S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 517.956.6
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 35M13,
35R25

НЕКОРРЕКТНАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

К.С. ФАЯЗОВ AND И.О. ХАЖИЕВ

Abstract. This work is devoted to the study of an ill-posed boundary value problem for an inhomogeneous high-order mixed-type equation. An a priori estimate of the solution is obtained depending on the initial data. The uniqueness and conditional stability of the solution are proved.

Keywords: mixed-type equation, ill-posed problem, a priori estimate, uniqueness, stability, set of correctness.

1. Введение. Постановка задачи

Работа посвящена исследованию начально-краевой задачи для неоднородного уравнения смешанного типа высокого порядка.

Пусть $Q_T = \{(x,y,t) : (x,y) \in \Omega,\ 0 < t < T\}$, $\Omega = \{(x,y) : |x| < l,\ 0 < y < d\}$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Задача. Найти решение $u(x,y,t)$ уравнения

$$\partial_t^n u + sgn(x)\, \partial_x^2 u + \partial_y^{2m} u = f(x,y,t) \tag{1}$$

в области $Q_T \cap \{x \neq 0\}$ и удовлетворяющее следующим условиям:
начальным

$$\partial_t^p u|_{t=0} = \varphi_p(x,y),\ p = 0,1,...,n-1.,\ (x,y) \in \bar{\Omega}, \tag{2}$$

граничным

$$\begin{gathered} u|_{x=-l} = u|_{x=l} = 0,\ 0 \le y \le d,\ 0 \le t \le T, \\ \partial_y^{2q} u\big|_{y=0} = \partial_y^{2q} u\big|_{y=d} = 0,\ q = 0,1,...,(m-1),\ -l \le x \le l,\ 0 \le t \le T, \end{gathered} \tag{3}$$

Fayazov, K.S., Khajiev, I.O., Ill-posed initial-boundary value problem for a high-order mixed-type equation.

© 2023 Фаязов К.С., Хажиев И.О..

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

и условиям склеивания

$$u|_{x=-0} = u|_{x=+0},\ u_x|_{x=-0} = u_x|_{x=+0},\ 0 \le y \le d,\ 0 \le t \le T, \tag{4}$$

где $n = 2^s$, $s, m \in N$, $\varphi_j(x,y)$- достаточные гладкие функции и удовлетворяют условиям согласования, $p = 0, 1, ..., n-1.$, $f(x,y,t)$ - функция источника.

Уравнение (1) относиться к классу уравнений смешанного типа и исследуемая задача некорректна в смысле Ж.Адамара.

В данной работе доказывается условная корректность задачи (1)-(4) на множестве корректности.

Исследование условной коорективности краевых задач началось с работ [1-2]. В работах [3-5] исследуется некорректные краевые задачи для уравнений высокого порядка смешанного и составного типа. Заметим, что некорретные задачи для абстрактных дифференциальных уравнений исследовались в работах S. Agmon, L.Nirenberg, F. John, R.J. Knops, L.E. Payne, A.P. Calderon, С.Г. Крейн, H.A.Levine, К.С.Фаязов.

Так как задача (1)-(4) относиться к классу некорректно поставленных задач математической физики возникает необходимость нахождения априорных оценок для решения уравнения (1), благодаря которым нам удается доказать теоремы о единственности и условной устойчивости решения искомой задачи на множестве корректности.

2. Вспомогательные факты

Для решения задачи (1)-(4) нам понадобиться результаты следующей спектральной задачи.

Спектральная задача. Найти такие значения λ при которых задача

$$\begin{gathered} sgnx\,\partial_x^2\omega + \partial_y^{2m}\omega + \lambda\omega = 0,\ (x,y) \in \Omega \cap \{x \ne 0\}, \\ \omega(-l,y) = \omega(l,y) = 0,\ y \in [0;\,d], \\ \partial_y^{2q}\omega\big|_{y=0} = \partial_y^{2q}\omega\big|_{y=d} = 0,\ q = 0,1,...,(m-1),\ \ x \in [-l;\,l], \\ \omega(-0,y) = \omega(+0,y),\ \omega_x(-0,y) = \omega_x(+0,y),\ y \in [0;\,d] \end{gathered} \tag{5}$$

имеет нетривиальное решение.

