УДК 519.21

Замечания о лестничных величинах случайного блуждания с устойчивыми распределениями скачков [1]

(Remarks on the ladder values of a random walk with stable jump distributions)

В.И. Лотов

Аннотация

Получены теоремы, характеризующие свойства лестничных моментов и лестничных высот случайного блуждания со скачками, имеющими строго устойчивые распределения.

Ключевые слова: случайное блуждание, лестничный момент, лестничная высота, строго устойчивое распределение

Пусть X, X_1, X_2, ... — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, обозначим

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n,\ n \geq 1, \qquad S_0 = 0.$$

Последовательность $\{S_n\}$ называется случайным блужданием. Введем момент появления первой положительной суммы (лестничный момент) и величину первой положительной суммы (лестничную высоту):

$$\eta_+ = \min\{n \geq 1 : S_n > 0\}, \qquad \chi_+ = S_{\eta_+}.$$

Полагаем $\eta_+ = \infty$, если $S_n \leq 0$ при всех $n \geq 1$. В этом случае лестничная высота χ_+ остается неопределенной.

Аналогично можно ввести время появления первой отрицательной суммы и ее величину:

$$\eta_- = \min\{n \geq 1 : S_n < 0\}, \qquad \chi_- = S_{\eta_-}.$$

Отметим, что все перечисленные характеристики играют важную роль при решении разного сорта граничных задач для случайных блужданий. Рассмотрим, к примеру, задачу исследования момента первого достижения уровня

$$\tau_b = \inf\{n \geq 1 :\ S_n \geq b\}, \qquad b > 0,$$

и величины S_{τ_b}. Нетрудно видеть, что движение траектории к уровню b осуществляется независимыми скачками, распределенными одинаково с χ_+, то есть величина S_{τ_b} формируется как сумма случайного числа таких лестничных величин. По той же причине τ_b равняется сумме случайного числа независимых величин, одинаково распределенных с η_+. Следовательно, совместное распределение пары $(\tau_b,\, S_{\tau_b})$ полностью определяется распределением пары $(\eta_+,\, \chi_+)$. Этот факт демонстрируется, в частности, в [1, Th. 6] в более общей ситуации.

[1] Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН, проект FWNF-2022-0010.

Ясно,что исследование лестничных величин вызывает большой интерес, и этому направлению посвящено значительное количество работ, см., например, [2]–[9] и литературу там. Основная часть работ относится к изучению асимптотических свойств распределений лестничных величин. Одновременно выясняется, что нахождение явных выражений для распределений случайных величин η_+ и χ_+, а также их моментов сопряжено со значительными трудностями. Разумеется, приятным исключением здесь являются ситуации, когда распределение X на правой полуоси является экспоненциальным или геометрическим для целочисленного блуждания. В этих случаях χ_+ также будет иметь экспоненциальное или, соответственно, геометрическое распределение (см. [10]), однако и здесь нахождение распределения η_+ является весьма сложной задачей.

В работе рассматриваются случайные блуждания, для которых функция распределения $F(y) = \mathbf{P}(X < y)$ обладает свойством строгой устойчивости. Последнее обстоятельство позволяет выяснить ряд дополнительных полезных свойств лестничных величин η_+ и χ_+ в этой ситуации, что и составляет содержание данной работы. Получены оценки сверху для моментов случайной величины η_+ (теорема 1), для моментов χ_+ в предположении о симметричности распределения X (теорема 3), а также найдено в точном виде преобразование Лапласа над распределением χ_+, если скачки блуждания имеют симметричное распределение Коши (теорема 2). Приведены также некоторые оценки снизу для моментов лестничных величин.

Напомним, что распределение случайной величины X называется устойчивым, если оно не сосредоточено в нуле и для каждого $n \geq 1$ существуют постоянные числа $c_n > 0$ и γ_n такие, что распределение S_n совпадает с распределением $c_n X + \gamma_n$ ([11, Ch. 6]). Оказывается, что константы c_n обязательно имеют вид $c_n = n^{1/\alpha}$, где $0 < \alpha \leq 2$. Все устойчивые функции распределения непрерывны. Распределение называется строго устойчивым, если $\gamma_n = 0$ в приведенном выше определении.

