

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 19, стр. 144–144 (2022)

УДК 550.344, 550.311

DOI 10.17377/semi.2022.12.xxx

MSC 11Y35, 86A15

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ И
УСТОЙЧИВЫЙ МЕТОД ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ
РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОГО ШАРА ПЛАНЕТАРНЫХ
РАЗМЕРОВ

А.Г. Фатьянов

АБСТРАКТ. ...

Keywords: ...

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача получения аналитического решения для волновых полей в слоистом шаре относится к числу классических задач математической физики [1]. Однако, несмотря на большое число работ по этой тематике её нельзя считать окончательно завершённой. Действительно, ещё давно начали получать выражения для полей в виде рядов. А коэффициенты этих рядов определялись из систем линейных уравнений, которые получались из условий на границах сферических слоев. Это хорошо работало для шара небольших (в длинах волн) размеров. Но для шара планетарных размеров это не работает. Решение содержит цилиндрические функции произвольных индексов и аргументов, которые быстро (быстрее любой степени) стремятся к нулю и бесконечности [1]. Из-за этого возникают проблемы связанные с устойчивостью вычисления. На первый взгляд их можно обойти, используя классическую асимптотику. Однако для точных расчетов в случае шара планетарных размеров её использовать нельзя. В этом случае в решении возникает помеха [2].

Решение данной задачи строится следующим образом. После преобразования Фурье-Лежандра она сводится в спектральной области к краевой задаче. Далее

FATYANOV, A.G., ANALYTICAL SOLUTION FOR WAVE FIELDS AND A STABLE METHOD FOR ITS CALCULATION FOR A RADially SYMMETRIC SPHERE OF PLANETARY DIMENSIONS.

© 2022 Фатьянов А.Г.

Работа выполнена по госзаданию ИВМиМГ № 0251-2021-0004.

Поступила 1 января 2022 г., опубликована 31 декабря 2022 г.

краевая задача сводена к двум задачам Коши – линейной и нелинейной. Построено явное решение задачи Коши для полученного уравнения Риккати, что не было известно ранее. Это позволило получить в явном виде функцию Грина для исходной краевой задачи в случае произвольной слоистой среды. Для устойчивого вычисления функции Грина получена оригинальная асимптотика в случае больших аргументов и индексов функций Бесселя первого и второго рода. Полученная новая асимптотика имеет наглядный физический смысл. Она совпадает с известным представлением для неоднородных волн в случае плоской геометрии [3], что подтверждает её достоверность. Новая асимптотика позволила устойчиво вычислить аналитическое решение для волновых полей в шаре планетарных размеров. Это дало возможность проводить исследования волновых полей с высокой детальностью.

На основе полученной функции Грина создана программа расчета волновых полей для радиально-симметричной сферической модели Земли с реальными параметрами. В 1934 году Гутенберг и Рихтер обнаружили волновые фазы “предвестники”, наблюдаемые на реальных сейсмограммах впереди первого вступления продольных Р волн. В настоящее время общепринято, что волны “предвестники”, наблюдаемые на сейсмограммах в диапазоне расстояний меньших 145 градусов впереди РКР волн, объясняются рассеянием на мелкомасштабных неоднородностях в низах мантии [4]. Это активно обсуждается в современной литературе. При этом сам Гутенберг считал, что “предвестники” возникают за счет преломления во внешнем ядре Земли [5].

Аналитические расчеты волновых полей и приведенные годографы показали, что для неоднородного внешнего ядра из модели АК135 [6] возникают волны “предвестники”, наблюдаемые на реальных данных. Это подтверждает гипотезу Гутенберга о возникновении “предвестников”.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Математическая постановка задачи моделирования волновых полей формулируется в сферической системе координат $(0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi)$ следующим образом [1]. Требуется найти функцию $u(r, \theta, t)$ из уравнения

$$(1) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}) = \frac{1}{V^2(r)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

с начальными условиями и граничными данными

$$(2) \quad u = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = \frac{\delta(\theta)}{R_0^2 \sin \theta} f(t).$$

В (1)-(2) R_0 - радиус шара, $f(t)$ – временное воздействие, $V(r)$ - скорость продольных волн. Предполагается что она кусочно-постоянна в каждом произвольном сферическом слое $R_{m+1} < r < R_m$. На границах, где скорость продольных волн терпит разрыв, вводятся следующие условия сопряжения для $\forall m$.

$$(3) \quad [u]_{r=R_m} \equiv u|_{R_m^+} - u|_{R_m^-} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=R_m} \equiv \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{R_m^+} - \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{R_m^-} = 0.$$

В (3) знаки “+” и “-” соответственно обозначают верхнюю и нижнюю границу сферического слоя, расположенного на глубине $r = R_m$. Кроме того, вводится условие ограниченности решения в центре шара $u|_{r=0} < \infty$.

3. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

На первом этапе для построения аналитического решения для радиально-симметричного шара с произвольным количеством слоев используется преобразование Фурье-Лежандра по переменным t и θ .

$$(4) \quad u(r, \theta, t) = \frac{1}{2T} \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u(r, k, \omega_n) \exp(i\omega_n t) P_k(\cos \theta)$$

Здесь $P_k(x)$ - полином Лежандра, $\omega_n = n\pi/T$.

В итоге после не сложных преобразований постановка (1)-(3) сводится к двум параметрическому семейству (k, ω_n) краевых задач в каждом слое $R_{m+1} < r < R_m$. В дальнейшем несущественные индексы будут опускаться.

$$(5) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{(k+0.5)^2}{r^2} u = -\frac{\omega^2}{V^2} u$$

$$(6) \quad \frac{du}{dr} - \frac{0.5}{r} u = \frac{2k+1}{2} \frac{1}{R_0^{1.5}} F(\omega) = f_r$$

$$(7) \quad [u] = \left[\frac{du}{dr} - \frac{0.5}{r} u \right] \Big|_{r=R_m} = 0.$$

При этом (5) есть уравнение Бесселя с полуцелым индексом. В (6) $F(\omega)$ - спектр временного воздействия $f(t)$.

Далее для построения решения вводится вспомогательная функция $\beta(r, k, \omega)$ следующим образом

$$(8) \quad \frac{d\beta}{dr} = \beta u$$

Из (6) и (8) видно, что если функция β известна, то искомое решение при $r = R_0$ элементарно получается в виде $u = (\beta(r) - 0.5/r)^{-1} \Big|_{r=R_0} f_r$. Таким образом, функция $(\beta(r) - 0.5/r)^{-1}$ есть не что иное, как функция Грина g . Можно было бы сразу определять функцию Грина. Но из дальнейшего будет ясно, что это сильно бы усложнило выкладки.

Подстановка (8) в (5) дает уравнение на функцию β в каждом слое $R_{m+1} < r < R_m$

$$(9) \quad \frac{d\beta}{dr} + \beta^2 + \frac{1}{r} \beta - \frac{\nu^2}{r^2} + a^2 = 0$$

В (9) $\nu = k + 0.5$, $a = \omega/V$.

4. НАХОЖДЕНИЕ ЯВНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Уравнение (9) это нелинейное уравнение Риккати. Автор не нашел в литературе его решения и получил его самостоятельно.

Для конструирования решения уравнения Риккати вначале рассматривается волновое уравнение для плоской геометрии в цилиндрической системе координат r, z .

$$(10) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

После применения к (10) преобразования Фурье-Бесселя по переменным t и r получаем двухпараметрическое (k, ω) семейство обыкновенных дифференциальных уравнений [7]:

$$(11) \quad \frac{d^2 u}{dz^2} = (k^2 - \frac{\omega^2}{V^2})u \equiv b^2 u$$

В (11) $k = \frac{x_j}{a}$, x_j - корни уравнения $J_0(x) = 0$, a - граница расчетной области. Аналогично (8) вводится вспомогательная функция $\beta(z, k, \omega)$

$$(12) \quad \frac{d\beta}{dz} = \beta u$$

После подстановки (12) в (11) получаем уравнение Риккати

$$(13) \quad \frac{d\beta}{dz} + \beta^2 - b^2 = 0$$

Решение (13) хорошо известно. Представим его в виде

$$(14) \quad \beta(z) = \frac{q_2(e^{-bz})'_z - q_1(e^{bz})'_z}{q_2(e^{-bz}) - q_1(e^{bz})} = -b \frac{q_2 e^{-bz} + q_1 e^{bz}}{q_2 e^{-bz} - q_1 e^{bz}}$$

В (14) e^{-bz} и e^{bz} - фундаментальная система решений (11).