Используя результаты работы [6] можно доказать, что задача (5) имеет $\bar\lambda_{k,j} = \mu_k^+ + (-1)^{m+1}\left(\frac{\pi j}{d}\right)^{2m}$, $\tilde\lambda_{k,j} = \mu_k^- + (-1)^{m+1}\left(\frac{\pi j}{d}\right)^{2m}$, $\left\{\bar\lambda_{k,j}\right\}_{k,j=1}^{\infty}$, $\left\{\tilde\lambda_{k,j}\right\}_{k,j=1}^{\infty}$ собственные значения и соответствующие им собственные функции $\{\bar\omega_{k,j}\}_{k,j=1}^{\infty}$, $\{\tilde\omega_{k,j}\}_{k,j=1}^{\infty}$, где μ_k^+, $-\mu_k^-$ образуют неубывающие последовательности и являются решениями трансцендентного уравнения $tg\sqrt{\pm\mu_k^\pm}l + th\sqrt{\pm\mu_k^\pm}l = 0$.

Обозначим $(u,v) = \int\limits_\Omega u\,v\,d\Omega$ скалярное произведение и $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$ в $L_2(\Omega)$. Согласно [6], имеем

$$\|u(x,y,t)\|_0^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(sgn(x)\,u,\,\bar\omega_{k,j}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(sgn(x\,)u,\,\tilde\omega_{k,j}\right)^2. \tag{6}$$

Собственные функции задачи (5) образуют базис Рисса в H_0 и норма в пространстве $L_2(\Omega)$, определенная равенством (6), эквивалентна исходной.

Под обобщенным решением краевой задачи (1) - (4) назовем функцию $u(x,y,t)$, принадлежащую $W_2^{1,2m-1,n}(Q_T)$ и удовлетворяющую тождеству

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_T}\left(sgnx\,u\,\partial_t^n V-u_xV_x-sgnx\,\partial_y^{2m-1}u\,\partial_yV\right)dQ_T=\\ \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+1}\int\limits_{\Omega}sgnx\,\partial_t^{p-1}V\Big|_{t=0}\partial_t^{n-p}u\big|_{t=0}d\Omega-\int\limits_{Q_T}sgnx\,f\,V dQ_T\end{gathered}\tag{7}$$

для любой функции $V(x,y,t)\in W_2^{2,2m,n}(Q_T)$, удовлетворяющей условиям $\partial_t^pV|_{t=T}=0$, $p=0,1,...,n-1$, $\partial_y^{2q}V\big|_{y=0}=\partial_y^{2q}V\big|_{y=d}=0$, $q=0,1,...,(m-1)$, $V|_{x=-l}=V|_{x=l}=0$.

Пусть решение задачи (1) - (4) существует и тогда он имеет вид

$$u(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\bar u_{k,j}(t)\bar\omega_{k,j}(x,y)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\tilde u_{k,j}(t)\tilde\omega_{k,j}(x,y)$$

где $\bar u_{k,j}(t)=\int\limits_{\Omega}sgnx\,u(x,y,t)\bar\omega_{k,j}(x,y)d\Omega$, $\tilde u_{k,j}(t)=-\int\limits_{\Omega}sgnx\,u(x,y,t)\tilde\omega_{k,j}(x,y)d\Omega$.

Используя выражения $V=\vartheta_{k,j}(t)\bar\omega_{k,j}(x,y)$, $V=\vartheta_{k,j}(t)\tilde\omega_{k,j}(x,y)$ из равенство (7), условия $\partial_t^p\vartheta_{k,j}(T)=0$, $p=0,1,...,n-1.$, $\vartheta_{k,j}(t)\in W_2^n(0,T)$ и обозначения $\bar\varphi_{p_{k,j}}=\int\limits_{\Omega}sgnx\,\varphi_p(x,y)\bar\omega_{k,j}(x,y)d\Omega$, $\tilde\varphi_{p_{k,j}}=-\int\limits_{\Omega}sgnx\,\varphi_p(x,y)\tilde\omega_{k,j}(x,y)d\Omega$, $\bar f_{k,j}(t)=\int\limits_{\Omega}sgnx\,f(x,y,t)\bar\omega_{k,j}(x,y)d\Omega$, $\tilde f_{k,j}(t)=-\int\limits_{\Omega}sgnx\,f(x,y,t)\tilde\omega_{k,j}(x,y)d\Omega$, $p=0,1,...,n-1.$, заметим, что функции $\bar u_{k,j}(t)$, $\tilde u_{k,j}(t)$ при каждом $k\in N$, $j\in N$ являются решением следующих задач, соответственно

$$\begin{cases}\frac{d^n}{dt^n}\{\bar u_{k,j}\}-\bar\lambda_{k,j}\bar u_{k,j}=\bar f_{k,j},\\ \frac{d^p}{dt^p}\{\bar u_{k,j}\}\big|_{t=0}=\bar\varphi_{p_{k,j}},\ p=0,1,...,n-1.,\end{cases}\tag{8}$$

