S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 517.956.6
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 35M13,
35R25

НЕКОРРЕКТНАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

К.С. ФАЯЗОВ AND И.О. ХАЖИЕВ

Abstract. This work is devoted to the study of an ill-posed boundary value problem for an inhomogeneous high-order mixed-type equation. An a priori estimate of the solution is obtained depending on the initial data. The uniqueness and conditional stability of the solution are proved.

Keywords: mixed-type equation, ill-posed problem, a priori estimate, uniqueness, stability, set of correctness.

1. Введение. Постановка задачи

Работа посвящена исследованию начально-краевой задачи для неоднородного уравнения смешанного типа высокого порядка.

Пусть $Q_T = \{(x,y,t):\, (x,y) \in \Omega,\, 0 < t < T\}, \Omega = \{(x,y):\, |x| < \pi,\, 0 < y < \pi\}$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Задача. Найти решение $u(x,y,t)$ уравнения

$$\partial_t^n u + sgn(x)\, \partial_x^2 u + \partial_y^{2m} u = f(x,y,t) \tag{1}$$

в области $Q_T \cap \{x \neq 0\}$ и удовлетворяющее следующим условиям:
начальным

$$\partial_t^p u|_{t=0} = \varphi_p(x,y),\ p = 0,1,...,n-1.,\ (x,y) \in \bar{\Omega}, \tag{2}$$

граничным

$$\begin{gathered} u|_{x=-\pi} = u|_{x=\pi} = 0,\ 0 \le y \le \pi,\, 0 \le t \le T, \\ \partial_y^{2q} u\big|_{y=0} = \partial_y^{2q} u\big|_{y=\pi} = 0,\ q = 0,1,...,(m-1),\, -\pi \le x \le \pi,\ 0 \le t \le T, \end{gathered} \tag{3}$$

Fayazov, K.S., Khajiev, I.O., Ill-posed initial-boundary value problem for a high-order mixed-type equation.

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

и условиям склеивания

$$u|_{x=-0} = u|_{x=+0},\ u_x|_{x=-0} = u_x|_{x=+0},\ 0 \le y \le \pi,\ 0 \le t \le T, \tag{4}$$

где $n = 2^s$, $s, m \in N$, $\varphi_p(x, y)$- достаточные гладкие функции и удовлетворяют условиям согласования, $p = 0, 1, ..., n-1.$, $f(x, y, t)$ - функция источника.

Уравнение (1) относиться к классу уравнений смешанного типа и исследуемая задача некорректна в смысле Ж.Адамара.

В данной работе доказывается условная корректность задачи (1)-(4) на множестве корректности.

Исследование условной кооректности краевых задач началось с работ [1-2]. В работах [3-5, 7] исследуется некорректные краевые задачи для уравнений высокого порядка смешанного и составного типа. Заметим, что некорретные задачи для абстрактных дифференциальных уравнений исследовались в работах S. Agmon, L.Nirenberg, F. John, R.J. Knops, L.E. Payne, A.P. Calderon, С.Г. Крейн, H.A.Levine, К.С.Фаязов.

Так как задача (1)-(4) относиться к классу некорректно поставленных задач математической физики возникает необходимость нахождения априорных оценок для решения уравнения (1), благодаря которым нам удается доказать теоремы о единственности и условной устойчивости решения искомой задачи на множестве корректности.

2. Вспомогательные факты

Для решения задачи (1)-(4) нам понадобиться результаты следующей спектральной задачи.

Спектральная задача. Найти такие значения λ при которых задача

$$\begin{gathered} sgnx\, \partial_x^2\omega + \partial_y^{2m}\omega + \lambda\omega = 0,\ (x, y) \in \Omega \cap \{x \ne 0\}, \\ \omega(-\pi, y) = \omega(\pi, y) = 0,\ y \in [0;\, \pi], \\ \partial_y^{2q}\omega\big|_{y=0} = \partial_y^{2q}\omega\big|_{y=\pi} = 0,\ q = 0, 1, ..., (m-1),\ x \in [-\pi;\, \pi], \\ \omega(-0, y) = \omega(+0, y),\ \omega_x(-0, y) = \omega_x(+0, y),\ y \in [0;\, \pi] \end{gathered} \tag{5}$$

имеет нетривиальное решение.

Используя результаты работы [9, 10] можно доказать, что задача (5) имеет $\bar\lambda_{k,j} = \mu_k^+ + (-1)^{m+1} j^{2m}$, $\tilde\lambda_{k,j} = \mu_k^- + (-1)^{m+1} j^{2m}$, $\{\bar\lambda_{k,j}\}_{k,j=1}^{\infty}$, $\left\{\tilde\lambda_{k,j}\right\}_{k,j=1}^{\infty}$ собственные значения и соответствующие им собственные функции $\{\bar\omega_{k,j}\}_{k,j=1}^{\infty}$, $\{\tilde\omega_{k,j}\}_{k,j=1}^{\infty}$, где μ_k^+, $-\mu_k^-$ образуют неубывающие последовательности и являются решениями трансцендентного уравнения $tg\sqrt{\pm\mu_k^\pm}\pi + th\sqrt{\pm\mu_k^\pm}\pi = 0$.