По аналогии с (14) решение (9) при $r \in (R_{m+1}, R_m]$ ищем в виде

$$(15) \quad \beta(r) = \frac{p_2(J_v(ar))'_r - p_1(Y_v(ar))'_r}{p_2 J_v(ar) - p_1 Y_v(ar)} = a \frac{p_2 J'_v(ar) - p_1 Y'_v(ar)}{p_2 J_v(ar) - p_1 Y_v(ar)}$$

В (15) $J_v(ar)$ и $Y_v(ar)$ - функции Бесселя первого и второго рода индекса v . Т.е. это фундаментальная система решений уравнения Бесселя (5). Непосредственной подстановкой можно убедиться, что формула (15) действительно является решением нелинейного уравнения Риккати (9).

Пусть теперь на верхней границе слоя $r = R_{m+1}$ с индексом $m+1$ задана функция β

$$(16) \quad \beta|_{r=R_{m+1}} = \beta_{m+1}^+$$

Используя (15) и (16) получим значения неопределенных коэффициентов p_1 и p_2 .

$$p_1 = aJ'_v(aR_{m+1}) - \beta_{m+1}^+ J_v(aR_{m+1}),$$

$$(17) \quad p_2 = aY'_v(aR_{m+1}) - \beta_{m+1}^+ Y_v(aR_{m+1}), \quad a = \omega/V.$$

Выражения (15)-(17) дают решение задачи Коши для нелинейного уравнения Риккати (9) в явном виде.

Используя (15) найдем значение вспомогательной функции β на нижней границе слоя $r = R_m$ с индексом m $\beta_m^- = \beta(R_m)$.

Далее с учетом условий сопряжения (7) найдем значение β на верхней границе слоя $r = R_m$ с индексом m . Из условий сопряжения легко показать, что в данном случае они совпадают.

$$(18) \quad \beta_m^+ = \beta_m^-.$$

Продолжая этот процесс по количеству слоев n получим значение вспомогательной функции β при $r = R_0$. Для завершения построения аналитического решения нужно получить значение β на нижней границе последнего слоя с индексом n при $r = R_n$. Решение с учетом ограниченности в центре шара при $r = 0$ берется в следующем виде [1]

$$(19) \quad u = c_1 J_v\left(\frac{\omega}{V}r\right) = c_1 J_v(ar)$$

Тогда из (8) с учетом (19) получим

$$(20) \quad \beta_n^- = a \frac{J'_v(aR_n)}{J_v(aR_n)}$$

Начиная рекуррентный процесс по формуле (20) и продолжая его по (15) n раз (по количеству слоев) с учетом (18) получим значение β , а тем самым и функцию Грина в спектральной области при $r = R_0$.

5. УСТОЙЧИВОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ШАРА ПЛАНЕТАРНЫХ РАЗМЕРОВ

Использовать полученное аналитическое решение для компьютерного расчета волновых полей можно только для шара небольших (в длинах волн) размеров. Известно, что функция Бесселя $J_{k+0.5}(z) = J_v(z)$ при увеличении k быстро (быстрее любой степени) стремится к нулю. А функция $Y_{k+0.5}(z)$ стремится к бесконечности [1]. Поэтому в решении (15) возникает особенность типа $\frac{\infty \cdot 0 - 0 \cdot \infty}{\infty \cdot 0 - 0 \cdot \infty}$. Причем, чем больше радиус шара в относительных величинах (длинах волн) тем быстрее она возникает. Это приводит к тому, что вычисление на компьютере становится неустойчивым.

Этот эффект неустойчивости присутствует и для плоской геометрии в формуле (14). Однако формулу (14) элементарно привести к виду, дающему возможность устойчивого вычисления. Умножим числитель и знаменатель в (14) на e^{-bz} . В этом случае (14) примет вид пригодный для устойчивого вычисления. В ней не будет экспонент с положительной степенью.

Для сферической геометрии в (15) так сделать нельзя. Из общих соображений ясно, что для больших индексов цилиндрических функций нужно использовать асимптотику. Известны классические представления

$$(21) \quad J_v(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \left(\frac{ez}{2v}\right)^v, Y_v(z) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi v}} \left(\frac{ez}{2v}\right)^{-v}$$

Асимптотические формулы (21) верны при больших $v (v \gg |z|)$ [8]. На первый взгляд никаких проблем здесь нет. Нужно просто при $v \rightarrow \infty$, когда цилиндрические функции $J_v(z) \rightarrow 0$ и $Y_v(z) \rightarrow \infty$, заменить их на асимптотические представления из (21). Однако так делать нельзя. В [2] показано, что использование классической асимптотики (21) при вычислении волновых полей для шара планетарных размеров дает помеху. Дело в том, что здесь классическая асимптотика (21) не применима. Она верна при $v \gg |z|$. А, например, функция $Y_v(z) \rightarrow \infty$ для шара планетарных размеров не только при $v \gg |z|$ а уже и при $v \sim |z|$.