и

$$\begin{cases}\frac{d^n}{dt^n}\{\tilde u_{k,j}\}-\tilde\lambda_{k,j}\tilde u_{k,j}=\tilde f_{k,j},\\ \frac{d^p}{dt^p}\{\tilde u_{k,j}\}\big|_{t=0}=\tilde\varphi_{p_{k,j}},\ p=0,1,...,n-1.\end{cases}\tag{9}$$

3. Априорная оценка

Лемма 1. *Для решения уравнения*

$$\frac{d^nv(t)}{dt^n}-b^{\frac n2}v(t)=g(t),\ n=2^s,\ s\in N$$

при $b>0$, b - некоторая константа, $0<t<T$, справедлива оценка

$$\begin{aligned}|v(t)|^2\le 2n\left(n\sum_{k=0}^{n-1}b^{-k}\left|\frac{d^k}{dt^k}v(0)\right|^2+\alpha^2\right)^{1-\frac tT}\times\\ \left(n\sum_{k=0}^{n-1}b^{-k}\left|\frac{d^k}{dt^k}v(T)\right|^2+\alpha^2\right)^{\frac tT}+n\alpha^2.\end{aligned}\tag{10}$$

где $\alpha=b^{\frac{1-n}{2}}\int\limits_0^T|g(t)|dt.$

Доказательство. Доказательство данного неравенство приведем последовательно, начиная с уравнения первого порядка.

1. Пусть $v(t)$ решение уравнения $v_t - av = h(t)$, где a- некоторая константа. Тогда легко заметить, что для функции $v(t)$ справедлива оценка

$$|v(t)| \leq (|v(0)| + \alpha_1)^{1-\frac{t}{T}}(|v(T)| + \alpha_1)^{\frac{t}{T}} + \alpha_1, \tag{11}$$

где $\alpha_1 = \int\limits_0^T |h(t)|dt$.

2. При $s = 1$ рассмотрим дифференциальное уравнение $v_{tt} - bv = g(t)$. Введем обозначения $\frac{1}{\sqrt{b}}\frac{dv}{dt} = w$, $\rho = v + w$, $\sigma = v - w$. Тогда после некоторых преобразований имеем

$$\begin{array}{l} \rho_t - \sqrt{b}\rho = b^{-1/2}g(t) \\ \rho(0) = v(0) + b^{-1/2}v_t(0) \end{array}$$

и

$$\begin{array}{l} \sigma_t + \sqrt{b}\sigma = -b^{-1/2}g(t) \\ \sigma(0) = v(0) - b^{-1/2}v_t(0) \end{array}.$$

Применяя неравенство (11) получим, что для функции $v(t)$ верно неравенство

$$\begin{gathered} |v(t)|^2 \leq \left(\left|v(0) + b^{-\frac{1}{2}}v_t(0)\right| + \alpha\right)^{2\frac{T-t}{T}}\left(\left|v(T) + b^{-\frac{1}{2}}v_t(T)\right| + \alpha\right)^{2\frac{t}{T}} + \alpha^2 + \\ \left(\left|v(0) - b^{-\frac{1}{2}}v_t(0)\right| + \alpha\right)^{2\frac{T-t}{T}}\left(\left|v(T) - b^{-\frac{1}{2}}v_t(T)\right| + \alpha\right)^{2\frac{t}{T}} + \alpha^2. \end{gathered} \tag{12}$$

Используя неравенство $a^2 + b^2 \geq 2ab$, для решения уравнения $v_{tt} - bv = g(t)$ получаем

$$\begin{aligned} |v(t)|^2 \leq 4\Big(2\left(|v(0)|^2 + |b|^{-1}|v_t(0)|^2\right) + \alpha^2\Big)^{\frac{T-t}{T}} \times \\ \Big(2\left(|v(T)|^2 + |b|^{-1}|v_t(T)|^2\right) + \alpha^2\Big)^{\frac{t}{T}} + 2\alpha^2 \end{aligned} \tag{13}$$

где $\alpha = |b|^{-1/2}\int\limits_0^T |g(t)|dt$.

3. Теперь рассмотрим уравнение $\frac{d^4v}{dt^4} - b^2v = g(t)$, когда $s = 2$. Введем обозначения $\frac{1}{b}\frac{d^2v}{dt^2} = w$, $\rho = v + w$, $\sigma = v - w$, тогда имеем

$$\begin{array}{l} \rho_{tt} - b\rho = b^{-1}g(t) \\ \rho(0) = v(0) + b^{-1}v_{tt}(0),\ \rho_t(0) = v_t(0) + b^{-1}v_{ttt}(0), \end{array} \tag{14}$$

и

$$\begin{array}{l} \sigma_{tt} + b\sigma = -b^{-1}g(t) \\ \sigma(0) = v(0) - b^{-1}v_{tt}(0),\ \sigma_t(0) = v_t(0) - b^{-1}v_{ttt}(0). \end{array} \tag{15}$$

Очевидно, что для решения задачи (14) согласно (13) верна оценка

$$\begin{aligned} |\rho(t)|^2 \leq 4\Big(2\left(|\rho(0)|^2 + |b|^{-1}|\rho_t(0)|^2\right) + \alpha^2\Big)^{\frac{T-t}{T}} \times \\ \Big(2\left(|\rho(T)|^2 + |b|^{-1}|\rho_t(T)|^2\right) + \alpha^2\Big)^{\frac{t}{T}} + 2\alpha^2. \end{aligned}$$

где $\alpha = |b|^{-3/2}\int\limits_0^T |g(t)|dt$.

