained conditions for the normality of the limit distribution without using the concepts of weak dependence and mixing.

Keywords: stationary sequences of random variables, limit distributions of sums of stationary sequences, normality of the limit distribution.

1. Введение

Проблема предельного распределения сумм зависимых случайных величин в том числе и стационарных в узком смысле последовательностей обсуждается в литературе начиная с начала прошлого века. Одной из первых работ посвященной этой тематике является работе Бернштейна [1]. Большое внимание решению этой проблемы уделяется в работе Ибрагимова, Линника [2]. Более поздние работы в этой области, такие как [3] - [5] показывают актуальность этой проблемы и в наши дни. В этой статье предпринята попытка пополнить существующие результаты, отказавшись от использования понятия слабой сходимости и понятия перемешивания. Результат базируется на использовании полученных автором результатах из [6],[7] применительно к случаю стационарных в узком смысле последовательностей.

2. Предварительные сведения.

Рассмотрим последовательности центрированных абсолютно непрерывных случайных величин $\xi_{(n)} = (\xi_t)_{t\in I_n}$, где $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. По аналогии с [6],[7]

Chebotarev, S.V., On the limit distribution of sums of random variables of stationary sequences.

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

обозначим через $v_I = v_I(\xi_{(n)})$ начальный смешанный момент m случайных величин $\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_m}$ порядка $|I| = m$:

$$v_I(\xi_{(n)}) = m_{1,\dots,1}(\xi_{t_l}, \dots, \xi_{t_m}) = \mathbf{M}(\xi_{t_l})^1 \cdots (\xi_{t_m})^1.$$

Введем в рассмотрение суммарный смешанный момент порядка m:

$$v_m(\xi_{(n)}) = \sum_{|I|=m} v_I(\xi_{(n)}), \quad \forall m = 1, \dots, n, \text{ причем при } m = 0, \text{ положим } v_0 = 1,$$

а также усредненный смешанный момент порядка m:

$$\ddot{v}_m(\xi_{(n)}) = \frac{v_m(\xi_{(n)})}{\sqrt{C_n^m}}, \quad \forall m = 1, \dots, n.$$

Обозначим также $sv_m(\xi_{(n)}) = \sum\limits_{|I|=m} |v_I(\xi_{(n)})|$ и $s\ddot{v}_m(\xi_{(n)}) = \frac{sv_m(\xi_{(n)})}{\sqrt{C_n^m}}$ $\forall m = 1, \dots, n$.

Для рассматриваемых последовательностей в [7] получено выражение для плотности предельного распределения сумм этих случайных величин. Воспользуемся этими результатами при изучении предельных свойств распределения конечных сумм случайных величин стационарной в узком смысле последовательности $\xi_{(n)} = (\xi_t)_{t \in I_n}$, где $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Обозначим

$$R_n(\xi_{t_l}, k_1, k_2, \dots, k_{m-1}) = \mathbf{M}\xi_{t_l}\xi_{t_2} \cdots \xi_{t_m},$$

где

(1) $\quad I = \{t_1, t_2, \dots, t_m\} \in I_n, a\ t_2 - t_1 = k_1, t_3 - t_2 = k_2, \dots, t_m - t_{m-1} = k_{m-1}.$

Известно, что для стационарных последовательностей эта величина не зависит от ξ_{t_l}, то есть

$$R_n(\xi_{t_l}, k_1, k_2, \dots, k_{m-1}) = R_n(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}) = v_I, \text{ где } I = \{t_1 = 1, t_2, \dots, t_m\}.$$

В нашем случае

$$v_I(\xi_{(n)}) = \int\limits_{x_1}\int\limits_{x_{t_2}} \dots \int\limits_{x_{t_m}} x_1 x_{t_2} \cdots x_{t_m} \boldsymbol{p}(x_1, x_{t_2}, \dots x_{t_m}) dx_1 dx_{t_2} \cdots dx_{t_m}.$$