Теорема 1 *Пусть случайная величина X имеет строго устойчивое распределение, обозначим $q := \mathbf{P}(X > 0)$. Тогда справедливы соотношения*

$$\mathbf{E}z^{\eta_+} = 1 - (1-z)^q, \qquad |z| < 1, \tag{1}$$

$$\mathbf{P}(\eta_+ = n) = (-1)^{n-1}\frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}, \quad n \geq 1,$$

$$\mathbf{E}\eta_+^\lambda = \frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)}\int\limits_0^\infty \frac{(1-e^{-u})^q}{u^{\lambda+1}}du \leq \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \cdot \frac{q}{q-\lambda}, \qquad 0 < \lambda < q. \tag{2}$$

Доказательство. Формула (1) известна, она приведена здесь для полноты картины. По-видимому, эта формула впервые встретилась в [2]. Поясним один из способов ее получения. Для характеристической функции совместного распределения случайных величин χ_+ и η_+ известно следующее представление (см., например, [10, Ch. 12, Cor. 12.2.1]): для вещественных t и $|z| < 1$

$$1 - \mathbf{E}(e^{it\chi_+} z^{\eta_+}; \eta_+ < \infty) = \exp\left\{ -\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n}\mathbf{E}\big(e^{itS_n};\, S_n > 0\big)\right\}. \tag{3}$$

Заметим, что в силу строгой устойчивости

$$\mathbf{P}(S_n > 0) = \mathbf{P}(S_n/n^{1/\alpha} > 0) = \mathbf{P}(X > 0) = q,$$

поэтому расходится ряд

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\mathbf{P}(S_n > 0)}{n} = \infty,$$

откуда следует ([10, Ch. 12, Cor. 12.2.5]), что $\mathbf{P}(\eta_+ < \infty) = 1$. Этот же вывод можно сделать, положив $t = 0$ в (3) и устремляя $z \to 1$. Получаем теперь из (3) при $t = 0$

$$1 - \mathbf{E} z^{\eta_+} = \exp\left\{ -q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \right\} = \exp\big\{ q \ln(1 - z) \big\} = (1 - z)^q$$

(везде в работе имеется в виду главное значение логарифма).

Отметим, что формула (1) при $q = 1/2$ так же легко следует для всякой непрерывной функции F, удовлетворяющей условию $F(y) = 1 - F(-y)$ (см. [10, Ch. 12, Th. 12.8.3]).

Разлагая полученное выражение для $\mathbf{E} z^{\eta_+}$ в ряд, получаем

$$\mathbf{E} z^{\eta_+} = 1 - (1 - z)^q = qz - \frac{q(q-1)}{2} z^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!} z^n + \dots,$$

то есть

$$\mathbf{P}(\eta_+ = n) = (-1)^{n-1} \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}.$$

Для доказательства неравенства (2) воспользуемся следующим соотношением [12], связывающим момент порядка $\lambda \in (0, 1)$ произвольной неотрицательной случайной величины Y с преобразованием Лапласа $g(u) = \mathbf{E} \exp\{-uY\}$:

$$\mathbf{E} Y^{\lambda} = \frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)} \int_0^{\infty} \frac{1 - g(u)}{u^{\lambda+1}} \, du, \qquad 0 < \lambda < 1. \tag{4}$$

Используя (1) при $z = e^{-u}$ и (4), получаем

$$\mathbf{E} \eta_+^{\lambda} = \frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)} \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-u})^q}{u^{\lambda+1}} \, du. \tag{5}$$

В окрестности нуля подынтегральная функция ведет себя как $u^{q-\lambda-1}$, поэтому при $\lambda \geq q$ момент $\mathbf{E} \eta_+^{\lambda}$ не существует. Имеем при $0 < \lambda < q$

$$\mathbf{E} \eta_+^{\lambda} \leq \frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)} \min_{A>0} \left(\int_0^{A} \frac{u^q}{u^{\lambda+1}} \, du + \int_A^{\infty} \frac{1}{u^{\lambda+1}} \, du \right)$$

$$= \frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)} \min_{A>0} \left(\frac{A^{q-\lambda}}{q-\lambda} + \frac{A^{-\lambda}}{\lambda} \right) = \frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)} \left(\frac{1}{q-\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \cdot \frac{q}{q-\lambda}.$$

