Краевая задача для одной переопределенной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике.

М.В. Урев, [*]Х.Х. Имомназаров, [†]И.К. Искандаров, [‡]С.Б. Куйлиев, [§]

УДК 519.632

Аннотация

В полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$ рассматривается стационарная система двухскоростной гидродинамики с одним давлением и однородными дивергентными и неоднородными краевыми условиями для двух скоростей. Такая система является переопределенной. Решение данной системы сводится к последовательному решению двух краевых задач: задачи Стокса для одной скорости и давления и переопределенной краевой задаче для векторного уравнения Пуссона для другой скорости. При надлежащем выборе функциональных пространств доказано существование и единственность обобщенного решения с соответствующей оценкой устойчивости.

Ключевые слова:переопределенная система, задача Стокса, уравнение Пуассона, анизотропное весовое пространство Соболева, полуплоскость, вязкая жидкость

Аннотация

[*]Институт Вычислительной Математики и Математической Геофизики СО РАН

[†]Институт Вычислительной Математики и Математической Геофизики СО РАН

[‡]Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск, Россия

[§]Узбекско-Финский педагогический институт, Самарканд, Узбекистан

In the half-plane $\mathbb{R}^2_+$, we consider a stationary system of two-velocity hydrodynamics with one pressure and homogeneous divergent and inhomogeneous boundary conditions for two velocities. Such a system is overridden. The solution of this system is reduced to the sequential solution of two boundary value problems: the Stokes problem for one velocity and pressure and an overdetermined boundary value problem for the vector Pousson equation for a different speed. With an appropriate choice of function spaces, the existence and uniqueness of generalized solution with the corresponding stability estimate.

Keywords: overdetermined system, Stokes problem, Poisson equation, anisotropic weighted space Sobolev, half-plane, viscous liquid

1 Введение

В данной работе рассматривается краевая задача в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+ = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ двухмерного евклидова пространства с границей $S = \{(x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\}$ для линеаризованной стационарной системы уравнений двухскоростной гидродинамики с неоднородными краевыми условиями нелинейной модели В.Н. Доровского [1]

$$\nu_1 \mathbf{\Delta} \mathbf{u}_1 - \nabla p = -\rho \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2_+, \quad \mathbf{u}_1|_S = \mathbf{a}_1(x_1), \tag{1}$$

$$\nu_2 \mathbf{\Delta} \mathbf{u}_2 - \nabla p = -\rho \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2_+, \quad \mathbf{u}_2|_S = \mathbf{a}_2(x_1), \tag{2}$$

и условием ограниченности $|\mathbf{u}_i(x_1, x_2)|$ при $|\mathbf{x}| \to +\infty$, где $\mathbf{f} = (f_1, f_2)-$ массовая сила, $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, u_{i2})$, $i = 1, 2$, ∇ – оператор градиента по $\mathbf{x}$, $\rho = \rho_1 + \rho_2$, ρ_i- парциальная плотность $i-$й фазы, ν_1 и ν_2- соответствующие сдвиговые вязкости фаз.

Решение системы (1)-(2) с одним давлением p сводится к последовательному решению двух краевых задач. Либо сначала решается задача Стокса (1) для $\mathbf{u}_1$ и p, а затем определяется скорость $\mathbf{u}_2$ как решение задачи (2) при найденном из (1) давлении p:

$$\mathbf{\Delta} \mathbf{u}_2 = \nu_2^{-1}(\nabla p - \rho \mathbf{f}), \ \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0 \text{ в } \mathbb{R}^2_+, \ \mathbf{u}_2|_S = \mathbf{a}_2(x_1). \tag{3}$$

Другими словами, давление p перенормирует массовую силу $\mathbf{f}$ и поле скорости $\mathbf{u}_2$ является соленоидальным решением краевой задачи для векторного уравнения Пуассона. Либо сначала определяются $\mathbf{u}_2$ и p из задачи Стокса (2), а затем при известном p определяется $\mathbf{u}_1$ из (1). Нетрудно видеть, что последовательное решение системы (1)-(2) в любом порядке приводит к одному и тому же результату. В стационарном случае, когда имеет место равновесие фаз по давлению и диссипация энергии происходит только за счет вязкостей фаз, система уравнений (1)-(2) оказывается переопределенной [2]. Изучение системы (1)-(2) с неоднородными дивергентными и граничными условиями в ограниченных областях $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ рассматривалось в работе [3]. В [4] получено классическое решение второй краевой задачи для стационарной системы типа Стокса (1)-(2) в полупространстве $\mathbb{R}^3_+$. В [5] двухмерная система (1)-(2) изучается в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$ при однородных дивергентных и краевых условиях.

В [6] рассмотрена задача в полупространстве для системы односкоростной гидродинамики для случая регулярных данных в пространстве функций конечной гладкости. В [7] также рассмотрена задача в полупространстве для системы односкоростной гидродинамики в весовых пространствах Соболева.

Обобщенное решение системы (1)-(2) также как и решение задачи Стокса в двухмерных неограниченных областях, в частности в полуплоскости, имеет существенное отличие от трехмерного случая [8], [9]. Именно, в двухмерном случае для скоростей невозможно удовлетворить наперед поставленным условиям на бесконечности и ставится условие ограниченности на бесконечности. В [10] показано, что обобщенное решение $\mathbf{u}_1$ задачи Стокса (1), принадлежащее $\mathbf{V}(\mathbb{R}^2_+)$, имеет вполне определенный предел $\lim_{x_2\to+\infty} \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_1^\infty = \mathrm{const}$, если $\mathbf{f}$ имеет компактный носитель или достаточно быстро убывает при $|\mathbf{x}| \to +\infty$. Таким образом, вектор $\mathbf{u}_1^\infty$ определяется $\mathbf{f}$ и граничной функцией $\mathbf{a}_1$ и не может задаваться произвольно. Напротив, в трехмерном случае на бесконечности возможно задание произвольного постоянного вектора [9, с. 58].