Положим $k^r = k_1 + \ldots + k_r$. Докажем для стационарной в узком смысле последовательности следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть дана конечная центрированная стационарная в узком смысле последовательность $\xi_{(n)} = (\xi_t)_{t \in I_n}$, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega_{I_n},\ \mathfrak{A}_{I_n}, \mathbf{P}_{\xi_{I_n}})$. Тогда для $2 \leqslant m \leqslant n$ справедливы соотношения*

(2) $$v_m(\xi_{(n)}) = \sum_{k_1=1}^{n-m+1} \dots \sum_{k_i=1}^{n-k^{i-1}-m+i} \dots \sum_{k_{m-1}=1}^{n-k^{m-2}-1} (n - k^{m-1}) R_n(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}).$$

Доказательство. Действительно, при фиксированных значениях $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$ мы имеем ровно $n - k^{m-1}$ наборов переменных, которые определяют коэффициент при $R(k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$ в выражении (2). А именно, набор индексов $\{t_1, t_1 + k_1, t_1 + k_1 + k_2, \dots, t_1 + k_1 + k_2 + \ldots + k_{m-1}\}$ можно сдвигать на единицу от $t_1 = 1$ до $t_1 + k_1 + k_2 + \ldots + k_{m-1} = n$, то есть $n - k^{m-1}$ раз. При этом диапазон для каждой переменной $k_1, k_2, \dots, r_{m-1}$ меняется от единицы до $n-k^{i-1}-1-(m-1-i)=n-k^{i-1}-m+i$ с учетом уже фиксированных значений предыдущих переменных и минимально возможных значений последующих. $\square$

Учитывая, что

$$C_n^m=\frac{n(n-1)....(n-m+1)}{m!} \text{ и } \ddot{v}_m(\xi_{(n)})=\frac{v_m(\xi_{(n)})}{\sqrt{C_n^m}},$$

имеем

(3)

$$\ddot{v}_m(\xi_{(n)})=\sqrt{m!}\frac{\sum\limits_{k_1=1}^{n-m+1}\dots\sum\limits_{k_i=1}^{n-k^{i-1}-m+i}\dots\sum\limits_{k_{m-1}=1}^{n-k^{m-2}-1}(n-k^{m-1})R_n(k_1,k_2,\dots,k_{m-1})}{\sqrt{n(n-1)....(n-m+1)}}$$

Рассмотрим бесконечные стационарные последовательности. Для них, если существуют предельные величины, имеем

$$R(k_1,k_2,\dots,k_{m-1})=\lim_{n\to\infty}R_n(k_1,k_2,\dots,k_{m-1}). \tag{4}$$

и

$$\ddot{v}_m(\xi)=\lim_{n\to\infty}\ddot{v}_m(\xi_{(n)}). \tag{5}$$

В этом случае справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть дана центрированная стационарная в узком смысле последовательность $\xi=(\xi_t)_{t\in I}$, где $I=\{1,2,\dots\}$, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega_I,\ \mathfrak{A}_I,\mathbf{P}_{\xi_I})$ и для этой последовательности существует нетривиальный слабый предел сумм $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$. Тогда $\forall m\geqslant 2$ имеет место следующее соотношение:*

$$\ddot{v}_m(\xi)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{m!}{n^m}}\sum_{k_1=1}^{n-m+1}\dots\sum_{k_i=1}^{n-k^{i-1}-m+i}\dots\sum_{k_{m-1}=1}^{n-k^{m-2}-1}R(k_1,\dots,k_i,\dots,k_{m-1}), \tag{6}$$

где $k^r=k_1+\ldots+k_r$.