Ниже будет получена новая асимптотика цилиндрических функций пригодная для использования в случае шара планетарных размеров. Введем обозначение

$$(22) \quad x(z) = z \frac{p_2 J'_v(z) - p_1 Y'_v(z)}{p_2 J_v(z) - p_1 Y_v(z)}$$

Пусть $J_v(z) \sim 0$ и $Y_v(z) \sim \infty$. Тогда применяя правило Лопиталья к (22) получим

$$(23) \quad x(z) = \frac{p_2 J'_v(z) - p_1 Y'_v(z) + z(p_2 J''_v(z) - p_1 Y''_v(z))}{p_2 J'_v(z) - p_1 Y'_v(z)} = 1 + z \frac{p_2 J''_v(z) - p_1 Y''_v(z)}{p_2 J'_v(z) - p_1 Y'_v(z)}$$

Из определения цилиндрической функции $Z_\nu(z)$ следует:

$$(24) \quad Z''_\nu(z) + \frac{1}{z} Z'_\nu(z) + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) Z_\nu(z) = 0.$$

Здесь $Z_\nu(z)$ - произвольная цилиндрическая функция $J_\nu(z), Y_\nu(z), H^{(1,2)}_\nu(z)$. С использованием (24) продолжим (23). В итоге получим

$$(25) \quad x(z) = 1 - 1 - z^2 \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) \frac{1}{z} \frac{p_2 J_v(z) - p_1 Y_v(z)}{p_2 J'_v(z) - p_1 Y'_v(z)} = -z^2 \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) \frac{1}{x(z)}$$

Из (25) получается следующее квадратное уравнение на $x(z)$.

$$(26) \quad x^2(z) - \nu^2 + z^2 = 0$$

Оно имеет следующие корни:

$$(27) \quad x_{1,2} = \pm \sqrt{\nu^2 - z^2}$$

И тем самым

$$(28) \quad \beta(r) = a \frac{p_2 J'_\nu(ar) - p_1 Y'_\nu(ar)}{p_2 J_\nu(ar) - p_1 Y_\nu(ar)} \sim \pm \frac{1}{r} \sqrt{v^2 - r^2 \omega^2 / V^2}$$

Выражение (28) дает новую асимптотику цилиндрических функций для произвольных $z = ar$ и ν , когда $J_\nu(z) \sim 0$ и $Y_\nu(z) \sim \infty$.

Теперь устойчивое вычисление для формулы пересчета (15) осуществляется следующим образом. Если $J_\nu(\frac{\omega}{V} R_{m+1}) \neq 0$ и $Y_\nu(\frac{\omega}{V} R_{m+1}) \neq \infty$ то особенностей не возникает и устойчивое вычисление обеспечивается формулами (15) и (17). Если $J_\nu(\frac{\omega}{V} R_{m+1}) \sim 0$ и $Y_\nu(\frac{\omega}{V} R_{m+1}) \sim \infty$ но $J_\nu(\frac{\omega}{V} R_m) \neq 0$ и $Y_\nu(\frac{\omega}{V} R_m) \neq \infty$ то

$$(29) \quad \beta(R_m) = \beta_m^- = \frac{\omega}{V} J'_\nu(\frac{\omega}{V} R_m) / J_\nu(\frac{\omega}{V} R_m)$$

Пусть $J_\nu(\frac{\omega}{V} R_{m+1}) \sim 0$ и $Y_\nu(\frac{\omega}{V} R_{m+1}) \sim \infty$ и $J_\nu(\frac{\omega}{V} R_m) \sim 0$ и $Y_\nu(\frac{\omega}{V} R_m) \sim \infty$ тогда из (28) получим

$$(30) \quad \beta(R_m) = \beta_m^- = \pm \frac{1}{R_m} \sqrt{v^2 - R_m^2 \omega^2 / V^2}$$

В [9] получена новая асимптотика цилиндрических функций

$$(31) \quad z \frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)} \sim \sqrt{\nu^2 - z^2} \text{ при } J_\nu \rightarrow 0$$

Если применить (31) к (29), то получим в точности (30). Это, с одной стороны, подтверждает правильность полученной в работе новой асимптотики (28). С другой - определяется выбор знака "+" в (28) и (30).