В п. 2 приводятся вспомогательные сведения. Выводится неравенство типа Лэре в полуплоскости и вводится анизотропное весовое пространство Соболева. Рассматривается решение уравнения Пуассона в полуплоскости, что является наряду с дивергентным уравнением необходимым шагом к решению уравнений Стокса в полуплоскости. Неоднородная задача Стокса (1) сводится к однородной задачи.

В п. 3 показана разрешимость однородной краевой задачи Стокса, полученной в п. 2 и разрешимость переопределенной краевой задачи для векторного уравнения Пуассона. В этом же разделе установлены некоторые основные свойства оператора дивергенции в полуплоскости, то есть теорема о следе и соответствующая формула Грина.

2 Вспомогательные сведения

Вектора и пространства, состоящие из вектор-функций $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ будем набирать полужирным шрифтом. Кроме того будем применять следующие обозначения:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2),\ |\mathbf{u}| = (u_1^2 + u_2^2)^{1/2},\ |\mathbf{u}_{\mathbf{x}}| = |\nabla \mathbf{u}| = \Big(\sum_{i,k=1}^{2} u_{ix_k}^2 \Big)^{1/2}.$$

Через $\mathcal{D}(\Omega)$ обозначим основное пространство всех бесконечно дифференцируемых финитных в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ функций [11, с. 85], через $\mathcal{D}'(\Omega)$ —двойственное пространство, называемое пространством обобщенных функций, $\mathbf{D}(\Omega) := \big(\mathcal{D}(\Omega)\big)^2$, $\mathbf{L}_2(\Omega) := \big(L_2(\Omega)\big)^2$ – гильбертово пространство вектор-функций $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ с компонентами u_i из $L_2(\Omega)$. Скалярное произведение в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ определяется равенством

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\,\mathbf{x} = \int_{\Omega} (u_1 v_1 + u_2 v_2) d\,\mathbf{x}.$$

Далее, определим $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ и $\mathbf{D}(\bar{\Omega})$:

$$\mathcal{D}(\bar{\Omega}) := \{\phi|_{\Omega} : \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)\}, \quad \mathbf{D}(\bar{\Omega}) := \big(\mathcal{D}(\bar{\Omega})\big)^2.$$

Пусть $\omega(x_2) = 1/\big((3+x_2)\ln(3+x_2)\big)$, $\ L_{2,\omega}(\mathbb{R}^2_+) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2_+) : \omega u \in L_2(\mathbb{R}^2_+)\}$.

Пусть $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+)$. Тогда для такой $u(\mathbf{x})$ верно неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} \frac{u^2(\mathbf{x})}{(3+x_2)^2 \ln^2(3+x_2)} d\,\mathbf{x} \le 4 \int_{\mathbb{R}^2_+} u_{x_2}^2(\mathbf{x}) d\,\mathbf{x}. \tag{4}$$

Действительно

$$2\int_{\mathbb{R}^2_+} u_{x_2} u \frac{1}{(3+x_2)\ln(3+x_2)} d\,\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^2_+} \frac{\partial u^2}{\partial x_2} \frac{1}{(3+x_2)\ln(3+x_2)} d\,\mathbf{x} =$$

$$
-\int_{\mathbb{R}^2_+} u^2 \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{1}{(3+x_2)\ln(3+x_2)}\Big) d\,\mathbf{x} =
$$

$$
\int_{\mathbb{R}^2_+} \frac{u^2}{(3+x_2)^2\ln(3+x_2)} d\,\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^2_+} \frac{u^2}{(3+x_2)^2\ln^2(3+x_2)} d\,\mathbf{x} \geq
$$

$$
\int_{\mathbb{R}^2_+} \frac{u^2}{(3+x_2)^2\ln^2(3+x_2)} d\,\mathbf{x}.
$$

Применим неравенство Коши-Буняковского

$$
\int_{\mathbb{R}^2_+} \frac{u^2}{(3+x_2)^2\ln^2(3+x_2)} d\,\mathbf{x} \leq 2\int_{\mathbb{R}^2_+} u_{x_2} u \frac{1}{(3+x_2)\ln(3+x_2)} d\,\mathbf{x} \leq
$$

$$
2\Big(\int_{\mathbb{R}^2_+} \frac{u^2}{(3+x_2)^2\ln^2(3+x_2)} d\,\mathbf{x}\Big)^{1/2}\Big(\int_{\mathbb{R}^2_+} u^2_{x_2} d\,\mathbf{x}\Big)^{1/2}.
$$

Отсюда следует неравенство (4).

Введем в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+)$ скалярное произведение

$$
[u,v] = \int_{\mathbb{R}^2_+} (\nabla u \cdot \nabla v) d\,\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^2_+} (u_{x_1}v_{x_1} + u_{x_2}v_{x_2}) d\,\mathbf{x}. \tag{5}
$$

Из неравенства (4) видно, что (5) действительно определяет скалярное произведение в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+)$, которому соответствует норма

$$
\|u\|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+)} = \sqrt{[u,u]}.
$$

Обозначим через $V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$ пополнение $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+)$ в метрике, соответствующей этому скалярному произведению и с соответствующей этому замыканию нормой $\|u\|_{V^1_0(\mathbb{R}^2_+)}$ $\forall u \in V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$, после чего $V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$ становится гильбертовым пространством со скалярным произведением (5). После замыкания по норме пространства $V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$, неравенство (4) становится верным для $\forall u \in V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$.

Покажем, что на каждой линии $\Gamma_h = (x_2 = h)$ для п. в. $h > 0$ функция $u \in V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$ квадратично суммируема и $u = 0$ как элемент $L_2(S)$.