Решения уравнения $tg\sqrt{\pm\mu_k^\pm}\pi + th\sqrt{\pm\mu_k^\pm}\pi = 0$ можно легко найти с помощью метода Ньютона. При $\varepsilon = 10^{-10}$ с погрешностью вычислим $\mu_1^+ \approx 0,56672194089$, $\mu_2^+ \approx 3,06251868904$, $\mu_3^+ \approx 7,56250005484$, $\mu_4^+ \approx 14,06250000014$, $\mu_k^+ \approx \left(k - \frac14\right)^2$, $k > 4$, $\mu_k^- = -\mu_k^+$, $k \in N$. Отметим, что $\mu_k^+ = \left(k - \frac14\right)^2 + O\left(e^{-\left(k+\frac12\right)\pi}\right)$. Отсюда, для любой $k, j \in N$, оценим

$$\begin{gathered} \left|\bar\lambda_{k,j}\right| = \left|\mu_k^+ + (-1)^{m+1} j^{2m}\right| \ge \left|\mu_k^+ - j^{2m}\right| = \left|\left(k - \tfrac14\right)^2 - j^{2m} + O\left(e^{-2\left(k+\frac12\right)\pi}\right)\right| \ge \\ \left|\left(k - \tfrac14\right)^2 - j^{2m}\right| - \left|O\left(e^{-\left(k+\frac12\right)\pi}\right)\right| = \\ \left|k - \tfrac14 - j^m\right|\left(k - \tfrac14 + j^m\right) - \left|O\left(e^{-\left(k+\frac12\right)\pi}\right)\right| \ge \tfrac14\left(2k - \tfrac14\right) - \left|O\left(e^{-\left(k+\frac12\right)\pi}\right)\right| > \tfrac25. \end{gathered}$$

Аналогичном образом, $\left|\tilde{\lambda}_{k,j}\right| > \frac{2}{5}$.

Обозначим $(u,v) = \int\limits_{\Omega} u\,v\,d\Omega$ скалярное произведение и $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$ в $L_2(\Omega)$. Отметим, что из (5) следует, что $\bar{\omega}_{k,j}, \tilde{\omega}_{k,j} \in \overset{\circ}{W}{}_2^{2,2m}(\Omega)$, и их можно представить в виде:

$$\bar{\omega}_{k,j}(x,y) = X_k^+(x)\cdot Y_j(y),$$
$$\tilde{\omega}_{k,j}(x,y) = X_k^-(x)\cdot Y_j(y),$$

и они обладают свойством

$$(\bar{\omega}_{k,j}, \bar{\omega}_{p,q}) = \begin{cases} 1, & k=p \wedge j=q, \\ 0, & k\neq p \vee j\neq q, \end{cases} \quad (\tilde{\omega}_{k,j}, \tilde{\omega}_{p,q}) = \begin{cases} -1, & k=p \wedge j=q, \\ 0, & k\neq p \vee j\neq q, \end{cases}$$

$$(\bar{\omega}_{k,j}, \tilde{\omega}_{p,q}) = 0,\ k,\ j,\ p,\ q\in N,$$

где

$$X_k^+(x) = \begin{cases} \frac{\sin\sqrt{\mu_k^+}(x-\pi)}{\sqrt{\pi}\cos\sqrt{\mu_k^+}\pi}, & 0<x\leqslant\pi, \\ \frac{sh\sqrt{\mu_k^+}(x+\pi)}{\sqrt{\pi}ch\sqrt{\mu_k^+}\pi}, & -\pi\leqslant x<0, \end{cases} \qquad X_k^-(x) = \begin{cases} \frac{sh\sqrt{-\mu_k^-}(x-\pi)}{\sqrt{\pi}ch\sqrt{-\mu_k^-}\pi}, & 0<x\leqslant\pi, \\ \frac{\sin\sqrt{-\mu_k^-}(x+\pi)}{\sqrt{\pi}\cos\sqrt{-\mu_k^-}\pi}, & -\pi\leqslant x<0, \end{cases}$$

$Y_j(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin jy.$

Лемма 1. *(см. [10]) Любая функция $\varphi(x,y) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,2m-1}(\Omega)$ представима в виде ряда*

$$\varphi(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(sgnx\varphi, \bar{\omega}_{k,j})\bar{\omega}_{k,j} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(sgnx\varphi, \tilde{\omega}_{k,j})\tilde{\omega}_{k,j}$$

сходящегося в норме $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,2m-1}(\Omega)$.

Обозначим через $H_0(\Omega)$ замыкание линейны оболочек систем функций $\{\bar{\omega}_{k,j}\}, \{\tilde{\omega}_{k,j}\}$ по нормам $L_2(\Omega)$.

Теорема 1. *(см. [10]) Собственные функции задачи (5) образует базис Рисса в $L_2(\Omega)$ и любая функция*

$$\varphi(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(sgnx\varphi, \bar{\omega}_{k,j})\bar{\omega}_{k,j} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(sgnx\varphi, \tilde{\omega}_{k,j})\tilde{\omega}_{k,j}$$

(определение и свойства базисов Рисса см.[6]).