Интересно посмотреть разницу между новой и классической асимптотикой для формулы (30). С использованием (21) не трудно получить, что формула (30) для классической асимптотики примет вид

$$(32) \quad \beta(R_m) = \beta_m^- = + \frac{1}{R_m} \cdot \nu$$

Видно, что при больших ν формулы (30) и (32) становятся асимптотически эквивалентными. Кроме того, полученная для сферической геометрии формула (30) совпадает с аналогичной для плоской геометрии. Из (11) и (14) получим, что $\beta = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{V^2}}$. Это совпадает с (30), если радиус сферического слоя R_m идентифицировать с границей расчетной области a .

Заметим, что получение новой асимптотики основано на применении правила Лопиталья. Его здесь можно использовать в случае больших индексов цилиндрических функций, так как если, например, функция Бесселя близка к нулю, то и её производная также будет близка к нулю. Отметим еще, что при вычислениях на компьютере бесконечность понимается как выход за границы числового диапазона для используемой платформы.

С использованием (15), (29) и (30) определяем решение в спектральной области. А используя (4) получим искомое решение в физической области.

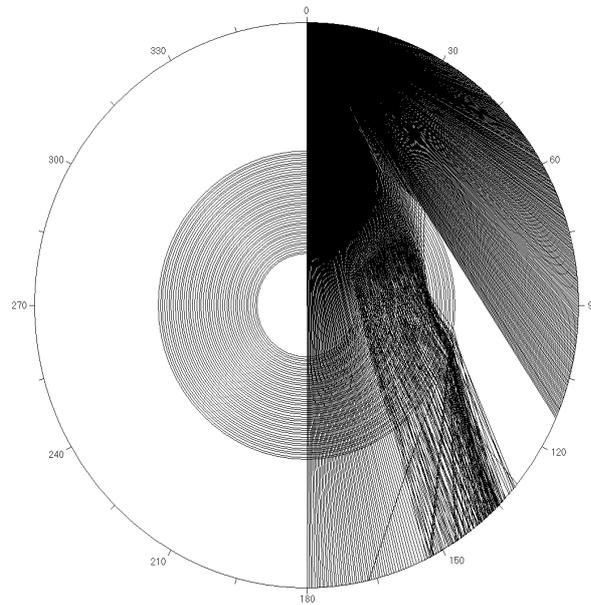


Рис. 1. Модель внешнего ядра (48 слоев) из АК135 и лучевая картина.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

В 1934 году Гутенберг и Рихтер обнаружили волновые фазы “предвестники” наблюдаемые на реальных сейсмограммах впереди первого вступления продольных Р - волн. В настоящее время общепринято, что волны “предвестники”, наблюдаемые на сейсмограммах в диапазоне расстояний меньших 145 градусов впереди *PKP*-волн, объясняются рассеянием на мелкомасштабных неоднородностях в низах мантии [4]. Обозначение РКР в сейсмологии означает продольные волны Р, которые проходят через границу ядро – мантия [3]. Но ряд исследователей говорил о возможности возникновения предвестников и в радиально-симметричной сферической Земле. Т.е. для возникновения “предвестников” вовсе не обязательно наличие неоднородностей. Так, например, сам Гутенберг считал, что “предвестники” возникают за счет преломления во внешнем ядре Земли [5].

На рисунке 1 приведена модель среды для классической сферической модели Земли АК135 [6] и лучевая картина. Причем модель Земли взята только во внешнем ядре. Там 48 сферических слоев. В мантии и внутреннем ядре Земли взята усредненная скорость продольных волн равная 11000 км/сек. На рисунке 2 приведен аналитический расчет волнового поля для неоднородного внешнего ядра из модели АК135, приведенного на рисунке 1. По горизонтали приведено расстояние в градусах (125-133). По вертикали - время в секундах (1080-1190).