Для $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+)$ имеем

$$
[u(x_1,h)]^2 = \Big(\int_0^h u_{x_2} d\,x_2\Big)^2 \leq h\int_0^h u^2_{x_2} d\,x_2 \leq h\int_0^{+\infty} u^2_{x_2} d\,x_2. \tag{6}
$$

Проинтегрируем обе части неравенства (6) по линии Γ_h

$$\int_{\mathbb{R}} u^2(x_1,h)d\,x_1 \leq h\int_{\mathbb{R}^2_+} u^2_{x_2}d\,\mathbf{x} \leq h\int_{\mathbb{R}^2_+} |\nabla u|^2 d\,\mathbf{x} = h\|u\|^2_{V^1_0(\mathbb{R}^2_+)}. \quad (7)$$

В неравенстве (7) выполним замыкание в норме пространства $V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$, после чего (7) становится верным при п. в. $h>0$ для $\forall u \in V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$. Теперь из (7) следует, что $u|_{\Gamma_h} \in L_2(\Gamma_h)\,\forall u \in V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$ при п. в. h >0 и

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x_1,h)d\,x_1 = 0.$$

Обозначим через $V^{-1}(\mathbb{R}^2_+)$ пространство ограниченных линейных функционалов над $V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$. Рассмотрим для уравнения Пуассона в $\mathbb{R}^2_+$ обобщенную постановку в $V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$ задачи Дирихле

$$-\triangle u = f \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2_+, \quad u|_S = 0.$$

Для $f \in V^{-1}(\mathbb{R}^2_+)$ требуется найти $u \in V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$:

$$[u,v] = f(v) \quad \forall v \in V^1_0(\mathbb{R}^2_+). \quad (8)$$

Непрерывность билинейной формы $[u,v] : V^1_0(\mathbb{R}^2_+) \times V^1_0(\mathbb{R}^2_+) \to \mathbb{R}$ следует из неравенства Буняковского, а коэрцитивность из равенства $[u,u] = \|\nabla u\|^2_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+)} = \|u\|^2_{V^1_0(\mathbb{R}^2_+)}$. Теперь существование и единственность решения $u \in V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$ задачи (8) следует из леммы Лакса-Мильграма с оценкой

$$\|u\|_{V^1_0(\mathbb{R}^2_+)} = \|\nabla u\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+)} \leq \|f\|_{V^{-1}(\mathbb{R}^2_+)}.$$

Функционал f в правой части (8) часто имеет вид обычной функции $f(\mathbf{x})$, которая определяет функционал как элемент пространства $V^{-1}(\mathbb{R}^2_+)$, если $f(\mathbf{x}) \in L_{2,\omega^{-1}}(\mathbb{R}^2_+)$ и

$$f(v) = (f,v) \qquad \forall v \in V^1_0(\mathbb{R}^2_+),$$

где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}^2_+)$. Для таких f покажем непрерывность линейной формы (f,v) на $V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$. Из неравенства (4) следует, что

$$\|v\|_{L_{2,\omega}(\mathbb{R}^2_+)} \leq 2\|v\|_{V^1_0(\mathbb{R}^2_+)}, \quad \forall v \in V^1_0(\mathbb{R}^2_+). \quad (9)$$

Применяя неравенство Буняковского и неравенство (9), получим

$$|(f,v)| = |(\omega^{-1}f, \omega v)| \leq \|f\|_{L_{2,\omega^{-1}}(\mathbb{R}^2_+)} \|v\|_{L_{2,\omega}(\mathbb{R}^2_+)} \leq C\|v\|_{V^1_0(\mathbb{R}^2_+)},$$

где $C = 2\|f\|_{L_{2,\omega^{-1}}(\mathbb{R}^2_+)}$.

Введем гильбертово пространство $V^1(\mathbb{R}^2_+)$:

$$V^1(\mathbb{R}^2_+) := \left\{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2_+) : u \in L_{2,\omega}(\mathbb{R}^2_+),\, \nabla u \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+)\right\},$$

снабженное нормой

$$\|u\|_{1,\omega} = \|u\|_{L_{2,\omega}(\mathbb{R}^2_+)} + \|\nabla u\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+)} \quad \forall u \in V^1(\mathbb{R}^2_+).$$

Из определения пространства $V^1(\mathbb{R}^2_+)$ и теоремы Фубини следует, что на каждой линии Γ_h для п. в. $h \geq 0$ функция $u \in V^1(\mathbb{R}^2_+)$ квадратично суммируема.

Рассмотрим вопрос о следе функции $u \in V^1(\mathbb{R}^2_+)$ на линии $x_2 = 0$. Пусть $a > 0$ и функция $\phi_a(t) \in C^\infty([0,\infty))$ определяется как $\phi_a(t) = 1$, если $0 \leq t \leq a$, $0 \leq \phi_a(t) \leq 1$, если $t \in [a, 2a]$, $\phi_a(t) = 0$, если $t \geq 2a$. Для каждой $u \in V^1(\mathbb{R}^2_+)$ функция $u_a(x_1, x_2) = \phi_a(x_2)u(x_1, x_2)$ принадлежит $H^1(\mathbb{R}^2_+)$ и $\gamma_0 u_a$ –след u_a на S совпадает с $\gamma_0 u$ – следом u на S. По теореме о следах функций из $H^k(\mathbb{R}^n_+)$ [12, с. 87] $\gamma_0 u = \gamma_0 u_a \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ и

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \leq C\|u_a\|_{H^1(\mathbb{R}^2_+)} \leq C_1\|u\|_{V^1(\mathbb{R}^2_+)}.$$

Справедлива также "обратная"теорема [12, с. 88], которая для нашего частного случая пространства $H^1(\mathbb{R}^2_+)$ формулируется так: существует линейное ограниченное отображение

$$Z : H^{1/2}(\mathbb{R}) \to H^1(\mathbb{R}^2_+)$$

такое, что если $g \in H^{1/2}(\mathbb{R})$, то для $u = Zg$ имеем $\gamma_0 u = g$. Отсюда следует, что существует линейное ограниченное отображение

$$\tilde{Z} : H^{1/2}(\mathbb{R}) \to V^1(\mathbb{R}^2_+)$$

такое, что если $g \in H^{1/2}(\mathbb{R})$, то для $\tilde{u} = \tilde{Z}g$ имеем $\gamma_0 \tilde{u} = g$.

