

Отзыв

на статью О.И. Павлова «Closed subsets and the local structure of monotonically normal compacta»

Статья посвящена монотонно нормальным компактам. Это важный и интересный класс компактов, представляющий собой естественное обобщение класса метризуемых компактов и содержащий все линейно упорядоченные компакты. В статье доказаны новые трудные теоремы, представляющие большую ценность. Основная теорема состоит в том, что для всякой точки a несчетного характера τ в монотонно нормальном компакте X существует компакт $K \subset X$ мощности τ , для которого a является единственной точкой полного накопления, причем K устроен очень просто: это либо одноточечная компактификация дискретного пространства, либо образ интервала ординалов $[0, \tau]$ или (в случае сингулярного τ) $[0, \tau)$ при факторном отображении, стягивающем в одну точку замкнутое неограниченное подмножество этого интервала. Важность этого результата трудно переоценить. В частности, автор выводит из него метризуемость всякого монотонно нормального компакта с малой диагональю, что является существенным продвижением в решении старой проблемы о метризуемости всякого компакта с малой диагональю, а также однородность всякого G_δ -однородного монотонно нормального компакта счетной тесноты.

Полученные в статье результаты безусловно достойны публикации и украсят любой математический журнал широкой тематики, однако к их изложению у меня есть претензии; все они перечислены ниже.

1. Стиль изложения делает чтение весьма затруднительным. Такое впечатление, что автор пишет доказательства для себя и считает, что если он сам их понимает, то и читатель тоже поймет. Он молчаливо использует (видимо, считая их широко известными) факты, которые с трудом вспомнит даже всесторонне образованный тополог, если только он не занимается в данный момент монотонно нормальными пространствами (не говоря о читателе, который только начинает ими интересоваться).

2. Автор не считает нужным давать определения многих понятий (хотя кое-какие определения он все-таки дает по ходу дела). Например, неплохо было бы по меньшей мере дать определение монотонно нормального пространства и разъяснить хотя бы самые основные обозначения (такие как LOTS, GO, cf и $A(\tau)$) и указать источник, где можно найти прочие понятия и обозначения (хотя бы книгу Энгелькинга).

3. Хорошо бы в конце формулировки леммы 1 заменить “So” на “Moreover”, а в конце ее доказательства вставить пару слов, поясняющих, почему X содержит замкнутую копию интервала $[0, \beta]$.

4. В первой строке доказательства леммы 1 следует пояснить, почему указанный максимум существует.

5. Абзац после вынесенной формулы (*) лучше начать с определения множества B . Кроме того, примечание 3 вызывает удивление — это полноценный кусок доказательства. На мой взгляд, его не стоит отделять от основного текста.

6. Вежливость по отношению к читателю требует сказать хотя бы что-нибудь о выпуклых компонентах перед леммой 2. В частности, я не могу понять, почему выпуклые компоненты множества $L \setminus f^{-1}(a)$ обязаны быть открытыми. Если это не так, необходимо заменить “convex (and open)” на “open convex” в формулировке леммы и в доказательстве везде перед “convex” вставить “open”.

7. В формулировке леммы 3, вероятно, следует убрать скобки вокруг “open”.

8. В начале доказательства леммы 3 “Assume the contrary” следует заменить на “If Z is not covered by any finite subcollection of \mathcal{U} ”.

9. Там же: упоминание, что сепарабельное ЛУТП удовлетворяет первой аксиоме счетности, требует ссылки или пояснения.

10. Пункт b леммы 3 следует не из пункта a, а из компактности пространства L .

11. Пункт d леммы 3 нуждается в пояснении.

12. Формулировка пункта (2) теоремы 1 неудовлетворительна. Фраза “ a is not a unique accumulation point of any subset of $X \setminus \{a\}$ of cardinality τ ” имеет двойкий смысл, а “there is $[0, \tau] \subset L$ such that...” нельзя назвать иначе как форменным безобразием. В следующем пункте автор ведет себя аккуратнее.

13. В начале доказательства теоремы 1, вероятно, следует заменить “convex (and open)” на “open convex”.

14. Там же: сноска 4 выглядит неуместно, хорошо бы превратить ее в часть текста.

15. В третьем абзаце доказательства теоремы 1 автор поясняет, что под множеством типа G_τ он имеет в виду пересечение τ открытых множеств. Это вполне стандартное использование такого обозначения. Однако из дальнейшего (см., например, третью строку на с. 148) становится ясно, что на самом деле автор имеет в виду под множеством типа G_τ множество, которое можно представить в виде пересечения τ открытых множеств и нельзя представить в виде пересечения меньшего числа открытых множеств. Это обязательно нужно отметить, и я рекомендую использовать какое-нибудь нестандартное обозначение, например, $G'_{=\tau}$.

16. Четвертый абзац доказательства теоремы 1: следует объяснить, почему M'' имеет предельные точки в U'' .

17. Доказательство теоремы 1, Case I. Первые два предложения в абзаце, который начинается с “Since ...”, нуждаются в разъяснении.