В работе [10] показано, что “предвестники” возникают в полной классической сферической модели Земли АК135. Из рисунка 2 видно, что “предвестники” возникают во внешнем ядре Земли. Они выделены двумя стрелками. Импульс $f(t)$ в источнике взят в виде функции Гаусса с несущей частотой в 1 герц [11]. А у “предвестников” частота составляет примерно 1.2 герц. Это соответствует экспериментальным данным. Кроме того, из рисунка 2 видно, что “предвестники” четко

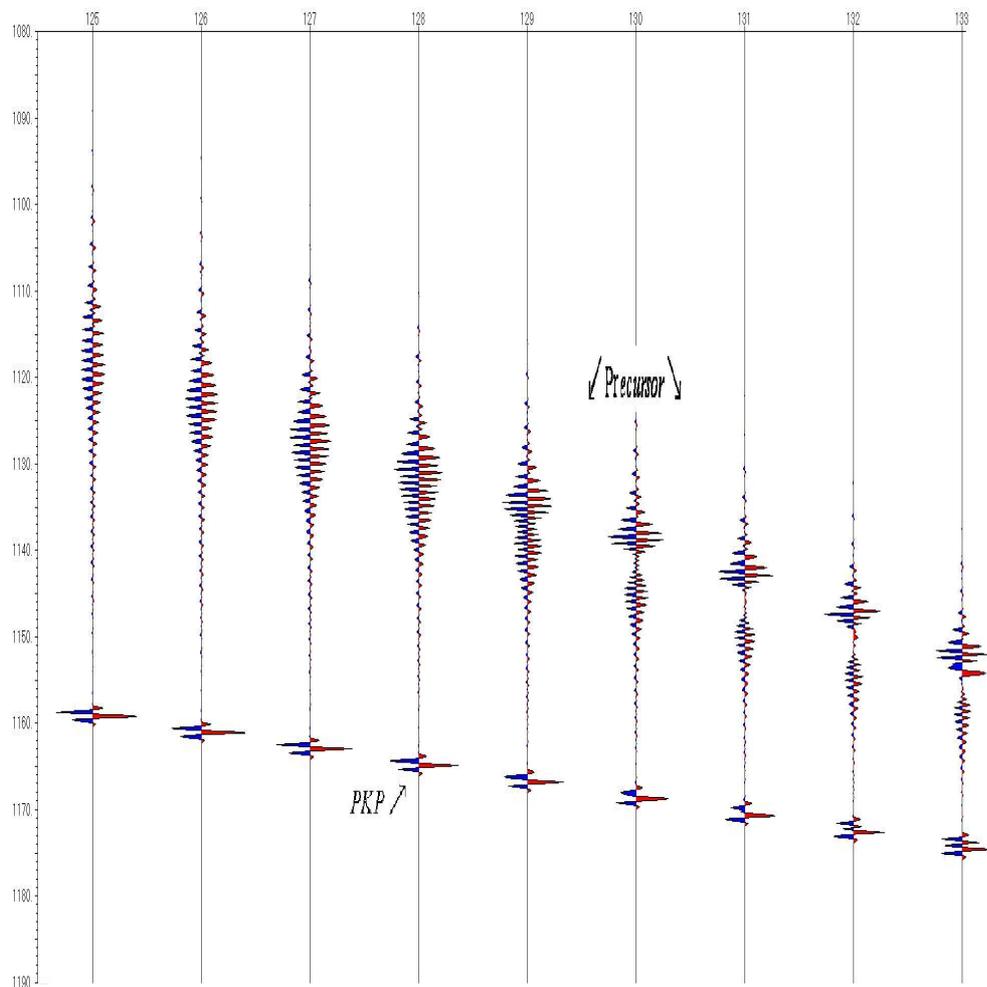


Рис. 2. Расчет волнового поля “предвестников” для неоднородного внешнего ядра из модели АК135. По горизонтали – расстояние в градусах. По вертикали – время в секундах.

разделяются на две фазы (волны). Этот эффект присутствует на реальных данных. В рамках же объяснения этого эффекта гипотезой рассеяния на мелкомасштабных неоднородностях в низах мантии Земли одним рассеивателем не обойтись. Требуется ввести 2 рассеивателя [4].

На рисунке 3 приведен расчет для тонкого слоя в плоской геометрии, проведенный по методу из [7]. Мощность тонкого слоя на рисунке 3 – четверть длины волны ($\lambda/4$). Из рисунков 2 и 3 видно, что форма волны для “предвестников” в сферической геометрии близка к форме волны для тонкого слоя в плоской геометрии. Хотя мощность слоев во внешнем ядре из модели АК135 примерно равна 10 длинам волн. Т.е. там заведомо нет тонких слоев. Иначе говоря, при отсутствии в шаре тонких слоев в нем могут возникать волновые поля, характерные исключительно

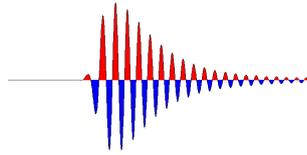


Рис. 3. Форма волны в тонком слое мощностью $\lambda/4$ в случае плоской геометрии.