Теорема доказана. $\square$

Пользуясь представлением (5), нетрудно получать также оценки снизу для $\mathbf{E}\eta_+$. Пусть $0 < A < 2$, тогда

$$\int\limits_0^\infty \frac{(1-e^{-u})^q}{u^{\lambda+1}}\,du \geq \int\limits_0^A \frac{(1-u/2)^q u^q}{u^{\lambda+1}}\,du + \int\limits_A^\infty \frac{(1-e^{-A})^q}{u^{\lambda+1}}\,du$$

$$\geq (1-A/2)^q \frac{A^{q-\lambda}}{q-\lambda} + (1-e^{-A})^q \frac{A^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Поэтому

$$\mathbf{E}\eta_+^\lambda \geq \frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)} \max_{0<A<2} \left((1-A/2)^q \frac{A^{q-\lambda}}{q-\lambda} + (1-e^{-A})^q \frac{A^{-\lambda}}{\lambda} \right), \qquad 0 < \lambda < q.$$

Нахождение точки максимума здесь требует сложных вычислений, мы их не приводим. Заметим только, что приведенные оценки сверху и снизу для интеграла (5) обе выражаются через линейные комбинации функций $A^{q-\lambda}/(q-\lambda)$ и $A^{-\lambda}/\lambda$.

Далее найдем явный вид для преобразования Лапласа лестничной высоты χ_+, если случайная величина X распределена по симметричному закону Коши.

Напомним, что X имеет распределение Коши $C_{m,\sigma}$, если его плотность равна

$$c_{m,\sigma}(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sigma}{\sigma^2 + (y-m)^2}, \qquad -\infty < y < \infty. \tag{6}$$

Здесь, очевидно,

$$F(x) = C_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-m}{\sigma}\right),$$

где m, σ — некоторые параметры, $\sigma > 0$,

$$q = P(X > 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\frac{m}{\sigma}.$$

Распределение Коши строго устойчиво с показателем $\alpha = 1$. Это непосредственно следует из вида характеристической функции:

$$\varphi(t) := \mathbf{E}e^{itX} = e^{imt-\sigma|t|}.$$

Теорема 2 *Пусть $F(y) = \mathbf{P}(X < y) = C_{0,\sigma}(y)$, тогда для любого $u > 0$*

$$\mathbf{E}\,e^{-u\chi_+} = 1 - \frac{1}{\sqrt{u\sigma}}\,\Gamma\left(\frac{u\sigma}{2\pi}+1\right)\left(\frac{u\sigma}{2\pi e}\right)^{-u\sigma/2\pi}.$$

Здесь $\Gamma(\lambda)$ — известная гамма-функция Эйлера.

Доказательство. Правая часть (3) являет собой положительную компоненту факторизации [10, Ch. 12], ее свойства хорошо известны. При $|z| < 1$ эта функция аналитична в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} t > 0$, непрерывна и ограничена на замыкании этой области. Положим $t = iu, u > 0$, и перепишем (3), воспользовавшись свойством строгой устойчивости и формулой (6):

$$1 - \mathbf{E}\big(z^{\eta_+} e^{-u\chi_+}\big) = \exp\bigg\{ -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \int\limits_0^{\infty} e^{-ux} d\,\mathbf{P}(S_k < x)\bigg\}$$

$$= \exp\bigg\{ -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \int\limits_0^{\infty} e^{-ukx} d\,\mathbf{P}(X < x)\bigg\} = \exp\bigg\{ -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-ukx}}{\pi\sigma(1+(x/\sigma)^2)}\, dx\bigg\}$$

$$= \exp\bigg\{ -\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-uk\sigma x}}{1+x^2}\, dx\bigg\}.$$

Пусть $0 < z < 1$. Обозначим при фиксированных положительных z, u, σ

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{z^k e^{-u\sigma k x}}{k(1+x^2)}, \qquad x > 0.$$

При каждом n функция $S_n(x)$ неотрицательна и непрерывна по x, она монотонно возрастает с ростом n. Очевидно,

$$S_n(x) \to -\frac{\ln(1 - ze^{-u\sigma x})}{1+x^2}, \qquad n \to \infty.$$

Предельная функция непрерывна и интегрируема на $(0, \infty)$. Получаем в силу теоремы о мажорируемой сходимости

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\infty} S_n(x)\, dx = \int\limits_0^{\infty} \lim_{n\to\infty} S_n(x)\, dx = -\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln(1 - ze^{-u\sigma x})}{1+x^2}\, dx.$$