Уравнение (15) перепишем в виде $\sigma_{tt} - i^2 b\sigma = ib^{-1}g(t)$. Тогда из (11)

$$|\sigma(t)|^2 \leq 2\left(\left|\sigma(0) + ib^{-\frac{1}{2}}\sigma_t(0)\right|^2 + \alpha^2\right)^{\left(1-\frac{t}{T}\right)} \left(\left|\sigma(T) + ib^{-\frac{1}{2}}\sigma_t(T)\right|^2 + \alpha^2\right)^{\frac{t}{T}} + \alpha^2 +$$

$$2\left(\left|\sigma(0) - ib^{-\frac{1}{2}}\sigma_t(0)\right|^2 + \alpha^2\right)^{\left(1-\frac{t}{T}\right)} \left(\left|\sigma(T) - ib^{-\frac{1}{2}}\sigma_t(T)\right|^2 + \alpha^2\right)^{\frac{t}{T}} + \alpha^2$$

откуда

$$|\sigma(t)|^2 \leq 4\Big(2\left(|\sigma(0)|^2 + b^{-1}|\sigma_t(0)|^2\right) + \alpha^2\Big)^{1-\frac{t}{T}} \times$$
$$\Big(2\left(|\sigma(T)|^2 + b^{-1}|\sigma_t(T)|^2\right) + \alpha^2\Big)^{\frac{t}{T}} + 2\alpha^2.$$

Замечая, что $|v(t)|^2 \leq \frac{1}{2}\left(|\rho(t)|^2 + |\sigma(t)|^2\right)$ и учитывая начальные условия задачи (14), (15) можно получить следующую оценку для решения уравнения четвертого порядка

$$|v(t)|^2 \leq 8\left(4\sum_{k=0}^{3}|b|^{-k}\left|\frac{d^k}{dt^k}v(0)\right|^2 + \alpha^2\right)^{1-\frac{t}{T}} \times$$
$$\left(4\sum_{k=0}^{3}|b|^{-k}\left|\frac{d^k}{dt^k}v(T)\right|^2 + \alpha^2\right)^{\frac{t}{T}} + 4\alpha^2.$$

4. Пусть $s = r$, $r \in N$, и рассмотрим уравнение $\frac{d^{2^r}v}{dt^{2^r}} - b^{2^{r-1}}v = g(t)$. Предполагаем, что следующая оценка верна

$$|v(t)|^2 \leq 2\cdot 2^r\left(2^r\sum_{k=0}^{2^r-1}|b|^{-k}\left|\frac{d^k v(0)}{dt^k}\right|^2 + \alpha^2\right)^{1-\frac{t}{T}} \times \tag{16}$$
$$\left(2^r\sum_{k=0}^{2^r-1}|b|^{-k}\left|\frac{d^k v(T)}{dt^k}\right|^2 + \alpha^2\right)^{\frac{t}{T}} + 2^r\alpha^2,$$

где $\alpha = |b|^{\frac{1-2^r}{2}}\int\limits_0^T |g(t)|dt$.

5. Теперь $s = r+1$ и рассмотрим уравнение $\frac{d^{2^{r+1}}v}{dt^{2^{r+1}}} - b^{2^r}v = g(t)$. На основе метода математической индукции докажем, что справедлива оценка

$$|v(t)|^2 \leq 2\cdot 2^{r+1}\left(2^{r+1}\sum_{k=0}^{2^{r+1}-1}|b|^{-k}\left|\frac{d^k v(0)}{dt^k}\right|^2 + \alpha^2\right)^{1-\frac{t}{T}} \times \tag{17}$$
$$\left(2^{r+1}\sum_{k=0}^{2^{r+1}-1}|b|^{-k}\left|\frac{d^k v(T)}{dt^k}\right|^2 + \alpha^2\right)^{\frac{t}{T}} + 2^{r+1}\alpha^2,$$

где $\alpha = |b|^{\frac{1-2^{r+1}}{2}}\int\limits_0^T |g(t)|dt$.