Согласно [9, 10], имеем

$$\|u(x,y,t)\|_0^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(sgn(x)\,u,\,\bar{\omega}_{k,j}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(sgn(x)u,\,\tilde{\omega}_{k,j}\right)^2. \tag{6}$$

Под обобщенным решением краевой задачи (1) - (4) назовем функцию $u(x,y,t)$, принадлежащую $W_2^{1,2m-1,n}(Q_T)$ и удовлетворяющую тождеству

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_T}\left(sgnx\,u\,\partial_t^n V - u_x V_x - sgnx\,\partial_y^{2m-1}u\,\partial_y V\right)dQ_T = \\ \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+1}\int\limits_{\Omega} sgnx\,\partial_t^{p-1}V\Big|_{t=0}\partial_t^{n-p}u\big|_{t=0}d\Omega - \int\limits_{Q_T} sgnx\,f\,V dQ_T\end{gathered} \tag{7}$$

для любой функции $V(x,y,t) \in W_2^{2,2m,n}(Q_T)$, удовлетворяющей условиям $\partial_t^p V|_{t=T} = 0$, $p = 0,1,...,n-1$, $\partial_y^{2q} V\big|_{y=0} = \partial_y^{2q} V\big|_{y=\pi} = 0$, $q = 0,1,...,(m-1)$, $V|_{x=-\pi} = V|_{x=\pi} = 0$.

Пусть решение задачи (1) - (4) существует и тогда он имеет вид

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \bar{u}_{k,j}(t)\bar{\omega}_{k,j}(x,y) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{u}_{k,j}(t)\tilde{\omega}_{k,j}(x,y)$$

где $\bar{u}_{k,j}(t) = \int\limits_{\Omega} sgnx\, u(x,y,t)\bar{\omega}_{k,j}(x,y)d\Omega$, $\tilde{u}_{k,j}(t) = -\int\limits_{\Omega} sgnx\, u(x,y,t)\tilde{\omega}_{k,j}(x,y)d\Omega$.

Используя выражения $V = \vartheta_{k,j}(t)\bar{\omega}_{k,j}(x,y)$, $V = \vartheta_{k,j}(t)\tilde{\omega}_{k,j}(x,y)$ из равенство (7), условия $\partial_t^p \vartheta_{k,j}(T) = 0$, $p = 0,1,...,n-1.$, $\vartheta_{k,j}(t) \in W_2^n(0,T)$ и обозначения $\bar{\varphi}_{p_{k,j}} = \int\limits_{\Omega} sgnx\, \varphi_p(x,y)\bar{\omega}_{k,j}(x,y)d\Omega$, $\tilde{\varphi}_{p_{k,j}} = -\int\limits_{\Omega} sgnx\, \varphi_p(x,y)\tilde{\omega}_{k,j}(x,y)d\Omega$, $\bar{f}_{k,j}(t) = \int\limits_{\Omega} sgnx\, f(x,y,t)\bar{\omega}_{k,j}(x,y)d\Omega$, $\tilde{f}_{k,j}(t) = -\int\limits_{\Omega} sgnx\, f(x,y,t)\tilde{\omega}_{k,j}(x,y)d\Omega$, $p = 0,1,...,n-1.$, заметим, что функции $\bar{u}_{k,j}(t)$, $\tilde{u}_{k,j}(t)$ при каждом $k \in N$, $j \in N$ являются решением следующих задач, соответственно

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^n}{dt^n}\{\bar{u}_{k,j}\} - \bar{\lambda}_{k,j}\bar{u}_{k,j} = \bar{f}_{k,j}, \\ \frac{d^p}{dt^p}\{\bar{u}_{k,j}\}\big|_{t=0} = \bar{\varphi}_{p_{k,j}},\ p = 0,1,...,n-1., \end{array} \right. \tag{8}$$

и

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^n}{dt^n}\{\tilde{u}_{k,j}\} - \tilde{\lambda}_{k,j}\tilde{u}_{k,j} = \tilde{f}_{k,j}, \\ \frac{d^p}{dt^p}\{\tilde{u}_{k,j}\}\big|_{t=0} = \tilde{\varphi}_{p_{k,j}},\ p = 0,1,...,n-1. \end{array} \right. \tag{9}$$

3. Априорная оценка

Лемма 2. *Для решения уравнения*

$$\frac{d^n v(t)}{dt^n} - b^{\frac{n}{2}} v(t) = g(t),\ n = 2^s,\ s \in N$$

при $b > 0$, b - некоторая константа, $0 < t < T$, справедлива оценка

$$|v(t)|^2 \le 2n\left(n\sum_{k=0}^{n-1} b^{-k}\left|\frac{d^k}{dt^k}v(0)\right|^2 + \alpha^2\right)^{1-\frac{t}{T}} \times \left(n\sum_{k=0}^{n-1} b^{-k}\left|\frac{d^k}{dt^k}v(T)\right|^2 + \alpha^2\right)^{\frac{t}{T}} + n\alpha^2. \tag{10}$$

где $\alpha = b^{\frac{1-n}{2}} \int\limits_0^T |g(t)|dt$.

Доказательство. Доказательство данного неравенство приведем последовательно, начиная с уравнения первого порядка.

1. Пусть $v(t)$ решение уравнения $v_t - av = h(t)$, где a- некоторая константа. Тогда легко заметить, что для функции $v(t)$ справедлива оценка

$$|v(t)| \le (|v(0)| + \alpha_1)^{1-\frac{t}{T}}(|v(T)| + \alpha_1)^{\frac{t}{T}} + \alpha_1, \tag{11}$$

где $\alpha_1 = \int\limits_0^T |h(t)|dt$.