Имеем в итоге

$$1 - \mathbf{E} e^{-u\chi_+} = 1 - \lim_{z\to 1} \mathbf{E}\left(z^{\eta_+} e^{-u\chi_+}\right)$$

$$= \lim_{z\to 1} \exp\bigg\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\ln(1 - ze^{-u\sigma x})}{1+x^2}\, dx\bigg\} = \exp\bigg\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\ln(1 - e^{-u\sigma x})}{1+x^2}\, dx\bigg\}.$$

Как следует из формулы 4.319 [13, p. 568],

$$I(a) := \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\ln(1 - e^{-2a\pi x})}{1+x^2}\, dx = -\bigg[\frac{1}{2}\ln 2a\pi + a(\ln a - 1) - \ln\Gamma(a+1)\bigg], \quad a > 0.$$

Полагая $a = u\sigma/2\pi$, будем иметь

$$\mathbf{E} e^{-u\chi_+} = 1 - \exp\{I(a)\} = 1 - \frac{1}{\sqrt{u\sigma}} \exp\bigg\{ \ln\Gamma\bigg(\frac{u\sigma}{2\pi} + 1\bigg) - \frac{u\sigma}{2\pi}\bigg(\ln\frac{u\sigma}{2\pi} - 1\bigg)\bigg\}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{u\sigma}}\,\Gamma\left(\frac{u\sigma}{2\pi}+1\right)\left(\frac{u\sigma}{2\pi e}\right)^{-u\sigma/2\pi}.$$

Теорема доказана. □

Если $F = C_{m,\sigma}$, то, очевидно,

$$1 - \mathbf{E}e^{-\lambda\chi_+} = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\ln(1-e^{-\lambda\sigma x})}{1+(x-m/\sigma)^2}\,dx\right\}.$$

Теорема 3 *Пусть X имеет симметричное строго устойчивое распределение с показателем α, то есть характеристическая функция имеет вид*

$$\varphi(t) = \mathbf{E}\,\exp\{itX\} = \exp\{-c|t|^\alpha\}$$

при некотором $c > 0$. Тогда при $0 < \lambda < \dfrac{\alpha}{2}$

$$\mathbf{E}\chi_+^\lambda = \frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)}\int_0^\infty \frac{\sqrt{1-\exp\{-cu^\alpha\}}}{u^{\lambda+1}}\,du \le \frac{c^{\lambda/\alpha}}{\Gamma(1-\lambda)}\cdot\frac{\alpha}{\alpha-2\lambda}. \tag{7}$$

Доказательство. Воспользуемся факторизационным тождеством ([10, Ch. 12]), которое в случае симметричного и непрерывного распределения скачков блуждания принимает вид:

$$1-\varphi(t) = (1-\varphi_+(t))\cdot(1-\varphi_-(t))\,,$$

где $\varphi_\pm(t) = \mathbf{E}e^{it\chi_\pm}$. Распределения χ_+ и $-\chi_-$ совпадают в силу условия симметричности, функция $\varphi(t)$ вещественна, поэтому

$$1-\varphi(t) = (1-\varphi_+(t))(1-\varphi_-(t)) = (1-\varphi_+(t))(1-\overline{\varphi_+(t)})$$

$$= (1-\varphi_+(t))\overline{(1-\varphi_+(t))} = |1-\varphi_+(t)|^2.$$

Следовательно,

$$|1-\varphi_+(t)| = \sqrt{1-\varphi(t)} = \sqrt{1-e^{-c|t|^\alpha}}.$$

Для получения оценки сверху в (7) вновь используем соотношение (4). Для любого $A > 0$ имеем

$$\mathbf{E}\chi_+^\lambda = \frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)}\int_0^\infty \frac{1-\varphi_+(iu)}{u^{\lambda+1}}\,du = \frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)}\int_0^\infty \frac{\sqrt{1-\exp\{-cu^\alpha\}}}{u^{\lambda+1}}\,du \tag{8}$$

$$= \frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)}\left(\int_0^A \frac{\sqrt{1-\exp\{-cu^\alpha\}}}{u^{\lambda+1}}\,du + \int_A^\infty \frac{\sqrt{1-\exp\{-cu^\alpha\}}}{u^{\lambda+1}}\,du\right).$$