Введем обозначения $\frac{1}{b^{2^r-1}}\frac{d^{2^r}v}{dt^{2^r}} = w$, $\rho = v + w$, $\sigma = v - w$, тогда имеем

$$\begin{aligned} &\tfrac{d^{2^r}\rho}{dt^{2^r}} - b^{2^{r-1}}\rho = b^{-2^{r-1}}g(t), \\ &\tfrac{d^k\rho}{dt^k}\Big|_{t=0} = \tfrac{d^k v}{dt^k}\Big|_{t=0} + b^{-2^{r-1}}\tfrac{d^{2^r+k}v}{dt^{2^r+k}}\Big|_{t=0},\ k = 0, 1, ..., 2^r - 1. \end{aligned} \tag{18}$$

и

$$\begin{aligned} &\tfrac{d^{2^r}\sigma}{dt^{2^r}} + b^{2^{r-1}}\sigma = -b^{-2^{r-1}}g(t), \\ &\tfrac{d^k\sigma}{dt^k}\Big|_{t=0} = \tfrac{d^k v}{dt^k}\Big|_{t=0} - b^{-2^{r-1}}\tfrac{d^{2^r+k}v}{dt^{2^r+k}}\Big|_{t=0},\ k = 0, 1, ..., 2^r - 1. \end{aligned} \tag{19}$$

Применяя (16) для (18) имеем оценку

$$|\rho(t)|^2 \le 2\cdot 2^r\left(2^r\sum_{k=0}^{2^r-1}|b|^{-k}\left|\frac{d^k}{dt^k}\rho(0) + b^{-2^{r-1}}\frac{d^{2^r+k}}{dt^{2^r+k}}\rho(0)\right|^2 + \alpha^2\right)^{1-\frac{t}{T}}\times$$
$$\left(2^r\sum_{k=0}^{2^r-1}|b|^{-k}\left|\frac{d^k}{dt^k}\rho(T) + b^{-2^{r-1}}\frac{d^{2^r+k}}{dt^{2^r+k}}\rho(T)\right|^2 + \alpha^2\right)^{\frac{t}{T}} + 2^r\alpha^2 \le$$

$$2^{r+1}\left(2^r\sum_{k=0}^{2^r-1}|b|^{-k}\left(\frac{d^k}{dt^k}\rho(0)\right)^2 + |b|^{-2^r-k}\left(\frac{d^{2^r+k}}{dt^{2^r+k}}\rho(0)\right)^2 + \alpha^2\right)^{1-\frac{t}{T}}\times$$
$$\left(2^r\sum_{k=0}^{2^r-1}|b|^{-k}\left(\frac{d^k}{dt^k}\rho(T)\right)^2 + |b|^{-2^r-k}\left(\frac{d^{2^r+k}}{dt^{2^r+k}}\rho(T)\right)^2 + \alpha^2\right)^{\frac{t}{T}} + 2^r\alpha^2 \le$$

$$2^{r+1}\left(2^r\sum_{k=0}^{2^{r+1}-1}|b|^{-k}\left|\frac{d^k}{dt^k}\rho(0)\right|^2 + \alpha^2\right)^{1-\frac{t}{T}}\left(2^r\sum_{k=0}^{2^{r+1}-1}|b|^{-k}\left|\frac{d^k}{dt^k}\rho(T)\right|^2 + \alpha^2\right)^{\frac{t}{T}} + 2^r\alpha^2,$$

где $\alpha = |b|^{\frac{1-2^r}{2}}\int\limits_0^T\left|b^{-2^{r-1}}g(t)\right|dt = |b|^{\frac{1-2^{r+1}}{2}}\int\limits_0^T|g(t)|dt$.

Аналогичным образом для функции $\sigma(t)$ имеем оценку

$$|\sigma(t)|^2 \le 2^{r+1}\left(2^r\sum_{k=0}^{2^{r+1}-1}|b|^{-k}\left|\frac{d^k}{dt^k}\sigma(0)\right|^2 + \alpha^2\right)^{1-\frac{t}{T}}\times$$
$$\left(2^r\sum_{k=0}^{2^{r+1}-1}|b|^{-k}\left|\frac{d^k}{dt^k}\sigma(T)\right|^2 + \alpha^2\right)^{\frac{t}{T}} + 2^r\alpha^2.$$

Замечая, что $|v(t)|^2 \leq \frac{1}{2}\left(|\rho(t)|^2 + |\sigma(t)|^2\right)$ и можно получить следующую оценку для решения уравнения 2^{r+1} порядка

$$|v(t)|^2 \leq 2 \cdot 2^{r+1}\left(2^{r+1}\sum_{k=0}^{2^{r+1}-1}|b|^{-k}\left|\frac{d^k}{dt^k}v(0)\right|^2 + \alpha^2\right)^{1-\frac{t}{T}}$$
$$\left(2^{r+1}\sum_{k=0}^{2^{r+1}-1}|b|^{-k}\left|\frac{d^k}{dt^k}v(T)\right|^2 + \alpha^2\right)^{\frac{t}{T}} + 2^{r+1}\alpha^2.$$