2. При $s=1$ рассмотрим дифференциальное уравнение $v_{tt}-bv=g(t)$. Введем обозначения $\frac{1}{\sqrt{b}}\frac{dv}{dt}=w$, $\rho=v+w$, $\sigma=v-w$. Тогда после некоторых преобразований имеем

$$\begin{aligned}&\rho_t-\sqrt{b}\rho=b^{-1/2}g(t)\\&\rho(0)=v(0)+b^{-1/2}v_t(0)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}&\sigma_t+\sqrt{b}\sigma=-b^{-1/2}g(t)\\&\sigma(0)=v(0)-b^{-1/2}v_t(0)\end{aligned}.$$

Применяя неравенство (11) получим, что для функции $v(t)$ верно неравенство

$$\begin{aligned}|v(t)|^2\le\left(\left|v(0)+b^{-\frac{1}{2}}v_t(0)\right|+\alpha\right)^{2\frac{T-t}{T}}\left(\left|v(T)+b^{-\frac{1}{2}}v_t(T)\right|+\alpha\right)^{2\frac{t}{T}}+\alpha^2+\\ \left(\left|v(0)-b^{-\frac{1}{2}}v_t(0)\right|+\alpha\right)^{2\frac{T-t}{T}}\left(\left|v(T)-b^{-\frac{1}{2}}v_t(T)\right|+\alpha\right)^{2\frac{t}{T}}+\alpha^2.\end{aligned}\tag{12}$$

Используя неравенство $a^2+b^2\ge 2ab$, для решения уравнения $v_{tt}-bv=g(t)$ получаем

$$\begin{aligned}|v(t)|^2\le 4\Big(2\left(|v(0)|^2+|b|^{-1}|v_t(0)|^2\right)+\alpha^2\Big)^{\frac{T-t}{T}}\times\\ \left(2\left(|v(T)|^2+|b|^{-1}|v_t(T)|^2\right)+\alpha^2\right)^{\frac{t}{T}}+2\alpha^2\end{aligned}\tag{13}$$

где $\alpha=|b|^{-1/2}\int\limits_0^T|g(t)|dt$.

3. Теперь рассмотрим уравнение $\frac{d^4v}{dt^4}-b^2v=g(t)$, когда $s=2$. Введем обозначения $\frac{1}{b}\frac{d^2v}{dt^2}=w$, $\rho=v+w$, $\sigma=v-w$, тогда имеем

$$\begin{aligned}&\rho_{tt}-b\rho=b^{-1}g(t)\\&\rho(0)=v(0)+b^{-1}v_{tt}(0),\ \rho_t(0)=v_t(0)+b^{-1}v_{ttt}(0),\end{aligned}\tag{14}$$

и

$$\begin{aligned}&\sigma_{tt}+b\sigma=-b^{-1}g(t)\\&\sigma(0)=v(0)-b^{-1}v_{tt}(0),\ \sigma_t(0)=v_t(0)-b^{-1}v_{ttt}(0).\end{aligned}\tag{15}$$

Очевидно, что для решения задачи (14) согласно (13) верна оценка

$$\begin{aligned}|\rho(t)|^2\le 4\Big(2\left(|\rho(0)|^2+|b|^{-1}|\rho_t(0)|^2\right)+\alpha^2\Big)^{\frac{T-t}{T}}\times\\ \left(2\left(|\rho(T)|^2+|b|^{-1}|\rho_t(T)|^2\right)+\alpha^2\right)^{\frac{t}{T}}+2\alpha^2.\end{aligned}$$

где $\alpha=|b|^{-3/2}\int\limits_0^T|g(t)|dt$.

Уравнение (15) перепишем в виде $\sigma_{tt}-i^2b\sigma=-b^{-1}g(t)$. Тогда из (12)

$$\begin{aligned}|\sigma(t)|^2\le 2\Big(\left|\sigma(0)+ib^{-\frac{1}{2}}\sigma_t(0)\right|^2+\alpha^2\Big)^{\left(1-\frac{t}{T}\right)}\left(\left|\sigma(T)+ib^{-\frac{1}{2}}\sigma_t(T)\right|^2+\alpha^2\right)^{\frac{t}{T}}+\alpha^2+\\ 2\Big(\left|\sigma(0)-ib^{-\frac{1}{2}}\sigma_t(0)\right|^2+\alpha^2\Big)^{\left(1-\frac{t}{T}\right)}\left(\left|\sigma(T)-ib^{-\frac{1}{2}}\sigma_t(T)\right|^2+\alpha^2\right)^{\frac{t}{T}}+\alpha^2\end{aligned}$$

откуда

$$|\sigma(t)|^2 \le 4\Big(2\left(|\sigma(0)|^2 + b^{-1}|\sigma_t(0)|^2\right) + \alpha^2\Big)^{1-\frac{t}{T}} \times \Big(2\left(|\sigma(T)|^2 + b^{-1}|\sigma_t(T)|^2\right) + \alpha^2\Big)^{\frac{t}{T}} + 2\alpha^2.$$