18. Страница 148, строка 7: после “that” хорошо бы вставить “the τ_α are chosen so that”. Кроме того, хотелось бы объяснения, почему во всех точках y_α характер меньше τ .

19. В первой строке после вынесенной формулы (***) на с. 148 перед “ordinal” надо вставить “uncountable”.

20. В строке перед формулой (***) на с. 148 “to begin with” неуместно. Вероятно, автор имел в виду “we can assume from the very beginning that...”.

21. В первой строке на с. 149 перед “mapping” надо вставить “continuous”.

22. Начало второго абзаца на с. 149: “Conditions of Theorem 1 characterize” надо заменить на “Each condition of Theorem 1 characterizes”.

23. Теорема 2 сформулирована неудачно. Надо сразу пояснить, что K , о котором идет речь, — это тот самый компакт, существование которого утверждается теоремой 1, а то фраза “Depending on the suitable condition...” выглядит по меньшей мере странно.

24. В самом начале доказательства теоремы 2 хорошо бы напомнить, что любой монотонно нормальный компакт является образом линейно упорядоченного компакта при неприводимом непрерывном отображении (поэтому применима теорема 1), и непременно надо сказать, что в дальнейшем это отображение обозначается через f .

25. Продолжение доказательства теоремы 2: фраза “Condition (2) implies Theorem 2 trivially with” неудачна. Можно сказать “If condition (2) in Theorem 1 holds, then case (a) of Theorem 2 occurs”.

26. Слова “at the first place” на второй строке доказательства теоремы 3 неуместны.

27. В конце доказательства теоремы 3 нужно объяснить, чему противоречит наличие G_δ -диагонали у подпространства Y .

28. В формулировке теоремы 4 “at a ” следует перенести из конца второй строки в самый конец.

29. В формулировке леммы 4 автор говорит о множестве предельных точек семейства открытых множеств. Судя по всему, он имеет в виду множество предельных точек объединения этого семейства. Так и следует писать.

30. Доказательство леммы 4: дизъюнктность семейства $\{V_x : x \in B\}$ в X (а не только в $X \setminus B'$) следует объяснить, равно как и то, что все множества V_x можно считать непересекающимися с B' . Все это с очевидностью вытекает из замкнутости множества B' , но ее надо обосновать.

31. В доказательстве леммы 4 в нескольких местах упоминаются предельные точки семейств открытых множеств. Надо уточнить, что имеется в виду (см. замечание 29 выше).

32. Доказательство леммы 4, третья строка с конца: меня смущает выражение “properly partially contain”. Опрос Гугла показал, что его оно тоже смущает. Надо бы переформулировать иначе.

33. Доказательство теоремы 4, третья строка с конца: “may not contain” имеет двойной смысл, надо переформулировать.

34. Формулировка теоремы 5 не годится. Сначала неплохо бы объявить, что применима теорема 2 (и, стало быть, имеет место один из случаев, перечисленных в ее формулировке). При перечислении возможностей нельзя писать, скажем, «В пункте (а) теоремы 2 выполнено то-то и то-то», потому что пункт (а) теоремы 2 — это просто часть формулировки теоремы 2, он уже давно зафиксирован и доказан, и что там выполнено, то и выполнено. Надо написать что-то вроде “If case (a) of Theorem 2 occurs ...”.

35. То же относится к доказательству теоремы 5. Как минимум надо везде заменить “item” на “case”.

36. Во втором абзаце доказательства теоремы 5 надо пояснить, почему мы можем считать все $W_\alpha F_\sigma$ -множествами.

37. Из фразы перед формулировкой теоремы 6 можно заключить, что всякое монотонно нормальное пространство счетной тесноты однородно. Ясно, что автор имел в виду пространство X , удовлетворяющее тем же условиям, что и в начале абзаца, но суть как раз в том, что в присутствии монотонной нормальности нужны не все эти условия, а только некоторые из них, и поэтому получается некоторая путаница. Надо как-то переделать эту фразу — либо добавить предположения компактности и G_δ -однородности, либо написать не то, что хватит одной изокомпактности, а то, что без ω -линделевости можно обойтись.

38. Конец доказательства леммы 5 скомкан. Надо явно отметить его квадратиком, а потом спокойно завершить доказательство теоремы 5 и отметить его конец другим квадратиком.

39. Имеются и претензии косметического плана: в тексте встречаются русские слова («Доказательство», примечание на первой странице, имя автора в колонтитуле); после многих вынесенных формул имеются ненужные абзацные отступы; обозначение сужения отображения нестандартно и потому неудачно ($f|_A$ вместо $f|_A$); обозначение гомеоморфизма тоже нестандартно и еще более неудачно, потому что воспринимается как приближительное равенство (\approx вместо \cong). Обозначение конфинальности (cf) лучше набирать прямым шрифтом, а не курсивом, поскольку это сокращение. Кроме того, мне бы хотелось убрать несколько неопределенных артиклей (например, в ситуациях типа “space with a small diagonal” или “compactum of an uncountable character”) и вставить несколько определенных (“the complement to which”).

После внесения исправлений статью можно (и нужно) будет опубликовать в «Сибирских электронных математических известиях».