

РЕЦЕНЗИЯ

на представленную для публикации в журнал «Сибирские электронные математические известия» статью М. В. Урева, Х. Х. Имомназарова, И. К. Искандарова и С. Б. Куйлиева «Краевая задача для одной переопределённой системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике»

Статья посвящена изучению однозначной разрешимости неоднородной краевой задачи для линеаризованной стационарной системы уравнений двухскоростной гидродинамики, предложенной в [1]. У меня есть много вопросов к предложенной работе, начиная с механической обоснованности исследуемой модели и заканчивая правильностью полученных результатов.

Для удобства приведу постановку задачи. Пусть $\Omega = \mathbb{R}_+^2$ — верхняя полуплоскость в \mathbb{R}^2 и S — её граница, т.е. горизонтальная координатная ось. Требуется определить в Ω поля скоростей \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 , а также поле давления p , удовлетворяющие следующей системе:

$$\nu_1 \Delta \mathbf{u}_1 - \nabla p = -\rho \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \mathbf{u}_1|_S = \mathbf{a}_1, \quad (1)$$

$$\nu_2 \Delta \mathbf{u}_2 - \nabla p = -\rho \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \mathbf{u}_2|_S = \mathbf{a}_2, \quad (2)$$

где $\rho = \rho_1 + \rho_2$, ρ_1 , ρ_2 , ν_1 и ν_2 — положительные постоянные, \mathbf{f} , \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 — заданные функции. Эта система дополняется условием, что \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 ограничены при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, что является обычным для внешней двумерной задачи Стокса. Задача является переопределённой, так как одно и то же давление p фигурирует и в (1), и в (2).

Мне кажется, что данная модель сомнительна с механической точки зрения. Например, она предполагает, что в любом объёме не изменяется количество каждой из жидкостей. Это следует из того, что $\operatorname{div} \mathbf{u}_1 = \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0$. То есть одна жидкость не может вытеснять другую. Этот вопрос скорее можно адресовать к работе [1], однако авторы предложенной статьи выбрали данную модель для исследования, то есть удовлетворены её обоснованием.

Перейдём к математическим вопросам. Надо признать, что статья могла бы быть написана лучше. Только из введения я узнал, какой результат получен. В самой статье есть теорема 1, где утверждается однозначная разрешимость какой-то промежуточной задачи, и всё. В конце есть ещё три леммы, непонятно к чему относящиеся. Видимо, есть какая-то их связь с поставленной задачей, но авторы это не поясняют. А где строгая формулировка результата работы? Честно признаться, уже при чтении введения у меня появилось некоторое недоверие к рассуждениям авторов. Я наугад посмотрел работу [10] из списка литературы, на которую они ссылаются в связи со своей задачей. Но там граница области течения является замкнутой кривой, поэтому делать вывод о решении задачи (1)–(2) на основании этой работы не вполне корректно. По крайней мере, это требует пояснения.

В работе довольно много обозначений, и, видимо, чтобы держать читателя в тонусе, в середине статьи некоторые пространства переобозначены. Потом в тексте местами используются и старые обозначения.

У меня нет желания выискивать ошибки в доказательствах, поэтому я просто приведу контрпример. Напомню, что авторы утверждают однозначную разрешимость задачи (1)–(2). Пусть $\mathbf{f} = 0$ и $\mathbf{a}_1 = 0$. Тогда единственным решением задачи (1) будет $\mathbf{u}_1 = 0$

и $p = 0$ (точнее, $p = const$). Но (2) является краевой задачей для уравнений Стокса и её можно рассмотреть отдельно. Эта задача тоже имеет единственное решение. При этом p уже определено из решения задачи (1). Получается, что для любой функции \mathbf{a}_2 давление в решении задачи Стокса (2) равно нулю (при $\mathbf{f} = 0$), что, конечно, неверно.

Эти рассуждения можно применить и к случаю ограниченной области, который рассматривался в предыдущих публикациях авторов ([3]).

Учитывая вышесказанное, считаю, что предложенная статья не может быть опубликована.