Значить $\forall\, n = 2^s,\ s \in N,\ s \geq 1$ верна оценка (10). $\square$

Применяя лемму 1 для решения задач (8), (9) имеем соответствующие оценки

$$(20)\quad |\bar{u}_{k,j}(t)|^2 \leq 2n\left(n\sum_{r=0}^{n-1}\left|\bar{\lambda}_{k,j}\right|^{-\frac{2r}{n}}\left|\frac{d^k}{dt^k}\bar{u}_{k,j}(0)\right|^2 + \alpha^2\right)^{1-\frac{t}{T}} \times$$
$$\left(n\sum_{r=0}^{n-1}\left|\bar{\lambda}_{k,j}\right|^{-\frac{2r}{n}}\left|\frac{d^k}{dt^k}\bar{u}_{k,j}(T)\right|^2 + \alpha^2\right)^{\frac{t}{T}} + n\alpha^2,$$

$$(21)\quad |\tilde{u}_{k,j}(t)|^2 \leq 2n\left(n\sum_{r=0}^{n-1}\left|\tilde{\lambda}_{k,j}\right|^{-\frac{2r}{n}}\left|\frac{d^k}{dt^k}\tilde{u}_{k,j}(0)\right|^2 + \alpha^2\right)^{1-\frac{t}{T}} \times$$
$$\left(n\sum_{r=0}^{n-1}\left|\tilde{\lambda}_{k,j}\right|^{-\frac{2r}{n}}\left|\frac{d^k}{dt^k}\tilde{u}_{k,j}(T)\right|^2 + \alpha^2\right)^{\frac{t}{T}} + n\alpha^2.$$

На основе (6) имеем

$$\|u(x,y,t)\|_0^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(|\bar{u}_{k,j}(t)|^2 + |\tilde{u}_{k,j}(t)|^2\right).$$

Заметим, что существуют такие положительные постоянные C_1 и C_2, зависящие от l и d, что для любых k, j справедливы оценки

$$\left(\sqrt[n]{\left|\bar{\lambda}_{k,j}\right|^2}\right)^{-k} < C_1,\ \ \sqrt[n]{\left|\tilde{\lambda}_{k,j}\right|^2}^{-k} < C_2,\ k = 1, ..., n-1.$$

Суммируя неравенства (20) и (21) по k, j и используя неравенство Гельдера, получим

$$\|u\|_0^2 \le 4n\left(nC_3\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{n-1}\left(\left|\bar{\varphi}_{p_{k,j}}\right|^2+\left|\tilde{\varphi}_{p_{k,j}}\right|^2\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\bar{\alpha}_{k,j}^2+\tilde{\alpha}_{k,j}^2\right)\right)^{1-\frac{t}{T}}\times$$
$$\left(nC_3\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{n-1}\left(\left|\frac{d^p}{dt^p}\bar{u}_{k,j}(T)\right|^2+\left|\frac{d^p}{dt^p}\tilde{u}_{k,j}(T)\right|^2\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\bar{\alpha}_{k,j}^2+\tilde{\alpha}_{k,j}^2\right)\right)^{\frac{t}{T}}+$$
$$n\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\bar{\alpha}_{k,j}^2+\tilde{\alpha}_{k,j}^2\right),$$

где $C_3 = \max\left\{1, \left|\bar{\lambda}_{k,j}\right|^{-1}, ..., \left|\bar{\lambda}_{k,j}\right|^{-(n-1)}, \left|\tilde{\lambda}_{k,j}\right|^{-1}, ..., \left|\tilde{\lambda}_{k,j}\right|^{-(n-1)}\right\}$, $\forall k,j \in N.$, $\bar{\alpha}_{k,j} = \left|\bar{\lambda}_{k,j}\right|^{\frac{1-2^n}{2}}\int\limits_0^T\left|\bar{f}_{k,j}(t)\right|dt$, $\tilde{\alpha}_{k,j} = \left|\tilde{\lambda}_{k,j}\right|^{\frac{1-2^n}{2}}\int\limits_0^T\left|\tilde{f}_{k,j}(t)\right|dt$. Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\bar{\alpha}_{k,j}^2+\tilde{\alpha}_{k,j}^2\right)\le$$
$$T\int\limits_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\left|\bar{\lambda}_{k,j}\right|^{1-2^n}\left|\bar{f}_{k,j}(t)\right|^2+\left|\tilde{\lambda}_{k,j}\right|^{1-2^n}\left|\tilde{f}_{k,j}(t)\right|^2\right)dt\le$$
$$C_4T\int\limits_0^T\|f(x,y,t)\|_0^2\,dt,$$