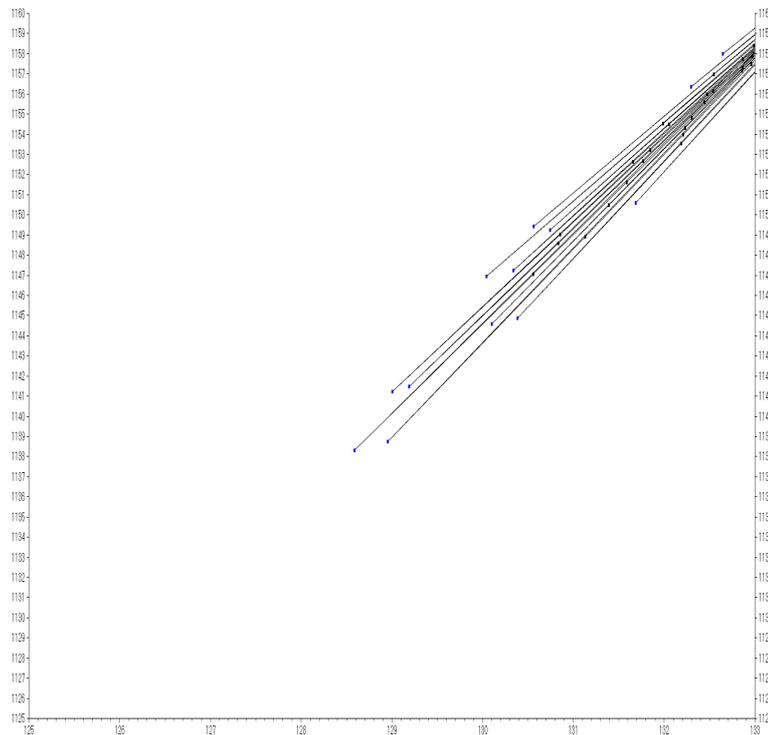


Рис. 4. Годограф преломленных P - волн для внешнего ядра из модели АК135.

для тонких слоев в плоской геометрии и имеющие вид характерный для рассеивающего объекта.

На рисунке 4 приведен годограф прямой P -волны. А на рисунке 5 приведен тот же годограф, но при уменьшении угла выхода луча из источника. На рисунках 4 и 5 по горизонтали приведено расстояние в градусах (125-133). По вертикали - время в секундах (1125-1160). Для выдачи годографов на рисунках 4 и 5 выбрано окно так, чтобы в него входили только волны "предвестники" без волн РКР.

Из рисунков 4 и 5 видно, что при преломлении прямых P -волн во внешнем низкоскоростном ядре за счет сферичности Земли возникает не одна волна. Волн становится много. Они образуют интерференционную систему. Это и

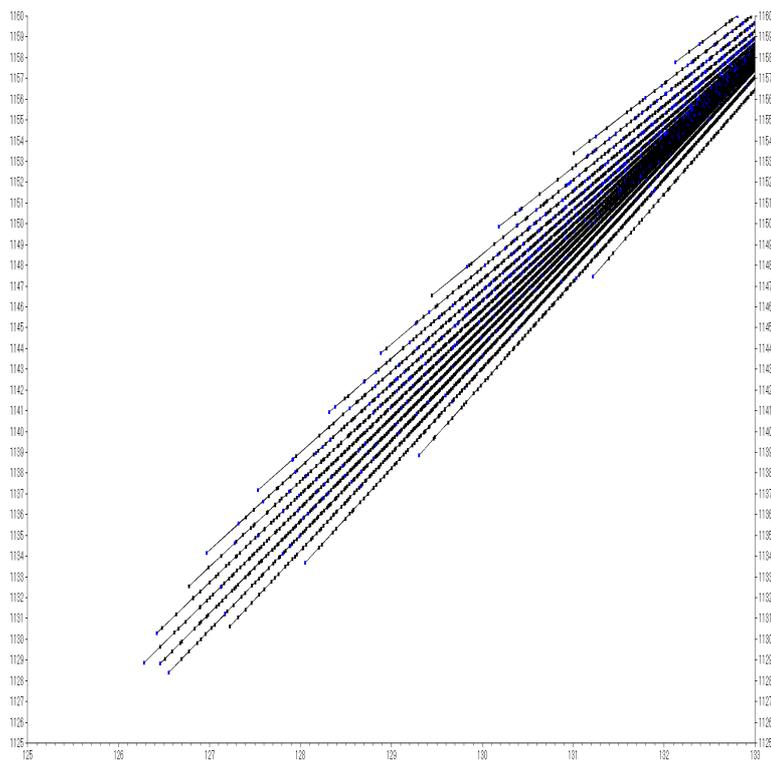


Рис. 5. Годограф преломленных P - волн из рисунка 4 при уменьшении угла выхода луча из источника.