Замечая, что $|v(t)|^2 \le \frac{1}{2}\left(|\rho(t)|^2 + |\sigma(t)|^2\right)$ и учитывая начальные условия задачи (14), (15) можно получить следующую оценку для решения уравнения четвертого порядка

$$|v(t)|^2 \le 8\left(4\sum_{k=0}^{3}|b|^{-k}\left|\frac{d^k}{dt^k}v(0)\right|^2 + \alpha^2\right)^{1-\frac{t}{T}} \times \left(4\sum_{k=0}^{3}|b|^{-k}\left|\frac{d^k}{dt^k}v(T)\right|^2 + \alpha^2\right)^{\frac{t}{T}} + 4\alpha^2.$$

4. Пусть $s = r$, $r \in N$, и рассмотрим уравнение $\frac{d^{2^r}v}{dt^{2^r}} - b^{2^{r-1}}v = g(t)$. Предполагаем, что следующая оценка верна

$$|v(t)|^2 \le 2\cdot 2^r\left(2^r\sum_{k=0}^{2^r-1}|b|^{-k}\left|\frac{d^k v(0)}{dt^k}\right|^2 + \alpha^2\right)^{1-\frac{t}{T}} \times \left(2^r\sum_{k=0}^{2^r-1}|b|^{-k}\left|\frac{d^k v(T)}{dt^k}\right|^2 + \alpha^2\right)^{\frac{t}{T}} + 2^r\alpha^2, \tag{16}$$

где $\alpha = |b|^{\frac{1-2^r}{2}}\int\limits_0^T |g(t)|dt$.

5. Теперь $s = r+1$ и рассмотрим уравнение $\frac{d^{2^{r+1}}v}{dt^{2^{r+1}}} - b^{2^r}v = g(t)$. На основе метода математической индукции докажем, что справедлива оценка

$$|v(t)|^2 \le 2\cdot 2^{r+1}\left(2^{r+1}\sum_{k=0}^{2^{r+1}-1}|b|^{-k}\left|\frac{d^k v(0)}{dt^k}\right|^2 + \alpha^2\right)^{1-\frac{t}{T}} \times \left(2^{r+1}\sum_{k=0}^{2^{r+1}-1}|b|^{-k}\left|\frac{d^k v(T)}{dt^k}\right|^2 + \alpha^2\right)^{\frac{t}{T}} + 2^{r+1}\alpha^2, \tag{17}$$

где $\alpha = |b|^{\frac{1-2^{r+1}}{2}}\int\limits_0^T |g(t)|dt$.

Введем обозначения $\frac{1}{b^{2^{r-1}}}\frac{d^{2^r}v}{dt^{2^r}} = w$, $\rho = v + w$, $\sigma = v - w$, тогда имеем

$$\begin{aligned} &\frac{d^{2^r}\rho}{dt^{2^r}} - b^{2^{r-1}}\rho = b^{-2^{r-1}}g(t),\\ &\frac{d^k\rho}{dt^k}\Big|_{t=0} = \frac{d^k v}{dt^k}\Big|_{t=0} + b^{-2^{r-1}}\frac{d^{2^r+k}v}{dt^{2^r+k}}\Big|_{t=0},\ k = 0, 1, ..., 2^r - 1. \end{aligned} \tag{18}$$

и

$$(19)\qquad \begin{array}{l} \frac{d^{2^r}\sigma}{dt^{2^r}}+b^{2^{r-1}}\sigma=-b^{-2^{r-1}}g(t),\\ \frac{d^k\sigma}{dt^k}\Big|_{t=0}=\frac{d^kv}{dt^k}\Big|_{t=0}-b^{-2^{r-1}}\frac{d^{2^r+k}v}{dt^{2^r+k}}\Big|_{t=0},\ k=0,1,...,2^r-1. \end{array}$$

Применяя (16) для (18) имеем оценку

$$|\rho(t)|^2\le 2\cdot 2^r\left(2^r\sum_{k=0}^{2^r-1}|b|^{-k}\left|\frac{d^k}{dt^k}\rho(0)+b^{-2^{r-1}}\frac{d^{2^r+k}}{dt^{2^r+k}}\rho(0)\right|^2+\alpha^2\right)^{1-\frac{t}{T}}\times$$
$$\left(2^r\sum_{k=0}^{2^r-1}|b|^{-k}\left|\frac{d^k}{dt^k}\rho(T)+b^{-2^{r-1}}\frac{d^{2^r+k}}{dt^{2^r+k}}\rho(T)\right|^2+\alpha^2\right)^{\frac{t}{T}}+2^r\alpha^2\le$$

$$2^{r+1}\left(2^r\sum_{k=0}^{2^r-1}|b|^{-k}\left(\frac{d^k}{dt^k}\rho(0)\right)^2+|b|^{-2^r-k}\left(\frac{d^{2^r+k}}{dt^{2^r+k}}\rho(0)\right)^2+\alpha^2\right)^{1-\frac{t}{T}}\times$$
$$\left(2^r\sum_{k=0}^{2^r-1}|b|^{-k}\left(\frac{d^k}{dt^k}\rho(T)\right)^2+|b|^{-2^r-k}\left(\frac{d^{2^r+k}}{dt^{2^r+k}}\rho(T)\right)^2+\alpha^2\right)^{\frac{t}{T}}+2^r\alpha^2\le$$

$$2^{r+1}\left(2^r\sum_{k=0}^{2^{r+1}-1}|b|^{-k}\left|\frac{d^k}{dt^k}\rho(0)\right|^2+\alpha^2\right)^{1-\frac{t}{T}}\left(2^r\sum_{k=0}^{2^{r+1}-1}|b|^{-k}\left|\frac{d^k}{dt^k}\rho(T)\right|^2+\alpha^2\right)^{\frac{t}{T}}+2^r\alpha^2,$$

где $\alpha=|b|^{\frac{1-2^r}{2}}\int\limits_0^T\left|b^{-2^{r-1}}g(t)\right|dt=|b|^{\frac{1-2^{r+1}}{2}}\int\limits_0^T|g(t)|dt$.