В окрестности нуля подынтегральная функция ведет себя как $\sqrt{c}\,u^{\alpha/2-\lambda-1}$, поэтому при $\lambda \ge \alpha/2$ момент $\mathbf{E}\chi_+^\lambda$ не существует. Воспользовавшись неравенствами

$$\sqrt{1-\exp\{-cu^\alpha\}} \le \sqrt{c}\,u^{\alpha/2}, \qquad \sqrt{1-\exp\{-cu^\alpha\}} \le 1,$$

имеем при $0 < \lambda < \alpha/2$

$$\mathbf{E}\chi_+^\lambda \le \frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)} \min_{A>0} \left(\sqrt{c} \int\limits_0^A \frac{u^{\alpha/2}}{u^{\lambda+1}}\, du + \int\limits_A^\infty \frac{1}{u^{\lambda+1}}\, du \right).$$

Нетрудно установить, что минимум выражения в скобках достигается при $A = c^{-1/\alpha}$, поэтому приходим к оценке

$$\mathbf{E}\chi_+^\lambda \le \frac{\lambda\, c^{\lambda/\alpha}}{\Gamma(1-\lambda)} \left(\frac{1}{\alpha/2-\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{c^{\lambda/\alpha}}{\Gamma(1-\lambda)} \cdot \frac{\alpha}{\alpha - 2\lambda}.$$

□

Явное выражение (8) для $\mathbf{E}\chi_+^\lambda$ позволяет также получать для этого момента различные оценки снизу. Приведем одну из них.

Для $0 < \lambda < \alpha/2$ имеем

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{1-\exp\{-cu^\alpha\}}}{u^{\lambda+1}}\, du \ge \int\limits_0^\infty \frac{1-\exp\{-cu^\alpha\}}{u^{\lambda+1}}\, du \ge \int\limits_0^1 \frac{cu^\alpha - c^2u^{2\alpha}/2}{u^{\lambda+1}}\, du + \int\limits_1^\infty \frac{1-e^{-c}}{u^{\lambda+1}}\, du$$

$$= \frac{c}{\alpha-\lambda} - \frac{c^2}{2(2\alpha-\lambda)} + \frac{1-e^{-c}}{\lambda} =: C(\lambda, \alpha).$$

Таким образом, из (8) получаем

$$\mathbf{E}\chi_+^\lambda \ge \frac{\lambda\, C(\lambda, \alpha)}{\Gamma(1-\lambda)}, \qquad 0 < \lambda < \alpha/2.$$

Автор благодарен А.А. Дубнякову за участие в подготовке первой версии работы.

Список литературы

[1] V.I. Lotov, *On some boundary crossing problems for Gaussian random walks*, Annals of Probability, **24**:4 (1996), 2154–2171.

[2] Ya.G. Sinai, *On the distribution of the first positive sum for a sequence of independent random variables*, Theory Probab. Appl., **2**:1 (1957), 122–129.

[3] B.A. Rogozin, *On the distribution of the first jump*, Theory Probab. Appl., **9**:3 (1964), 450—465.

[4] B.A. Rogozin, *The distribution of the first ladder moment and height and fluctuation of a random walk*, Theory Probab. Appl., **16**:4 (1971), 575–595.

[5] R.A. Doney, *Moments of ladder height in random walks*, J. Appl. Probab, **17**:1 (1980), 248–252.

[6] R.A. Doney, *On the asymptotic behaviour of first passage times for transient random walk*, Probability Theory and Related Fields, **18** (1989), 239–246.

[7] A.V. Nagaev, *On a method of calculating moments of ladder heights*, Theory Probab. Appl., **30**:3 (1986), 569—572.

[8] S.V. Nagaev, *Exact expressions for the moments of ladder heights*, Siberian Math. J., **51**:4 (2010), 675—695.

[9] T.V. Lazovskaya1, S.V. Nagaev, *Problems in calculating moments and distribution functions of ladder heights*, J. Math. Sci., **218**:2 (2016), 195–207.

[10] A.A. Borovkov, *Probability Theory*, Springer, London, 2013.

[11] W. Feller, *An introduction to Probability Theory and its applications. Vol.2*, John Wiley and Sons, New York, 1971.

[12] S.J. Wolfe, *On moments of probability distributions functions*, Lect. Notes Math., **457** (1975), 306–316.

[13] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products. 7th Edition*, Academic Press, 2007.

Владимир Иванович Лотов,
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
lotov@math.nsc.ru