Доказательство. Соотношение (6) сразу следует из (3) и (5) с учетом того, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)....(n-m+1)}{n^m}=1 \tag{7}$$

в предположение, что предел (5) существует, что, в свою очередь, следует из условий теоремы. $\square$

Обозначим условное математическое ожидание случайной величины ξ_{t_m} при условити, что $\xi_1=x_1,\xi_{t_2}=x_{t_2},\dots\xi_{t_{m-1}}=x_{t_{m-1}}$, где $(x_1,x_{t_2},\dots x_{t_{m-1}})$ - произвольный вектор в $\mathbb{R}^{m-1}=\mathbb{R}_1\times\mathbb{R}_{t_2}\times\ldots\times\mathbb{R}_{t_{m-1}}$ (в дальнейшем, если набор координат вектора не указан, то мы предполагаем, что данное соотношение справедливо для любого допустимого набора $m-1$ координат из $\mathbb{R}^n$):

$$\mathbf{M}(\xi_{t_m}|\xi_1=x_1,\xi_{t_2}=x_{t_2},\dots\xi_{t_{m-1}}=x_{t_{m-1}})=\int\limits_{x_{t_m}}x_{t_m}\frac{\boldsymbol{p}(x_1,x_{t_2},\dots x_{t_m})}{\boldsymbol{p}(x_1,x_{t_2},\dots x_{t_{m-1}})}dx_{t_m}.$$

И рассмотрим функцию

$$K_n(x_1, x_{t_2}, \dots x_{t_{m-1}}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t_m = t_{m-1}+1}^{n} \mathbf{M}(\xi_{t_m} | \xi_1 = x_1, \xi_{t_2} = x_{t_2}, \dots \xi_{t_{m-1}} = x_{t_{m-1}}).$$

В дальнейшем, в предположении что область значений функции

$$K_n((x_1, x_{t_2}, \dots x_{t_{m-1}})) \in (M^-, M^+), \forall (x_1, x_{t_2}, \dots x_{t_{m-1}}) \in \mathbb{R}^{m-1} \subset \mathbb{R}^n.$$

где

$$M^- = \inf_{(x_1, x_{t_2}, \dots x_{t_{m-1}}) \in \mathbb{R}^{m-1}} \{K_n(x_1, x_{t_2}, \dots x_{t_{m-1}})\},$$

$$M^+ = \sup_{(x_1, x_{t_2}, \dots x_{t_{m-1}}) \in \mathbb{R}^{m-1}} \{K_n(x_1, x_{t_2}, \dots x_{t_{m-1}})\}$$

мы будем пользоваться тем свойством, что существует такое число $K_n^*(1, t_2, \dots, t_{m-1})$ в области значений этой функции, что справедливо

$$\int\limits_{x_1} \int\limits_{x_{t_2}} \dots \int\limits_{x_{t_{m-1}}} x_1, \cdots x_{t_{m-1}} \boldsymbol{p}(x_1, \dots x_{t_{m-1}}) K_n(x_1, \dots x_{t_{m-1}}) dx_1 \cdots dx_{t_{m-1}} =$$

$$= K_n^*(1, t_2, \dots, t_{m-1}) \int\limits_{x_1} \int\limits_{x_{t_2}} \dots \int\limits_{x_{t_{m-1}}} x_1, \cdots x_{t_{m-1}} \boldsymbol{p}(x_1, \dots x_{t_{m-1}}) dx_1 \cdots dx_{t_{m-1}},$$

Это справедливо из того, что существуют и конечны оба интеграла. Первый интеграл – суть слагаемое из $v_m(\xi_{(n)})$, а второй – суть $v_I(\xi_{(n)})$, где $I = \{1, \dots, t_{m-1}\}$. в предположении, что

$$\int\limits_{x_1} \int\limits_{x_{t_2}} \dots \int\limits_{x_{t_{m-1}}} x_1, \cdots x_{t_{m-1}} \boldsymbol{p}(x_1, \dots x_{t_{m-1}}) dx_1 \cdots dx_{t_{m-1}} \neq 0.$$

В противном случае можно положить $K_n^*(1, t_2, \dots, t_{m-1}) = 0$.

3. Основной результат.