Аналогичным образом для функции $\sigma(t)$ имеем оценку

$$|\sigma(t)|^2\le 2^{r+1}\left(2^r\sum_{k=0}^{2^{r+1}-1}|b|^{-k}\left|\frac{d^k}{dt^k}\sigma(0)\right|^2+\alpha^2\right)^{1-\frac{t}{T}}\times$$
$$\left(2^r\sum_{k=0}^{2^{r+1}-1}|b|^{-k}\left|\frac{d^k}{dt^k}\sigma(T)\right|^2+\alpha^2\right)^{\frac{t}{T}}+2^r\alpha^2.$$

Замечая, что $|v(t)|^2\le\frac{1}{2}\left(|\rho(t)|^2+|\sigma(t)|^2\right)$ и можно получить следующую оценку для решения уравнения 2^{r+1} порядка

$$|v(t)|^2\le 2\cdot 2^{r+1}\left(2^{r+1}\sum_{k=0}^{2^{r+1}-1}|b|^{-k}\left|\frac{d^k}{dt^k}v(0)\right|^2+\alpha^2\right)^{1-\frac{t}{T}}$$
$$\left(2^{r+1}\sum_{k=0}^{2^{r+1}-1}|b|^{-k}\left|\frac{d^k}{dt^k}v(T)\right|^2+\alpha^2\right)^{\frac{t}{T}}+2^{r+1}\alpha^2.$$

Значить $\forall\, n=2^s,\ s\in N,\ s\ge 1$ верна оценка (10). □

Применяя лемму 2 для решения задач (8), (9) имеем соответствующие оценки

$$|\bar{u}_{k,j}(t)|^2 \le 2n\left(n\sum_{r=0}^{n-1}\left|\bar{\lambda}_{k,j}\right|^{-\frac{2r}{n}}\left|\frac{d^k}{dt^k}\bar{u}_{k,j}(0)\right|^2+\bar{\alpha}_{k,j}^2\right)^{1-\frac{t}{T}}\times \left(n\sum_{r=0}^{n-1}\left|\bar{\lambda}_{k,j}\right|^{-\frac{2r}{n}}\left|\frac{d^k}{dt^k}\bar{u}_{k,j}(T)\right|^2+\bar{\alpha}_{k,j}^2\right)^{\frac{t}{T}}+n\bar{\alpha}_{k,j}^2, \tag{20}$$

$$|\tilde{u}_{k,j}(t)|^2 \le 2n\left(n\sum_{r=0}^{n-1}\left|\tilde{\lambda}_{k,j}\right|^{-\frac{2r}{n}}\left|\frac{d^k}{dt^k}\tilde{u}_{k,j}(0)\right|^2+\tilde{\alpha}_{k,j}^2\right)^{1-\frac{t}{T}}\times \left(n\sum_{r=0}^{n-1}\left|\tilde{\lambda}_{k,j}\right|^{-\frac{2r}{n}}\left|\frac{d^k}{dt^k}\tilde{u}_{k,j}(T)\right|^2+\tilde{\alpha}_{k,j}^2\right)^{\frac{t}{T}}+n\tilde{\alpha}_{k,j}^2. \tag{21}$$

На основе (6) имеем

$$\|u(x,y,t)\|_0^2=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\Big(|\bar{u}_{k,j}(t)|^2+|\tilde{u}_{k,j}(t)|^2\Big).$$

Заметим, что для любых k,j справедливы оценки

$$\left(\sqrt[n]{\left|\bar{\lambda}_{k,j}\right|^2}\right)^{-p}<C_1,\ \ \sqrt[n]{\left|\tilde{\lambda}_{k,j}\right|^2}^{\,-p}<C_1,\ \ p=1,...,n-1.,$$

где $C_1=\frac{25}{4}$.

Суммируя неравенства (20) и (21) по k, j и используя неравенство Гельдера, получим

$$\|u\|_0^2 \le 4n\left(nC_1\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{n-1}\left(\left|\bar{\varphi}_{p_{k,j}}\right|^2+\left|\tilde{\varphi}_{p_{k,j}}\right|^2\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\bar{\alpha}_{k,j}^2+\tilde{\alpha}_{k,j}^2\right)\right)^{1-\frac{t}{T}}\times$$
$$\left(nC_1\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{n-1}\left(\left|\frac{d^p}{dt^p}\bar{u}_{k,j}(T)\right|^2+\left|\frac{d^p}{dt^p}\tilde{u}_{k,j}(T)\right|^2\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\bar{\alpha}_{k,j}^2+\tilde{\alpha}_{k,j}^2\right)\right)^{\frac{t}{T}}+$$
$$n\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\bar{\alpha}_{k,j}^2+\tilde{\alpha}_{k,j}^2\right),$$