Сведем решение неоднородной задачи Стокса (1) относительно $(\mathbf{u}_1, p)$ к решению однородной задачи Стокса для пары $(\mathbf{v}_1, p)$. Для этого представим $\mathbf{u}_1$ в виде суммы: $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{z}_0^{(1)} + \mathbf{z}_1^{(1)}$. Пусть граничное условие $\mathbf{a}_1(x_1)$ в (1) принадлежит $\mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}) = \big(H^{1/2}(\mathbb{R})\big)^2$. Тогда для $\mathbf{z}_0^{(1)} = \tilde{Z}\mathbf{a}_1 \in \mathbf{V}^1(\mathbb{R}^2_+) = \big(V^1(\mathbb{R}^2_+)\big)^2$ имеем $\gamma_0\mathbf{z}_0^{(1)} = \mathbf{a}_1(x_1)$.

Для определения $\mathbf{z}_1^{(1)}$ рассмотрим следующую дивергентную задачу: требуется найти $\mathbf{z}_1^{(1)} \in \mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+) = \big(V_0^1(\mathbb{R}^2_+)\big)^2$ такую, что

$$\operatorname{div}\mathbf{z}_1^{(1)} = -\operatorname{div}\mathbf{z}_0^{(1)} \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2_+, \tag{10}$$

и

$$\|\mathbf{z}_1^{(1)}\|_{\mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+)} \le C\|\operatorname{div}\mathbf{z}_0^{(1)}\|_{L_2(\mathbb{R}^2_+)}. \tag{11}$$

Имеем $\mathbf{z}_0^{(1)} \in \mathbf{V}^1(\mathbb{R}^2_+)$, откуда $\operatorname{div}\mathbf{z}_0^{(1)} \in L_2(\mathbb{R}^2_+)$. Решение более общей дивергентной задачи, чем (10) с соответствующей оценкой решения получено в явном виде Боговским М.Е., [13, с. 65], [14]. Для нашего двухмерного гильбертового случая в $\mathbb{R}^2_+$ это будет соответствовать существованию решения задачи (10) в $\mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+)$ с оценкой (11).

Функцию $\mathbf{v}_1$ определим как решение следующей задачи Стокса с однородными дивергентными и краевыми условими:

$$\nu_1\mathbf{\Delta}\mathbf{v}_1 - \nabla p = -\mathbf{f}_1, \quad \operatorname{div}\mathbf{v}_1 = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2_+, \quad \mathbf{v}_1|_S = \mathbf{0}, \tag{12}$$

где $-\mathbf{f}_1 = -\rho\mathbf{f} - \nu_1\mathbf{\Delta}\mathbf{z}^{(1)}$, $\mathbf{z}^{(1)} = \mathbf{z}_0^{(1)} + \mathbf{z}_1^{(1)} \in \mathbf{V}^1(\mathbb{R}^2_+)$, так как $\mathbf{z}_0^{(1)} \in \mathbf{V}^1(\mathbb{R}^2_+)$ и $\mathbf{z}_1^{(1)} \in \mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+) \subset \mathbf{V}^1(\mathbb{R}^2_+)$. Линейный функционал $\mathbf{\Delta}\mathbf{z}^{(1)}$ над пространством $\mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+)$ определяется формулой

$$< \mathbf{\Delta}\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{v} >= -\int_{\mathbb{R}^2_+} (\nabla\mathbf{z}^{(1)}(\mathbf{x}) : \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}))\, d\,\mathbf{x} =$$

$$-\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^2_+} \frac{\partial z_i^{(1)}}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, d\,\mathbf{x} \qquad \forall\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+)$$

и является ограниченным на $\mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+)$:

$$| < \mathbf{\Delta}\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{v} > | \le C\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+)}, \quad \text{где} \quad C = \Big(\int_{\mathbb{R}^2_+} |\nabla\mathbf{z}^{(1)}|^2\, d\,\mathbf{x}\Big)^{1/2}.$$

Пусть массовая сила $\mathbf{f}$ в (1) и (2) принадлежит $\mathbf{V}^{-1}(\mathbb{R}^2_+)$, тогда $\mathbf{f}_1$ в (12) так же принадлежит $\mathbf{V}^{-1}(\mathbb{R}^2_+)$.

3 Обобщенное решение однородной системы (12)

Обозначим через $\dot{\mathbf{J}}(\mathbb{R}^2_+)$ множество бесконечно дифференцируемых финитных в $\mathbb{R}^2_+$ соленоидальных векторов. В $\dot{\mathbf{J}}(\mathbb{R}^2_+)$ введем скалярное произведение

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \int_{\mathbb{R}^2_+} \mathbf{u}_{\mathbf{x}} : \mathbf{v}_{\mathbf{x}} \, d\,\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^2_+} (\mathbf{u}_{x_1} \cdot \mathbf{v}_{x_1} + \mathbf{u}_{x_2} \cdot \mathbf{v}_{x_2}) \, d\,\mathbf{x}.$$

Из (4) получим неравенство

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_{2,\omega}(\mathbb{R}^2_+)} \leq 2\|\mathbf{u}_{\mathbf{x}}\|_{(\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+))^2} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2_+), \tag{13}$$

из которого следует, что $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ действительно определяет скалярное произведение в $\dot{\mathbf{J}}(\mathbb{R}^2_+) \subset \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2_+)$, которому соответствует норма

$$\|\mathbf{u}\|_{\dot{\mathbf{J}}(\mathbb{R}^2_+)} = \sqrt{[\mathbf{u}, \mathbf{u}]} \equiv \|\mathbf{u}_{\mathbf{x}}\|_{(\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+))^2}.$$

Обозначим через $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+)$ пополнение $\dot{\mathbf{J}}(\mathbb{R}^2_+)$ по введенной норме с соответствующей этому замыканию нормой $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+)}$ $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+)$. Легко видеть, что $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+)$ является замкнутым подпространством в гильбертовом пространстве вектор-функций $\mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+) = \left(V_0^1(\mathbb{R}^2_+)\right)^2$. После замыкания по норме пространства $\mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+)$ неравенство (13) становится верным для $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+)$.

