ОТЗЫВ РЕЦЕНЗЕНТА

на работу Е.В.Мищенко

"Stability condition and Riesz bounds for exponential splines".

В рецензируемой работе изучаются целочисленные сдвиги экспоненциальных аналогов B-сплайнов, называемых E-сплайнами, и находятся их границы Рисса в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Нахождение этих границ является основным результатом работы. Попутно автор устанавливает предельную связь между экспоненциальными и полиномиальными сплайнами. E-сплайны вводятся с помощью подхода, основанного на использовании операторов свёртки. Полученные результаты являются новыми, тематика представляется интересной и полезной, в том числе и для возможных приложений.

Однако, имеется немало замечаний к тексту рецензируемой работы.

Замечания состоят в следующем.

1) В п.2 рецензируемой работы ("Basic concepts and notation") построены экспоненциальные аналоги B-сплайнов, называемые далее E-сплайнами. В работе E-сплайны построены рекуррентно с помощью операторов свёртки. Однако, известен и другой подход к построению аналогов B-сплайнов, который основан на применении обобщённых разделённых разностей к функции Грина соответствующей задачи Коши. Он позволяет построить базисы, аналогичные полиномиальным B-сплайнам, для широкого класса $\mathcal{L}$-сплайнов, определяемых линейными дифференциальными операторами. Этот подход был реализован в работах:
Schumaker L.L. On hyperbolic splines // J. Approxim. Theory. 1983. Vol. 38, no. 2. P. 144–166; Schoenberg I.J. On Micchelli's theory of cardinal $\mathcal{L}$-splines // Studies in spline functions and approximation theory. Acad. Press, 1976. P. 251–276; Li Y. On the recurrence relations for B-splines defined by certain L-splines // J. Approxim. Theory. 1985. Vol. 43 P. 359–369 и ряде других, а также достаточно подробно изложен в монографии Schumaker L.L. Spline functions: basic theory. (Cambridge Mathematical Library). Third edition. Cambridge: Cambridge University Press. 2007.

В отмеченной выше монографии есть *Theorem 10.21*, в которой доказано двойное неравенство, аналогичное установленному в рецензируемой работе, причём там это сделано для весьма обширного класса $\mathcal{L}$-сплайнов и для всех L_q-норм $(1 \leq q \leq \infty)$.

Отличие от результата рецензируемой работы состоит в том, что в монографии Л. Шумейкера рассматриваются $\mathcal{L}$-сплайны на конечном отрезке.

Считаю, что рецензируемую работу следует дополнить ссылками на эти исследования.

2) Рассматриваемые автором экспоненциальные сплайны являются частным случаем $\mathcal{L}$-сплайнов, определяемых дифференциальным оператором

$$\mathcal{L}_m(D) = (D - pI)(D - 2pI) \dots (D - mpI),$$

где D – оператор дифференцирования, I – тождественный оператор, $m \in \mathbb{N}$ (см., например, отмеченные выше статьи Шенберга и Шумейкера).

Этот факт также должен быть отмечен в работе.

3) Основной результат работы должен быть сформулирован в виде Теоремы.

4) Доказываемые в работе Теоремы целесообразно занумеровать (Теорема 1, Теорема 2 и т.д.).

5) Для каждого доказываемого утверждения нужно обозначить начало и конец его доказательства.

6) На с.3 надо написать, что $\delta(x)$ – функция (распределение) Дирака.

7) На с.4 предел $\chi_{[0,1]}(x) - \varphi_p(x)$ при $p \to 0$ легко вычисляется без применения теоремы Лопиталя и формулы конечных приращений

$$\lim_{p\to 0}(\chi_{[0,1]}(x) - \varphi_p(x)) = \lim_{p\to 0}\frac{e^p - 1 - pe^{px}}{e^p - 1} = 1 - \lim_{p\to 0}\frac{pe^{px}}{e^p - 1} =$$

$$= 1 - \lim_{p\to 0} e^{px} \lim_{p\to 0}\frac{p}{e^p - 1} = 1 - 1 = 0$$

благодаря известному "замечательному" пределу $\lim\limits_{p\to 0}\frac{e^p-1}{p} = 1$.

8) На с.9 написана лишняя скобка в знаменателях у факториалов $(2m-1)!$.

9) На с.9 формула после третьей строки п.2 (после слов "In [] it was shown among others that") непонятна, поскольку неясно, что представляет собой C_{m-1}, а также не написано, на какую работу даётся ссылка. Видимо, это работа [3] из списка литературы и применяется теорема 1 из [3], а точки локальных минимумов и максимумов тригонометрических полиномов $C_{m-1}(t)$ найдены в утверждении 1 из [3]. Здесь надо аккуратно сослаться на нужные известные результаты.

9) На с.10 последнее двойное неравенство излишне, поскольку из хорошо известных неравенств

$$\sin^2\xi \le \xi^2, \quad \sinh^2 p \ge p^2$$

сразу же вытекает первое неравенство с.11.

10) На с.11 утверждается, что функция $\frac{1}{p^2} - \frac{1}{\sinh^2 p}$ достигает максимального значения $1/3$ в точке $p = 0$. Нужно привести хотя бы фрагментарное доказательство этого утверждения, тем более, что при $p = 0$ функция формально не определена.

11) На с.11 также утверждается, что функция $\frac{1}{\sin^2\xi} - \frac{1}{\xi^2}$ достигает минимального значения в точке $\xi = 0$. Это утверждение тоже требует обоснования.

12) На с.11 неравенство

$$\frac{1}{p^2} - \frac{1}{\sinh^2 p} \le \frac{1}{\sin^2\xi} - \frac{1}{\xi^2}$$

должно быть обосновано более подробно, а именно предлагаю написать следующее:

$$\frac{1}{p^2} - \frac{1}{\sinh^2 p} \le \sup_{p\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{\sinh^2 p}\right) = \sup_{p\in[0,+\infty)}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{\sinh^2 p}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} = \inf_{\xi \in [0,+\infty)} \left(\frac{1}{\sin^2 \xi} - \frac{1}{\xi^2} \right) \leq \frac{1}{\sin^2 \xi} - \frac{1}{\xi^2}.$$

В этом месте используется красивая находка автора: sup одной функции совпадает с inf другой, и эту находку целесообразно показать.

13) На с.11 есть слова "exponential spline of any order". Здесь надо пояснить, что такое порядок сплайна. В работах, посвящённых $\mathcal{L}$-сплайнам, термин "порядок сплайна" обычно означает порядок зануляющего дифференциального оператора, если не оговорено иное. Например, порядок сплайна, составленного из алгебраических полиномов степени m, равен $m + 1$.

14) Где-нибудь в начале работы (до всех доказательств) желательно написать, что функции $\frac{\sin ax}{x}$, $\frac{\sinh bx}{x}$ всюду, где это нужно, предполагаются доопределёнными в точке $x = 0$ их предельными значениями.

Таким образом, в текст рецензируемой работы предлагается внести большое число изменений. Поэтому, считаю, что работу следует направить автору для доработки с учётом сделанных замечаний.

Старший научный сотрудник ИММ УрО РАН
кандидат физ.-мат наук Новиков С.И.

01.09.2023