где $\bar{\alpha}_{k,j} = \left|\bar{\lambda}_{k,j}\right|^{\frac{1-n}{n}} \int\limits_0^T \left|\bar{f}_{k,j}(t)\right| dt,\ \ \tilde{\alpha}_{k,j} = \left|\tilde{\lambda}_{k,j}\right|^{\frac{1-n}{n}} \int\limits_0^T \left|\tilde{f}_{k,j}(t)\right| dt$. Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\bar{\alpha}_{k,j}^2 + \tilde{\alpha}_{k,j}^2\right) \le$$
$$T\int\limits_0^T \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\left|\bar{\lambda}_{k,j}\right|^{\frac{2(1-n)}{n}}\left|\bar{f}_{k,j}(t)\right|^2 + \left|\tilde{\lambda}_{k,j}\right|^{\frac{2(1-n)}{n}}\left|\tilde{f}_{k,j}(t)\right|^2\right) dt \le$$
$$C_2 T\int\limits_0^T \|f(x,y,t)\|_0^2\, dt,$$

где $C_2 = \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{n-1}{n}}$. Тогда

$$\|u(x,y,t)\|_0^2 \le 4n\left(C_1 n\sum_{k=0}^{n-1}\|\varphi_p\|^2 + C_2 T\int\limits_0^T \|f\|_0^2\, dt\right)^{1-\frac{t}{T}} \times$$
$$\left(C_1 n\sum_{p=0}^{n-1}\left\|\frac{d^p}{dt^p}u(x,y,T)\right\|^2 + C_2 T\int\limits_0^T \|f\|_0^2\, dt\right)^{\frac{t}{T}} + C_2 nT\int\limits_0^T \|f\|_0^2\, dt. \tag{22}$$

4. Теоремы о единственности и условной устойчивости

Пусть $M = \left\{u : \sum\limits_{p=0}^{n-1}\left\|\left.\frac{d^p u(x,y,t)}{dt^p}\right|_{t=T}\right\|^2 \le \theta^2\right\}$.

Теорема 2. *Пусть решение задачи (1) - (4) существует и $u(x,y,t) \in M$. Тогда решение задачи (1) - (4) единственно.*

Доказательство. Пусть u_1, u_2 являются решениями задачи (1) - (4) с одинаковыми данными соответственно. Тогда $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет задаче (1) - (4) с однородными начальными данными (2) и условиями (3), (4). Из (22) следует $\|u(x,y,t)\|_0 \le 0 \Rightarrow u(x,y,t) = 0$ или $u_1(x,y,t) \equiv u_2(x,y,t)$ для $\forall (x,y,t) \in \Omega$. □

Введем обозначения: через $u(x,y,t)$ обозначим решение задачи (1) - (4) с точными данными, а через $u_\varepsilon(x,y,t)$ решение задачи (1) - (4) с приближенными данными.

Теорема 3. *Пусть решение задачи (1) - (4) существует и $u(x,y,t)$, $u_\varepsilon(x,y,t) \in M$. Пусть $\|\varphi_p(x,y) - \varphi_{p_\varepsilon}(x,y)\|_0 \le \varepsilon$, $p = 0,1,...,n-1.$, $\|f(x,y,t) - f(x,y,t)\|_0 \le \varepsilon$. Тогда для любого решения задачи (1) - (4) при $(x,y,t) \in Q_T$ имеет место неравенство*

$$\|u(x,y,t) - u_\varepsilon(x,y,t)\|_0^2 \le \delta(\varepsilon,\theta,t),$$

где $\delta(\varepsilon,\theta,t) = 4n\left(\left(C_1 n^2 + C_2 T^2\right)\varepsilon^2\right)^{\frac{T-t}{T}}\left(4C_1 n\theta^2 + C_2 T^2\varepsilon^2\right)^{\frac{t}{T}} + C_2 nT^2\varepsilon^2$.

Доказательство. Пусть решение задачи (1) - (4) существует. Рассмотрим разность $U(x,y,t) = u(x,y,t) - u_\varepsilon(x,y,t)$. Заметим, что $u(x,y,t)$, $u_\varepsilon(x,y,t) \in M$. Функция $U(x,y,t)$ является решением уравнения в области $Q_T \cap \{x \ne 0\}$

$$\partial_t^n U + sgn(x)\partial_x^2 U + \partial_y^{2m} U = f(x,y,t) - f_\varepsilon(x,y,t)$$

с начальными данными

$$\frac{d^p}{dt^p}U(x,y,0)=\varphi_p(x,y)-\varphi_{p_\varepsilon}(x,y),\ p=0,1,...,n-1.,\ (x,y)\in\bar{\Omega},$$

граничными данными

$$\begin{array}{l} U|_{x=-\pi}=U|_{x=\pi}=0,\ 0\le y\le\pi,\ 0\le t\le T,\\ \partial_y^{2q}U\big|_{y=0}=\partial_y^{2q}U\big|_{y=\pi}=0,\ q=0,1,...,(m-1),\ -\pi\le x\le\pi,\ 0\le t\le T, \end{array}$$