приводит к возникновению высокочастотного вступления впереди PKP -волн. Кроме того при этом на каждую ветвь годографа преломленных волн "садится" еще и своя дифракционная волна. Одна дифракционная волна имеет небольшую амплитуду. Но их будет много и их интерференция приводит к тому, что первое вступление продолжается еще дальше в сторону меньших углов (в зону тени). Иначе говоря, это и приводит к возникновению "предвестников". Таким образом подтверждается гипотеза Гутенберга, что "предвестники" возникают за счет преломления во внешнем ядре Земли [5]. То есть для объяснения "предвестников" не нужно вводить рассеиватели в нижней мантии [4] или еще где-либо. Они возникают и для классической радиально-симметрической сферической модели Земли за счет феномена шара.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построена функция Грина для произвольного радиально-симметричного слоистого шара в спектральной области. Краевая задача сведена к задаче Коши для нелинейного уравнения Риккати. Построено аналитическое решение полученного уравнения Риккати в явном виде, что не было известно ранее. Это дало возможность получить функцию Грина в явном виде. Для шара планетарных размеров в полученной функции Грина при расчете волновых полей возникает неустойчивость. Получена новая асимптотика цилиндрических

функций. Это позволило устойчиво вычислять волновые поля для шара планетарных масштабов без помех. На основе полученной функции Грина создан параллельный код для расчета волновых полей для радиально-симметричной сферической модели Земли с реальными параметрами.

Аналитические расчеты показали, что для модели неоднородного внешнего ядра возникают волны “предвестники”, наблюдаемые на реальных данных. По современным представлениям этого быть не может. Для объяснения предвестников вводят рассеиватели в нижней мантии [4]. В работе показано, что “предвестники” возникают за счет низкоскоростного внешнего ядра Земли. Это подтверждает гипотезу Гутенберга о возникновении “предвестников” [5].

REFERENCES

- [1] Tikhonov A. N. and Samarskii A. A., *Equations of mathematical physics*, Nauka, Moscow, (1997).
- [2] Fatyanov A.G., *The stable analytical solution for the wave fields in the sphere*, Mat. Zamet. SVFU, 23, No. 3, p. 91–103 (2016).
- [3] Aki, K. and Richards P., *Quantitative Seismology*, San Francisco: W. H. Freeman, 1980; Moscow: Mir, 1983.
- [4] Hedlin M.A.H., Shearer P.M., Earle P.S, Nature. 1997. Vol. 387 (6629). P. 145-150.
- [5] Gutenberg, B., Eos Trans. AGU. 1957, 38. P. 750-753.
- [6] B. L. N. Kennett, Engdahl E.R., Buland R., Geophys. J. Int. 1995. No. 122. P. 108–124.
- [7] Fatyanov, A.G., *Semi-analytical method for solving direct dynamical problems of stratified media*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **310** (1990), 2, 323–327.
- [8] Shanjie Zhang, Jian-Ming Jin, *Computation of special functions*, John Wiley, 1996, 717p.
- [9] Fatyanov A.G., Burmin V.Yu., *Kinematics of Wave Fields in a Sphere*, Izvestiya - Atmospheric and Oceanic Physics, **57**, 7, (2021), 739-745.
- [10] Fatyanov, A.G. and Burmin, V.Yu., *Occurrence of precursors of PKP waves in the layered radial-symmetric Earth*, Doklady Earth Sciences, **489**, 1, (2019), 1313–1317.
- [11] Fatyanov, A.G. and Burmin, V.Yu., *The focusing effect of P-wave in the Moon's and Earth's low-velocity core. Analytical solution*, Planetary and Space Science, **153** 2018, 100–106.

ALEXEY GENNADIEVICH FATYANOV
 INSTITUTE OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND MATHEMATICAL GEOPHYSICS SB RAS,
 PR. LAVRENTJEVA, 6,
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
E-mail address: fat@nmsf.sbcc.ru