Будем рассматривать центрированные стационарные в узком смысле последовательности $\xi = (\xi_t)_{t \in I}$, заданные на вероятностном пространстве $(\Omega_I,\ \mathfrak{A}_I, \mathbf{P}_{\xi_I})$, для которых существует нетривиальный слабый предел сумм $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$. Дополнительно потребуем абсолютную сходимость $\ddot{sv}_m(\xi_{(n)})$, то есть

$$\lim_{n \to \infty} \ddot{sv}_m(\xi_{(n)}) = \ddot{sv}_m(\xi) < \infty.$$

Обозначим класс таких последовательностей через Ξ_0. Тогда имеет место следующий результат:

Теорема 3. *Пусть дана центрированная стационарная в узком смысле последовательность $\xi = (\xi_t)_{t \in I}$, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega_I,\ \mathfrak{A}_I, \mathbf{P}_{\xi_I})$ и для этой последовательности существует нетривиальный слабый предел сумм $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ и $\xi \in \Xi_0$. Для того, чтобы предельное распределение было нормальным необходимо чтобы*

1.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}R(k)=0, \tag{8}$$

2. $\forall m \geqslant 2$ *существовало бы такое число* $M_m < \infty$*, что почти для всех* $(x_1, x_{t_2}, \dots x_{t_{m-1}})$ *выполняется условие*

$$|K_n(x_1, x_{t_2}, \dots x_{t_{m-1}})| \leqslant M_m |\ddot{v}_{m-1}(\xi_{(n-1)})| \text{ при } \ddot{v}_{m-1}(\xi_{(n-1)}) \neq 0. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть выполнены эти условия. Надо показать, что $\ddot{v}_m(\xi) = 0 \quad \forall m \geqslant 2$. Для $m = 2$ это следует из (6) и (8). Рассмотрим случай, когда $m = m_0 > 2$ при условии, что для $m < m_0$ это выполняется. Используя соотношения (3) и (7) будем иметь

$$|\ddot{v}_m(\xi_{(n)})| \sim \left|\sqrt{\frac{m!}{n^m}}\sum_{k_1=1}^{n-m+1}\dots\sum_{k_{m-2}=1}^{n-k^{m-3}-2}\;\sum_{k_{m-1}=1}^{n-k^{m-2}-1}R(k_1,\dots,k_i,\dots,k_{m-1})\right|$$

Возьмем для удобства изложения случай $m_0 = 3$, тогда $\ddot{v}_3(\xi) \sim$

$$\sim \lim_{n\to\infty}\sqrt{\tfrac{3!}{n^3}}\sum_{k_1=1}^{n-2}\sum_{k_2=1}^{n-k_1-1}\int\limits_{x_1}\int\limits_{x_{t_2}}\int\limits_{x_{t_3}} x_1 x_{t_2} x_{t_3}\boldsymbol{p}(x_1,x_{t_2},x_{t_3})dx_{t_3}dx_{t_2}dx_1 =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\tfrac{3!}{n^3}}\sum_{k_1=1}^{n-2}\sum_{k_2=1}^{n-k_1-1}\int\limits_{x_1}\int\limits_{x_{t_2}} x_1 x_{t_2}\boldsymbol{p}(x_1,x_{t_2})\int\limits_{x_{t_3}} x_{t_3}\frac{\boldsymbol{p}(x_1,x_{t_2},x_{t_3})}{\boldsymbol{p}(x_1,x_{t_2})}dx_{t_3}dx_{t_2}dx_1 =$$

$$= \sqrt{3!}\lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n}\sum_{k_1=1}^{n-2}\int\limits_{x_1}\int\limits_{x_{t_2}} x_1 x_{t_2}\boldsymbol{p}(x_1,x_{t_2})\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k_2=1}^{n-k_1-1}\int\limits_{x_{t_3}} x_{t_3}\frac{\boldsymbol{p}(x_1,x_{t_2},x_{t_3})}{\boldsymbol{p}(x_1,x_{t_2})}dx_{t_3}\right)dx_{t_2}dx_1.$$