Обозначим через $\hat{\mathbf{Z}}(\mathbb{R}^2_+)$ замкнутое подпространство в $\mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+)$, определяемое как

$$\hat{\mathbf{Z}}(\mathbb{R}^2_+) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+) : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}.$$

Хейвудом доказано [15, теорема 9], что $\hat{\mathbf{Z}}(\mathbb{R}^2_+) = \mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+)$ (в его обозначениях $J_0^*(\mathbb{R}^2_+) = J_0(\mathbb{R}^2_+)$).

Перейдем к рассмотрению однородной задачи Стокса (12) относительно пары $(\mathbf{v}_1, p)$. Введем линейный непрерывный оператор $\pi \in \mathcal{L}(\mathbf{V}^{-1}(\mathbb{R}^2_+); \mathbf{Z}'(\mathbb{R}^2_+))$:

$$< \pi\mathbf{g}, \mathbf{v} > = < \mathbf{g}, \mathbf{v} > \qquad \forall \mathbf{g} \in \mathbf{V}^{-1}(\mathbb{R}^2_+),\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+),$$

и

$$\|\pi\mathbf{g}\|_{\mathbf{Z}'(\mathbb{R}^2_+)} \leq \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{V}^{-1}(\mathbb{R}^2_+)}.$$

В работах О. А. Ладыженской [8], [9] предложена и исследована обобщенная формулировка задачи Стокса (12) в пространстве $\mathbf{Z}(\Omega)$ для любых областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2, 3\,(\Omega \neq \mathbb{R}^2)$, в частности, для $\Omega = \mathbb{R}^2_+$:

найти функцию $\mathbf{v}_1 \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+)$, для которой выполняется тождество

$$\nu_1[\mathbf{v}_1, \mathbf{z}] = < \pi \mathbf{f}_1, \mathbf{z} > \qquad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+). \tag{14}$$

Оказывается [8], [9], (14) несет ту же информацию , что и система (12) и позволяет полностью отделить нахождение $\mathbf{v}_1$ от p. Последующее нахождение p следует из теоремы, доказанной О. А. Ладыженской [9, с. 42]. Из этой теоремы следует разложение Вейля для случая ограниченной области с достаточно гладкой границей [9, с. 41], которое также справедливо и для полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$ [13, с. 43], а именно, пространство $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+)$ раскладывается в прямую сумму

$$\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+) = \overset{\circ}{\mathbf{J}}(\mathbb{R}^2_+) \oplus \mathbf{G}(\mathbb{R}^2_+),$$

где $\overset{\circ}{\mathbf{J}}(\mathbb{R}^2_+)$ - замыкание $\dot{\mathbf{J}}(\mathbb{R}^2_+)$ по норме $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+)$, а $\mathbf{G}(\mathbb{R}^2_+)$ - ортогональное дополнение $\overset{\circ}{\mathbf{J}}(\mathbb{R}^2_+)$ в $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+)$.

Для краткости обозначим через $\mathbf{X} = \mathbf{V}^1_0(\mathbb{R}^2_+)$, $M = L_2(\mathbb{R}^2_+)$, $\mathbf{X}' = \mathbf{V}^{-1}(\mathbb{R}^2_+)$ пространства с нормами $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$, $\|\cdot\|_M$, $\|\cdot\|_{\mathbf{X}'}$ и пусть $< \cdot, \cdot >$ означает отношение двойственности между элементами $\mathbf{X}'$ и $\mathbf{X}$. Теоретическое исследование задачи (12) весьма просто: надо воспользоваться обобщенной формулировкой (14) и применить лемму Лакса-Мильграма. Другое дело, когда в рамках данного подхода рассматривается численное решение методом конечных элементов. Тогда возникают трудности с построением соленоидального конечноэлементного решения. Чтобы обойти эти трудности, мы будем рассматривать для задачи (12) смешанную обобщенную постановку в исходных переменных, при которой скорость ищется во всем пространстве $\mathbf{V}^1_0(\mathbb{R}^2_+)$, а не в его соленоидальном подпространстве: для заданной $\mathbf{f}_1 \in \mathbf{X}'$ требуется найти вектор-функцию $\mathbf{v}_1 \in \mathbf{X}$ и функцию $p \in M$, удовлетворяющие равенствам

$$\begin{cases} a_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}) + b_1(\mathbf{v}, p) = < \mathbf{f}_1, \mathbf{v} > & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}, \\ b_1(\mathbf{v}_1, q) = 0 & \forall q \in M, \end{cases} \tag{15}$$

и оценке

$$\|\mathbf{v}_1\|_{\mathbf{X}} + \|p\|_M \leq C\|\mathbf{f}_1\|_{\mathbf{X}'}, \tag{16}$$

где билинейные формы $a_1(\cdot,\cdot) : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ и $b_1(\cdot,\cdot) : \mathbf{X} \times M \to \mathbb{R}$ определяются как

$$a_1(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \nu_1 \int_{\mathbb{R}^2_+} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) : \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}))\, d\,\mathbf{x} =$$

$$\nu_1 \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2_+} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, d\,\mathbf{x} \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{X},$$

$$b_1(\mathbf{v}, q) = -\int_{\mathbb{R}^2_+} q \operatorname{div} \mathbf{v}\, d\,\mathbf{x} \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X},\ \forall q \in M.$$

