Рецензия на статью М.Х. Файзрахманова

"ЭФФЕКТИВНО БЕСКОНЕЧНЫЕ КЛАССЫ НУМЕРАЦИЙ И ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ"

Понятие вычислимой нумерации – одно из ключевых в современной теории вычислимости. Важными классами нумераций являются вычислимые нумерации, ядра (нумерационные эквивалентности) которых удовлетворяют теореме о неподвижной точке (далее, для краткости – вычислимые fixed point нумерации или fp-нумерации), в частности – полные и предполные нумерации. Например, стандартные постовские и клиниевские нумерации – fp-нумерации. В связи с этим возникают естественные и принципиальные вопросы об эффективной бесконечности указанных классов, т.е. наличии интенсиональной (алгоритмической) процедуры, которая по любому эффективно заданному семейству вычислимых нумераций строит нумерацию вне этого семейства, но из заданного класса. По существу, речь идет об аналогах теоремы Геделя о неполноте (= о продуктивности арифметических истин). Сказанное обуславливает важность и актуальность тематики, предложенной в рецензируемой статье. Отметим, что концептуальная база теории вычислимых нумераций семейств вычислимо перечислимых множеств восходит к работам А.И. Мальцева и Ю.Л. Ершова, а эффективно бесконечных классов вычислимых нумераций – к С.С. Гончарову.

В теореме 1 показывается, что при достаточно общих условиях (наличии у семейства в.п. множеств $\mathcal{A}$ наименьшего по включению элемента, а также для каждого конечного множества, содержащегося в некотором $\mathcal{A}$-множестве, имеется бесконечное число $\mathcal{A}$-расширений) из существования однозначной вычислимой нумерации семейства $\mathcal{A}$ следует возможность интенсионального (алгоритмического) построения для каждого эффективно заданного класса вычислимых нумераций семейства $\mathcal{A}$ некоторой полной вычислимой нумерации семейства $\mathcal{A}$ вне этого класса.

Представляет несомненный интерес предложение 1, в котором утверждается, что условие присутствия в вычислимом семействе в.п. множеств пустого множества достаточно для совпадения классов полных и предполных вычислимых нумераций этого семейства.

В частности, классы полных, предполных и fp-нумераций семейств всех в.п. множеств и всех ч.в. функций эффективно бесконечны.

В теореме 2 устанавливается, что, опять-таки, при достаточно общих предположениях (наличии у семейства в.п. множеств $\mathcal{A}$ наименьшего по включению элемента) из существования разрешимой вычислимой нумерации семейства $\mathcal{A}$ следует возможность интенсионального построения для каждого эффективно заданного класса вычислимых нумераций семейства $\mathcal{A}$, не содержащего разрешимых нумераций, некоторой вычислимой fp-нумерации, не являющейся предполной.

В частности, для всякого нетривиального семейства в.п. множеств, обладающего разрешимой вычислимой нумерацией, класс вычислимых fp-нумераций этого семейства за вычетом класса его вычислимых предполных нумераций является эффективно бесконечным.

В случае конечных семейств в.п. множеств ситуация упрощается, что дает возможность сформулировать критерий эффективной бесконечности в терминах существования вычислимой fp-нумерации, а также наличия наименьшего по включению элемента, что показано в предложении 2.

Центральным результатом последней главы работы является теорема 3, в которой рассматриваются семейства в.п. множеств, для которых предполагается наличие наибольшей (главной) и наименьшей относительно сводимости вычислимых нумераций. При этом, если K – класс вычислимых нумераций этого семейства, замкнутый относительно эквивалентности нумераций и множество $\{e|e \in Tot \wedge \mu \oplus \nu\varphi_e \in K\}$ (где μ – наименьшая вычислимая нумерация семейства, а ν –главная) непустое лежащее в Σ^0_3, то существует эффективная процедура, выделяющая в каждом классе $\equiv$-эквивалентности фактор-множества $K/\equiv$ некоторую вычислимую нумерацию.

В частности, если семейство в.п. множеств обладает наименьшей и главной нумерациями, то классы его полных и предполных нумераций не являются эффективно бесконечными. Это же верно и для конечных семейств в.п. множеств.

Завершает статью предложение 3, утверждающее, что конечное семейство в.п. множеств, содержащее наименьший элемент и отличный от него существенный элемент имеет бесконечное число попарно неэквивалентных полных вычислимых нумераций. Отсюда следует существование вычислимых семейств в.п. множеств, для которых классы предполных и fp-нумераций будучи бесконечными являются алгоритмически конечными (т.е. бесконечными, но не эффективно бесконечными).

Доказательства всех утверждений об эффективной бесконечности верны, идейно прозрачны (шаг за шагом строится вычислимая нумерация, к которой не сводится ни одна из заданного класса; при этом гарантируется, что построенная в пределе нумерация лежит в нужном классе), но весьма нетривиальны с технической точки зрения. Касательно теоремы 3, именно наличие "границ" в качестве наименьшей и главной нумераций позволяет эффективно строить вычислимую нумерацию в каждом классе эквивалентных (относительно сводимости) нумераций заданного класса нумераций.

Отметим несколько замечаний почти редакционного характера, не настаивая на внесении поправок по каждому из замечаний (на усмотрение автора).

1. В определении 2 нужно заменить либо α на ν, либо ν на α.

2. В формулировке теоремы 1 словосочетание "*обладающее однозначной вычислимой нумерацией*" можно заменить на "*обладающее разрешимой вычислимой нумерацией*", т.к. во-первых это расширит диапазон применимости теоремы 1 и, во-вторых, унифицирует формулировки теорем 1 и 2.

3. В замечании перед формулировкой предложения 1 утверждается, что разность классов предполных и полных нумераций для семейств в.п. множеств и ч.в. функций не является эффективно бесконечной. Но предложение 1 устанавливает, что эта разность пуста, так что говорить о том, что пустой класс не является эффективно бесконечным кажется не вполне корректным. Имеет смысл отмечать случаи бесконечности, но алгоритмической конечности (т.е. не эффективной бесконечности). Хотя формально автор прав, возможно нужно прямо сказать о пустоте разности, чему впрочем и посвящено предложение 1.

4. Касательно вопроса 1. Может быть перед формулировкой вопроса стоит привести пример вычислимой нумерации семейства в.п. множеств, для которого разность между классами вычислимых предполных и полных нумераций не является пустой. Например, рассмотрим предполную позитивную эквивалентность, классы которой образуют в.п. элементы семейства. Тогда естественная нумерация этого семейства вычислимая и предполная, но полной она быть не может. Далее, переход к вопросу 1 вполне логичен и закономерен.

5. Лемму 1 в тексте доказательства теоремы 2, вероятно, целесообразней назвать леммой 2, т.к. лемма 1 встречается в доказательстве теоремы 1.

6. Стр. 145, последняя строка второго сверху абзаца. Текст ”входит за рамки настоящей статьи” заменить на ”выходит за рамки настоящей статьи”.

Считаю, что после устранения указанных незначительных недостатков статью безусловно можно опубликовать в журнале ”Сибирские электронные математические известия”.

Повторная рецензия не требуется.

С уважением,
Рецензент
31.10.2023