Рассмотрим произвольное слагаемое

$$\int\limits_{x_1}\int\limits_{x_{t_2}} x_1 x_{t_2}\boldsymbol{p}(x_1,x_{t_2})\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k_2=1}^{n-k_1-1}\int\limits_{x_{t_3}} x_{t_3}\frac{\boldsymbol{p}(x_1,x_{t_2},x_{t_3})}{\boldsymbol{p}(x_1,x_{t_2})}dx_{t_3}\right)dx_{t_2}dx_1 =$$

$$= \int\limits_{x_1}\int\limits_{x_{t_2}} x_1 x_{t_2}\boldsymbol{p}(x_1,x_{t_2})K_n(x_1,x_{t_2})dx_{t_2}dx_1.$$

Имеем, что

$$\int\limits_{x_1}\int\limits_{x_{t_2}} x_1 x_{t_2}\boldsymbol{p}(x_1,x_{t_2})K_n(x_1,x_{t_2})dx_{t_2}dx_1 = K_n^*(1,t_2)\int\limits_{x_1}\int\limits_{x_{t_2}} x_1 x_{t_2}\boldsymbol{p}(x_1,x_{t_2})dx_{t_2}dx_1 =$$

$$= K_n^*(1,t_2)\mathbf{M}\xi_1\xi_{t_2}.$$

Но

$$-M_3|\ddot{v}_2(\xi_{(n-1)})||\mathbf{M}\xi_1\xi_{t_2}| \leqslant K_n^*(1,t_2)\mathbf{M}\xi_1\xi_{t_2} \leqslant M_3|\ddot{v}_2(\xi_{(n-1)})||\mathbf{M}\xi_1\xi_{t_2}|.$$

Откуда, просуммировав все слагаемые по t_2 и умножив все части неравенства на $\frac{\sqrt{3!}}{n}$, получаем

$$-M_3|\ddot{v}_2(\xi_{(n-1)})|\frac{\sqrt{3!}}{n}\sum_{t_2=2}^{n-1}|\mathbf{M}\xi_1\xi_{t_2}| \leqslant \ddot{v}_3(\xi_{(n)}) \leqslant M_3|\ddot{v}_2(\xi_{(n-1)})|\frac{\sqrt{3!}}{n}\sum_{t_2=2}^{n-1}|\mathbf{M}\xi_1\xi_{t_2}|.$$

или

$$|\ddot{v}_3(\xi_{(n)})| \leqslant \sqrt{3!} M_3 \dot{s}\ddot{v}_3(\xi) |\ddot{v}_2(\xi_{(n-1)})|.$$

Откуда

$$|\ddot{v}_3(\xi)| \leqslant \sqrt{3} M_3 \dot{s}\ddot{v}_3(\xi) \lim_{n\to\infty} |\ddot{v}_2(\xi_{(n-1)})| = 0.$$

$\square$

References

[1] S.N. Bernshtein, Extending the limit theorem of the theory of probability on sums of dependent variables, Uspekhi Mat. Nauk, 1944, no. 10, 65–114

[2] I.A. Ibragimov, Yu.V. Linnik Independent and stationary random variables, Nauka, M., 1965.

[3] S.A. Utev On the central limit theorem for φ-mixing arrays of random variables. - Theory Probab. Appl., 1990, v. 35, no. 1, 110 - 117.

[4] A.G. Grin On minimal conditions of the weak dependence in limit theorems for stationary sequences. - Theory Probab. Appl., 2009, v. 54, no. 2, 344-354.

[5] A.G. Grin On a local limit theorem for functions of dependent variables. - Mathematical Structures and Modeling. 2019. 1(49), 22-29.

[6] S. V.Chebotarev. About limit distribution of sums of random variables. - Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2016, 1, 17-29

[7] S. V.Chebotarev. On the limit distribution of sums of real random variables. - Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2017, 10(3), 310-313

Sergey Vsevolodovich Chebotarev
Altay State Pedagogical University,
Molodeznaja st., 55,
656031, Barnaul, Russia
Email address: svcheb@gmail.com