Теорема 1. *Для задачи Стокса (12) существует единственное обобщенное решение* $(\mathbf{v}_1, p) \in \mathbf{V}^1_0(\mathbb{R}^2_+) \times L_2(\mathbb{R}^2_+)$ *как решение системы (15) с оценкой (16).*

Доказательство. Для доказательства существования и единственности решения задачи (15) вместе с оценкой (16) нужно показать [16, с. 61], что билинейные формы $a_1(\cdot,\cdot)$ и $b_1(\cdot,\cdot)$ непрерывны, билинейная форма $a_1(\cdot,\cdot)$ является $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+)$ – эллиптичной, то есть существует такая положительная постоянная $\alpha > 0$, что

$$a_1(\mathbf{v},\mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{X}} \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+), \tag{17}$$

а билинейная форма $b_1(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет $\inf - \sup$ условию (18): существует константа $\beta > 0$ такая, что

$$\inf_{q \in M\setminus\{0\}} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{X}\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{b_1(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}} \|q\|_M} \geq \beta. \tag{18}$$

Неравенство $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+)$ – эллиптичности (17) является очевидным, так как

$$a_1(\mathbf{v},\mathbf{v}) = \nu_1 \|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{X}} \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+).$$

Для доказательства (18) рассмотрим следующую дивергентную задачу. Дана $q \in M$, требуется найти $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{X}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_0 = q \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2_+, \tag{19}$$

$$\|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{X}} \leq C \|q\|_M. \tag{20}$$

Решение более общей дивергентной задачи в $\mathbb{R}^n_+$, $n \geq 2$ с соответствующей оценкой решения получено в явном виде Боговским

М.Е., [13, с. 65], [14]. Для нашего двухмерного гильбертового случая это будет соответствовать существованию решения $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{X}$ задачи (19) с оценкой (20). Пусть теперь q –любая функция из M. Функции q сопоставим вектор-функцию $-\mathbf{v}_0 \in \mathbf{X}$, где $\mathbf{v}_0$ – решение задачи (19) с оценкой (20). Имеем

$$\sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{X}\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{b_1(\mathbf{v},q)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}} \geq \frac{b_1(\mathbf{v}_0,q)}{\|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{X}}} \geq \frac{1}{C\|q\|_M}\int_{\mathbb{R}^2_+} q^2(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \frac{1}{C}\|q\|_M,$$

что доказывает (18) с $\beta = C^{-1}$. Таким образом, получаем существование и единственность обобщенного решения $(\mathbf{v}_1, p) \in \mathbf{X}\times M$ задачи Стокса (15) с оценкой (16). ■

Теперь перейдем к рассмотрению второй неоднородной системы уравнений (3) относительно скорости $\mathbf{u}_2$ второй фазы жидкости с уже известным давлением $p \in M$. Аналогично сведению неоднородной задачи Стокса (1) к однородной задаче (12) выполним аналогичные действия для неоднородной задачи (3). Для этого представим $\mathbf{u}_2$ в виде суммы: $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{z}_0^{(2)} + \mathbf{z}_1^{(2)}$, где $\mathbf{z}_0^{(2)} = \tilde{Z}\mathbf{a}_2 \in \mathbf{V}^1(\mathbb{R}^2_+)$, а $\mathbf{z}_1^{(2)}$ – решение дивергентной задачи, аналогичной задаче (10) - (11): найти вектор-функцию $\mathbf{z}_1^{(2)} \in \mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+)$ такую, что

$$\operatorname{div}\mathbf{z}_1^{(2)} = -\operatorname{div}\mathbf{z}_0^{(2)} \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2_+, \tag{21}$$

и

$$\|\mathbf{z}_1^{(2)}\|_{\mathbf{X}} \leq C\|\operatorname{div}\mathbf{z}_0^{(2)}\|_M. \tag{22}$$

Для $p \in M = L_2(\mathbb{R}^2_+)$ градиент ∇p есть линейный непрерывный функционал над пространством $\mathbf{X} = \mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+)$, действующий по правилу

$$< \nabla p, \mathbf{v} >= -\int_{\mathbb{R}^2_+} p(\mathbf{x})\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v}\in\mathbf{X},$$

то есть $\nabla p \in \mathbf{X}' = \mathbf{V}^{-1}(\mathbb{R}^2_+)$.

Лемма 1. *Справедливо неравенство*

$$\|p\|_M \leq C\|\nabla p\|_{\mathbf{X}'}, \qquad \forall p \in M,$$

где $C > 0$ – постоянная из неравенства (20).

Доказательство.

$$\|\nabla p\|_{\mathbf{X}'} = \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{X}\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{<\nabla p, \mathbf{v}>}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}} = \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{X}\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{-1}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}} \int_{\mathbb{R}^2_+} p(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x})\, d\,\mathbf{x}.$$

Для $p \in M$ возьмем $-\mathbf{v}_0 \in \mathbf{X}$, где $\mathbf{v}_0$ – решение дивергентной задачи (19) с правой частью p и оценкой (20). Тогда

$$\|\nabla p\|_{\mathbf{X}'} \geq \frac{\|p\|^2_M}{\|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{X}}} \geq C^{-1}\|p\|_M \qquad \forall p \in M. \qquad \blacksquare$$

Функцию $\mathbf{v}_2$ определим как решение следующей переопределенной задачи для векторного уравнения Пуассона с однородными дивергентными и краевыми условими:

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{v}_2 = -\mathbf{f}_2, \quad \operatorname{div}\mathbf{v}_2 = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2_+, \quad \mathbf{v}_2|_S = \mathbf{0}, \tag{23}$$