где $C_4 = \max\left\{\left|\bar{\lambda}_{k,j}\right|^{1-2^n}, \left|\tilde{\lambda}_{k,j}\right|^{1-2^n}\right\}$. Тогда

$$\|u(x,y,t)\|_0^2 \le 4n\left(C_3n\sum_{k=0}^{n-1}\|\varphi_p\|^2+C_4T\int\limits_0^T\|f\|_0^2\,dt\right)^{1-\frac{t}{T}}\times$$
$$\left(C_3n\sum_{p=0}^{n-1}\left\|\frac{d^p}{dt^p}u(x,y,T)\right\|^2+C_4T\int\limits_0^T\|f\|_0^2\,dt\right)^{\frac{t}{T}}+C_4nT\int\limits_0^T\|f\|_0^2\,dt. \tag{22}$$

4. Теоремы о единственности и условной устойчивости

Пусть $M = \left\{u : \sum\limits_{p=0}^{n-1}\left\|\frac{d^pu(x,y,t)}{dt^p}\Big|_{t=T}\right\|^2 \le \theta^2\right\}$.

Теорема 1. *Пусть решение задачи (1) - (4) существует и $u(x,y,t) \in M$. Тогда решение задачи (1) - (4) единственно.*

Доказательство. Пусть u_1, u_2 являются решениями задачи (1) - (4) с одинаковыми данными соответственно. Тогда $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет задаче (1) - (4)

с однородными начальными данными (2) и условиями (3), (4). Из (22) следует $\|u(x,y,t)\|_0 \le 0 \Rightarrow u(x,y,t)=0$ или $u_1(x,y,t) \equiv u_2(x,y,t)$ для $\forall (x,y,t) \in \Omega$. $\square$

Введем обозначения: через $u(x,y,t)$ обозначим решение задачи (1) - (4) с точными данными, а через $u_\varepsilon(x,y,t)$ решение задачи (1) - (4) с приближенными данными.

Теорема 2. *Пусть решение задачи (1) - (4) существует и* $u(x,y,t)$, $u_\varepsilon(x,y,t) \in M$. *Пусть* $\|\varphi_p(x,y)-\varphi_{p_\varepsilon}(x,y)\|_0 \le \varepsilon$, $p=0,1,...,n-1.$, $\|f(x,y,t)-f(x,y,t)\|_0 \le \varepsilon$. *Тогда для любого решения задачи (1) - (4) при* $(x,y,t) \in Q_T$ *имеет место неравенство*

$$\|u(x,y,t)-u_\varepsilon(x,y,t)\|_0 \le \delta(\varepsilon,\theta,t),$$

где $\delta(\varepsilon,\theta,t) = 4n\left(\left(C_3n^2+C_4T^2\right)\varepsilon^2\right)^{\frac{T-t}{T}}\left(4C_3n\theta^2+C_4T^2\varepsilon^2\right)^{\frac{t}{T}}+C_4nT^2\varepsilon^2$.

Доказательство. Пусть решение задачи (1) - (4) существует. Рассмотрим разность $U(x,y,t)=u(x,y,t)-u_\varepsilon(x,y,t)$. Заметим, что $u(x,y,t)$, $u_\varepsilon(x,y,t) \in M$. Функция $U(x,y,t)$ является решением уравнения в области $Q_T \cap \{x \neq 0\}$

$$\partial_t^n U + sgn(x)\partial_x^2 U + \partial_y^{2m} U = f(x,y,t) - f_\varepsilon(x,y,t)$$

с начальными данными

$$\frac{d^p}{dt^p}U(x,y,0) = \varphi_p(x,y)-\varphi_{p_\varepsilon}(x,y),\ p=0,1,...,n-1.,\ (x,y)\in\bar{\Omega},$$

граничными данными

$$\begin{aligned} &U\big|_{x=-l} = U\big|_{x=l} = 0,\ 0\le y\le d,\ 0\le t\le T,\\ &\partial_y^{2q}U\big|_{y=0} = \partial_y^{2q}U\big|_{y=d} = 0,\ q=0,1,...,(m-1),\ -l\le x\le l,\ 0\le t\le T, \end{aligned}$$

а также условиями склеивания

$$U\big|_{x=-0} = U\big|_{x=+0},\ U_x\big|_{x=-0} = U_x\big|_{x=+0},\ 0\le y\le d,\ 0\le t\le T.$$