а также условиями склеивания

$$U|_{x=-0}=U|_{x=+0},U_x|_{x=-0}=U_x|_{x=+0},\ 0\le y\le\pi,\ 0\le t\le T.$$

Из неравенства (22) следует

$$\|U\|_0^2\le 4n\left(C_1 n\sum_{p=0}^{n-1}\|\varphi_p-\varphi_{p\varepsilon}\|_0^2+C_2T\int\limits_0^T\|f-f_\varepsilon\|_0^2\,dt\right)^{1-\frac{t}{T}}\times$$

$$\left(C_1 n\sum_{p=0}^{n-1}\left\|\frac{d^pU(x,y,t)}{dt^p}\Big|_{t=T}\right\|_0^2+C_2T\int\limits_0^T\|f-f_\varepsilon\|_0^2\,dt\right)^{\frac{t}{T}}+nC_2T\int\limits_0^T\|f-f_\varepsilon\|_0^2\,dt.$$

Оценим каждый множитель правой части отдельно:

$$\sum_{p=0}^{n-1}\|\varphi_p-\varphi_{p\varepsilon}\|_0^2=\|\varphi_1-\varphi_{1\varepsilon}\|_0^2+\|\varphi_2-\varphi_{2\varepsilon}\|_0^2+...+$$
$$\|\varphi_{n-1}-\varphi_{n-1\varepsilon}\|_0^2\le\varepsilon^2+\varepsilon^2+...+\varepsilon^2=n\varepsilon^2,$$

$$\sum_{p=0}^{n-1}\left\|\frac{d^pU(x,y,t)}{dt^p}\Big|_{t=T}\right\|_0^2=\sum_{p=0}^{n-1}\left\|\frac{d^pu}{dt^p}\Big|_{t=T}-\frac{d^pu_\varepsilon}{dt^p}\Big|_{t=T}\right\|_0^2\le$$
$$2\sum_{p=0}^{n-1}\left\|\frac{d^pu}{dt^p}\Big|_{t=T}\right\|_0^2+2\sum_{p=0}^{n-1}\left\|\frac{d^pu_\varepsilon}{dt^p}\Big|_{t=T}\right\|_0^2\le 4\theta^2,$$

$$\int\limits_0^T\|f-f_\varepsilon\|_0^2\,dt\le T\varepsilon^2.$$

После несложных преобразований получим неравенство

$$\|U\|_0^2\le 4n\big(C_1n^2\varepsilon^2+C_2T^2\varepsilon^2\big)^{\frac{T-t}{T}}\big(4C_1n\theta^2+C_2T^2\varepsilon^2\big)^{\frac{t}{T}}+C_2nT^2\varepsilon^2.$$

Что и требовалось доказать. □

References

[1] K. S. Fayazov, *A certain ill-posed Cauchy problem for first-order and second-order differential equations with operator coefficients*, Siberian Math. J., **35**:3 (1994), 631-–635.

[2] K. S. Fayazov, *An ill-posed boundary value problem for a second-order equation of mixed type*, Uzbek Mathematical Journal, No.**2** (1995), 89—93. (in Russian)

[3] K.S. Fayazov, I.O. Khajiev, *Conditional Correctness of the Initial-Boundary Value Problem for a System of High-Order Mixed-Type Equations*, Russian Math. **66** (2022), 53-–63.

[4] K. S. Fayazov, I. O. Khajiev, *Conditional correctness of boundary-value problem for composite fourth-order differential equation*, Russian Math. **59**:4 (2015), 54—62.

[5] K.S. Fayazov, I.O. Khajiev, Z.K. Fayazova, *Ill-posed boundary value problem for operator differential equation of fourth order*, Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences, Volume **1**, Issue 2, (2018), 57–65.

[6] I. Ts. Gokhberg and M. G. Krein, *An Introduction to the Theory of Linear Non-Self-Adjoint Operators in a Hilbert Space*, Nauka, Moscow, 1965. (in Russian)

[7] I.O. Khajiev, *Estimation of the conditional stability of an ill-posed initial-boundary problem for a high-order mixed type equation*, Uzbek Mathematical Journal, Volume **65**, Issue 4 (2021), 48–61.

[8] M. M. Lavrent'ev, L. Ya. Savel'ev, *Operator theory and ill-posed problems* 2nd ed., Institut Matematiki im. S. L. Soboleva, Novosibirsk, 2010.

[9] S.G. Pyatkov, *Properties of eigenfunctions of a spectral problem and their applications*, in: Some Applications of Functional Analysis to Problems of Mathematical Physics, Institute of Mathematics, Novosibirsk, 1986, 65—84 (in Russian).

[10] S.G. Pyatkov, *Properties of eigenfunctions of a spectral problem and their applications*, in: Well-Posed Boundary Value Problems for Nonclassical Equations of Mathematical Physics, Institute of Mathematics, Novosibirsk 1984, 115–130 (in Russian).

Fayazov Kudratillo Sadridinovich
Turin Polytechnic University in Tashkent,
Kichik Khalka Yuli Str. 17,
100195, Tashkent, Uzbekistan
E-mail address: kudratillo52@mail.ru

Ikrombek Ozodovich Khajiev
National University of Uzbekistan, Turin Polytechnic University in Tashkent,
Universitet Str. 4,
100174, Tashkent, Uzbekistan
E-mail address: kh.ikrom04@gmail.com