где $-\mathbf{f}_2 = \nu_2^{-1}(\nabla p - \rho\mathbf{f}) - \boldsymbol{\Delta}\mathbf{z}_0^{(2)} - \boldsymbol{\Delta}\mathbf{z}_1^{(2)}$, $\mathbf{z}_0^{(2)} \in \mathbf{V}^1(\mathbb{R}^2_+)$ и $\mathbf{z}_1^{(2)} \in \mathbf{V}^1_0(\mathbb{R}^2_+) \subset \mathbf{V}^1(\mathbb{R}^2_+)$. Имеем $\nabla p \in \mathbf{X}'$ и в (23) правая часть $-\mathbf{f}_2$ как и в задаче (12) принадлежит $\mathbf{X}'$. Существование и единственность обобщенного решения переопределенной задачи (23) следуя [8] и [9] можно достаточно просто установить в замкнутом подпространстве $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+)$ соленоидальных векторных функций пространства $\mathbf{X}$. Требуется найти $\mathbf{v}_2 \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+)$:

$$[\mathbf{v}_2, \mathbf{v}] =< \pi\mathbf{f}_2, \mathbf{v} >, \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+). \tag{24}$$

Имеем

$$[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{X}}, \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+),$$

то есть билинейная форма в левой части (24) $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+)$ – коэрцитивна. Правая часть в (24) есть линейный непрерывный функционал над элементами пространства $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+)$. Тогда по лемме Лакса-Мильграма задача (24) имеет единственное решение $\mathbf{v}_2 \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+)$ и

$$\|\mathbf{v}_2\|_{\mathbf{X}} \leq C\|\mathbf{f}_2\|_{\mathbf{X}'}.$$

Однако, для численного решения методом конечных элементов переопределенной задачи (23) ее удобно расширить путем введения в первое уравнение системы (23) дополнительного неизвестного слагаемого в виде градиента скалярной функции с нулевым граничным условием. Более подробно для случая ограниченной области см. [3] и [17].

Введем гильбертово пространство $\mathbf{H}_\omega(\mathrm{div};\mathbb{R}^2_+)$:

$$\mathbf{H}_\omega(\mathrm{div};\mathbb{R}^2_+) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{D}'(\mathbb{R}^2_+) : \mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+),\, \omega^{-1}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} \in L_2(\mathbb{R}^2_+)\},$$

снабженное нормой

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_\omega(\mathrm{div};\mathbb{R}^2_+)} = \left(\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+)} + \|\omega^{-1}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2_+)}\right)^{1/2}.$$

Лемма 2. $\mathbf{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ *плотно в* $\mathbf{H}_\omega(\mathrm{div};\mathbb{R}^2_+)$.

Доказательство. Доказательство основывается на следующей характеристике плотного линеала D в гильбертовом пространстве V: [18, с. 60]

линеал D плотен в V в том и только в том случае, если любой непрерывный линейный функционал, определенный на V и обращающийся в нуль на D, обращается в нуль также и на V.

Пусть $\mathcal{L}$ принадлежит $\left(\mathbf{H}_\omega(\mathrm{div};\mathbb{R}^2_+)\right)'$. По теореме Рисса существует $\mathbf{l} \in \mathbf{H}_\omega(\mathrm{div};\mathbb{R}^2_+)$:

$$< \mathcal{L}, \mathbf{u} >= (\mathbf{l}, \mathbf{u}) + (\omega^{-1}\,\mathrm{div}\,\mathbf{l}, \omega^{-1}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_\omega(\mathrm{div};\mathbb{R}^2_+).$$

Предположим, что $\mathcal{L}$ обращается в нуль на $\mathbf{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+})$, то есть

$$(\mathbf{l}, \mathbf{v}) + (\omega^{-1}\,\mathrm{div}\,\mathbf{l}, \omega^{-1}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+}).$$

Для $\mathbf{l} = (l_1, l_2)$ и $l_3 = \omega^{-2}\,\mathrm{div}\,\mathbf{l}$ обозначим через $\widetilde{\mathbf{l}} = (\widetilde{l}_1, \widetilde{l}_2)$ и $\widetilde{l}_3$ продолжение функций l_i, $i = 1, 3$ нулем в $\mathbb{R}^2$. Тогда предыдущая формула может быть переписана как

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\widetilde{l}_1 v_1 + \widetilde{l}_2 v_2 + \widetilde{l}_3\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\right) d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{D}(\mathbb{R}^2).$$

Это равенство показывает, что

$$\widetilde{\mathbf{l}} = \mathbf{grad}\,\widetilde{l}_3$$

в смысле обобщенных функций в $\mathbb{R}^2$. Так как $\widetilde{\mathbf{l}} \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2)$, то $\widetilde{l}_3 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ и по теореме 1.2.2^0) из [16, с.5] $l_3 \in H^1_0(\mathbb{R}^2_+)$. Тогда l_3 есть предел функций $\{\psi_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+)$ по норме пространства $H^1(\mathbb{R}^2_+)$ и мы окончательно получаем:

$$< \mathcal{L}, \mathbf{u} >= \lim_{n\to\infty} \left\{(\mathbf{grad}\,\psi_n, \mathbf{u}) + (\psi_n, \mathrm{div}\,\mathbf{u})\right\} = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_\omega(\mathrm{div};\mathbb{R}^2_+).$$

■

Отметим, что аналогично доказательству леммы 2 можно показать, что $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ плотно в $V^1(\mathbb{R}^2_+)$. Ниже для $f \in H^{-1/2}(\mathbb{R})$ и $g \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ через $< f, g >_{-1/2,1/2}$ будем обозначать скалярное произведение между $H^{-1/2}(\mathbb{R})$ и $H^{1/2}(\mathbb{R})$.