Из неравенства (22) следует

$$\|U\|_0^2 \le 4n\left(C_3n\sum_{p=0}^{n-1}\|\varphi_p-\varphi_{p\varepsilon}\|_0^2 + C_4T\int_0^T\|f-f_\varepsilon\|_0^2\,dt\right)^{1-\frac{t}{T}} \times$$

$$\left(C_3n\sum_{p=0}^{n-1}\left\|\frac{d^pU(x,y,t)}{dt^p}\bigg|_{t=T}\right\|_0^2 + C_4T\int_0^T\|f-f_\varepsilon\|_0^2\,dt\right)^{\frac{t}{T}} + nC_4T\int_0^T\|f-f_\varepsilon\|_0^2\,dt.$$

Оценим каждый множитель правой части отдельно:

$$\sum_{p=0}^{n-1}\|\varphi_p-\varphi_{p\varepsilon}\|_0^2 = \|\varphi_1-\varphi_{1\varepsilon}\|_0^2+\|\varphi_2-\varphi_{2\varepsilon}\|_0^2+...+$$
$$\|\varphi_{n-1}-\varphi_{n-1\varepsilon}\|_0^2 \le \varepsilon^2+\varepsilon^2+...+\varepsilon^2 = n\varepsilon^2,$$

$$\sum_{p=0}^{n-1}\left\|\frac{d^pU(x,y,t)}{dt^p}\bigg|_{t=T}\right\|_0^2 = \sum_{p=0}^{n-1}\left\|\frac{d^pu}{dt^p}\bigg|_{t=T} - \frac{d^pu_\varepsilon}{dt^p}\bigg|_{t=T}\right\|_0^2 \le$$
$$2\sum_{p=0}^{n-1}\left\|\frac{d^pu}{dt^p}\bigg|_{t=T}\right\|_0^2 + 2\sum_{p=0}^{n-1}\left\|\frac{d^pu_\varepsilon}{dt^p}\bigg|_{t=T}\right\|_0^2 \le 4\theta^2,$$

$$\int\limits_0^T \|f - f_\varepsilon\|_0^2 \, dt \le T\varepsilon^2.$$

После несложных преобразований получим неравенство

$$\|U\|_0^2 \le 4n\big(C_3 n^2\varepsilon^2 + C_4 T^2\varepsilon^2\big)^{\frac{T-t}{T}} \big(4C_3 n\theta^2 + C_4 T^2\varepsilon^2\big)^{\frac{t}{T}} + C_4 n T^2 \varepsilon^2.$$

Что и требовалось доказать. $\square$

References

[1] K. S. Fayazov, *A certain ill-posed Cauchy problem for first-order and second-order differential equations with operator coefficients*, Siberian Math. J., **35**:3 (1994), 631-–635.

[2] K. S. Fayazov, *An ill-posed boundary value problem for a second-order equation of mixed type*, Uzbek Mathematical Journal, No.**2** (1995), 89—93. (Russian)

[3] K.S. Fayazov, I.O. Khajiev, *Conditional Correctness of the Initial-Boundary Value Problem for a System of High-Order Mixed-Type Equations*, Russian Math. **66** (2022), 53-–63.

[4] K. S. Fayazov, I. O. Khajiev, *Conditional correctness of boundary-value problem for composite fourth-order differential equation*, Russian Math. **59**:4 (2015), 54—62.

[5] K.S. Fayazov, I.O. Khajiev, Z.K. Fayazova, *Ill-posed boundary value problem for operator differential equation of fourth order*, Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences, Volume **1**, Issue 2, (2018), 57–65.

[6] I.O. Khajiev, *Estimation of the conditional stability of an ill-posed initial-boundary problem for a high-order mixed type equation*, Uzbek Mathematical Journal, Volume **65**, Issue 4 (2021), 48–61.

[7] S.G. Pyatkov, *Properties of Eigen functions of a certain spectral problem and their applications*, Some Applications of Functional Analysis to Equations of Mathematical Physics, Inst. Mat., Novosibirsk, 1986, 65—84.

[8] M. M. Lavrent'ev, L. Ya. Savel'ev, *Operator theory and ill-posed problems* 2nd ed., Institut Matematiki im. S. L. Soboleva, Novosibirsk, 2010.

Fayazov Kudratillo Sadridinovich
Turin Polytechnic University in Tashkent,
Kichik Khalka Yuli Str. 17,
100195, Tashkent, Uzbekistan
E-mail address: `kudratillo52@mail.ru`

Ikrombek Ozodovich Khajiev
National University of Uzbekistan, Turin Polytechnic University in Tashkent,
Universitet Str. 4,
100174, Tashkent, Uzbekistan
E-mail address: `kh.ikrom04@gmail.com`