Лемма 3. *Отображение* $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \to v_2(x_1, 0)$*, определенное на* $\mathbf{D}(\mathbb{R}^2_+)$ *можно продолжить до линейного непрерывного отображения* $\mathbf{H}_\omega(\mathrm{div}; \mathbb{R}^2_+) \to H^{-1/2}(\mathbb{R})$ *(также обозначаемого через* $\mathbf{v} \to v_2(x_1, 0))$ *). Кроме того, имеет место формула Грина*

$$(\mathbf{v}, \nabla\varphi) + (\mathrm{div}\,\mathbf{v}, \varphi) = - < v_2, \varphi >_{-1/2,1/2},$$

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_\omega(\mathrm{div}; \mathbb{R}^2_+),\ \forall \varphi \in V^1(\mathbb{R}^2_+).$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{v} \in \mathbf{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ и $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+})$. Тогда

$$(\mathbf{v}, \nabla\varphi) + (\mathrm{div}\,\mathbf{v}, \varphi) = -\int_{\mathbb{R}} v_2 \varphi \, dx_1.$$

Так как $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ плотно в $V^1(\mathbb{R}^2_+)$, то это равенство остается справедливым когда φ из $V^1(\mathbb{R}^2_+)$ и $\mathbf{v}$ из $\mathbf{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+})$. Поэтому

$$\Big| \int_{\mathbb{R}} v_2 \varphi \, dx_1 \Big| \le \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_\omega(\mathrm{div};\mathbb{R}^2_+)} \|\varphi\|_{V^1(\mathbb{R}^2_+)} \quad \forall \varphi \in V^1(\mathbb{R}^2_+),\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+}).$$

Пусть теперь g произвольный элемент из $H^{1/2}(\mathbb{R})$ и возьмем $\varphi = \tilde{Z} g \in V^1(\mathbb{R}^2_+)$ так, что $\gamma_0 \varphi = g$ (см. выше). Тогда

$$\Big| \int_{\mathbb{R}} v_2 g \, dx_1 \Big| \le c_0 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_\omega(\mathrm{div};\mathbb{R}^2_+)} \|g\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \quad \forall g \in H^{1/2}(\mathbb{R}),\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+}),$$

где c_0 – норма оператора $\tilde{Z}$. Следовательно,

$$g \to \int_{\mathbb{R}} v_2(x_1, 0) g(x_1) \, dx_1$$

есть непрерывное линейное отображение из $H^{1/2}(\mathbb{R})$ в R. По теореме Рисса существует $f = f(\mathbf{v}) \in H^{-1/2}(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} v_2(x_1, 0) g(x_1) \, dx_1 =< f, g >_{-1/2,1/2}.$$

Отображение $\mathbf{v} \to f(\mathbf{v})$ линейно и

$$\|f\|_{H^{-1/2}(\mathbb{R})} \leq c_0 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_\omega(\mathrm{div};\mathbb{R}^2_+)} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+}).$$

Это доказывает, что отображение $\mathbf{v} \to f(\mathbf{v}) = v_2(x_1, 0)$, определенное в $\mathbf{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ является непрерывным в норме $\mathbf{H}_\omega(\mathrm{div};\mathbb{R}^2_+)$. Так как $\mathbf{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ плотно в $\mathbf{H}_\omega(\mathrm{div};\mathbb{R}^2_+)$, то это отображение может быть продолжено по непрерывности до отображения из $\mathbf{H}_\omega(\mathrm{div};\mathbb{R}^2_+)$ в $H^{-1/2}(\mathbb{R})$. $\blacksquare$

Список литературы

[1] Доровский В.Н., Перепечко Ю.В. Теория частичного плавления // Геология и геофизика, 1989, № 9, с. 56-64.

[2] Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х. Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред. Ташкент, 2012, 212 с.

[3] Урев М.В., Имомназаров Х.Х., Жиан-Ган Тан. Краевая задача для одной переопределенной стационарной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике // Сиб. журн. вычисл. математики. 2017.—Т.20.—No. 4.—С. 425-437.

[4] Имомназаров Х.Х., Имомназаров Ш.Х., Урев М.В., Бахрамов Р.Х. Решение одной переопределенной стационарной системы типа Стокса в полупространстве // СибЖИМ, 2021, Т. 24, No. 4, С. 54–63.

[5] Имомназаров Х.Х., Искандаров И.К., Куйлиев С.Б., Урев М.В. Краевая задача для одной переопределенной системы, возникающей в двухжидкостной гидродинамике // Математические заметки СВФУ, 2022, Т. 29, No. 1, С. 14-24.

[6] N. Tanaka, On the boundary value problem for the stationary Stores system in the half-space // Journal of Differential Equations, 1995, Vol. 115, p. 70-74.

[7] Boulmezaoud Tahar Z. On the Stokes system and on the biharmonic equation in the half-space: an approach via weighted Sobolev spaces // Math. Meth. Appl. Sci., 2002; Vol. 25, p. 373-398.

[8] Ладыженская О.А., Солонников В.А. О некоторых задачах векторного анализа и обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье–Стокса. // Записки науч. сем. ЛОМИ, 1976, Т. 59, С. 81–116.

[9] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. –М.: Изд. "Наука" , 1970, 288 с.

[10] Попов А.Н. Применение теории потенциала к решению линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса в двумерном случае. // Тр. МИАН СССР, 1971, Т. 116, С. 162–180.

[11] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. –М.: Изд. "Наука" , 1981, 512 с.

[12] Nečas J. Direct methods in the theory of elliptic equations.– Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012.

[13] Боговский М.Е. Аналитико-численные методы для уравнений Навье–Стокса, Учебное пособие, Инновационная образовательная программа Российского университета дружбы народов, РУДН, Москва, 2008, 231 с.

[14] Боговский М.Е. Решение некоторых задач векторного анализа, связанных с операторами div и grad // Труды семинара С.Л. Соболева, вып.1.– ИМ СОАН СССР.– Новосибирск, 1980.– С. 5–40.

[15] Heywood J.G. On uniqueness questions in the theory of viscous flow // Acta Math., 1976, Vol. 136, p. 61–102.

[16] Girault V. and Raviart P.-A. Finite element methods for Navier-Stokes equations. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[17] Гудович И.С., Крейн С.Г., Куликов И.М. Краевые задачи для уравнений Максвелла // Доклады АН СССР, 1972, т. 207, № 2, с. 321-324.

[18] Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. – М.: Мир, 1977. – 383 с.