

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том XX, стр. (2023)
DOI XXXXXXXXXXXXXУДК 517.925
MSC 34C55, 34C25ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ
ДВУХТОЧЕЧНО-КОЛЕБАТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ
РЕЛЕЙНОЙ ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ
С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ СОБСТВЕННЫМ ЧИСЛОМ МАТРИЦЫ

В.В. Евстафьева

ABSTRACT. We consider an n -dimensional system of ordinary first-order differential equations with a nonlinearity of a non-ideal relay and a continuous periodic function of perturbation in the right-hand side. The system matrix has simple, real, nonzero eigenvalues and at least one is negative. We study continuous oscillatory solutions with two switching points in phase space and with the same time of return to each of these points on the discontinuity surface. The theorem of the existence of the solution and its parameters are established. An example illustrating the obtained results is given.

Keywords: n -dimensional ODE system, non-ideal relay, positive hysteresis, periodic function of perturbation, bounded solutions, switching points, periodicity on return time, simple real eigenvalues, nonsingular Lurie transformation, system of transcendental equations.

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений и системы уравнений в частных производных с релейными нелинейностями, в том числе с гистерезисом, активно исследуются на протяжении многих лет, до сих пор не утратили актуальности и находят приложение в медицине, гидродинамике, физике,

YEVSTAFYEVA, V.V., THEOREM ON THE EXISTENCE OF TWO-POINT OSCILLATORY SOLUTIONS TO A RELAY PERTURBED SYSTEM WITH A NEGATIVE EIGENVALUE OF THE MATRIX.

© 2023 ЕВСТАФЬЕВА В.В.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00069, <https://rscf.ru/project/23-21-00069/>.

Поступила 14 января 2023 г., опубликована XXXXX.

экономике и др. (см., например, [1], [2]). Отметим некоторые из последних научных работ [3]–[17], развивающих данное направление и с практической, и с теоретической точек зрения. Явление гистерезиса относят к несовершенству реле [12], которое значительно влияет на поведение системы, поэтому в прикладных задачах в качестве нелинейности часто используют гистерезисную модель. В данной статье рассматривается двухпозиционное реле с гистерезисом, которое, во-первых, является наиболее сильной скалярной моделью гистерезиса из тех, что известны [5], а во-вторых, используется для построения моделей Прейсаха [4].

В силу разрывной нелинейности предельные циклы, скользящие режимы и бифуркации являются основными типами поведения релейных систем [12]. Динамика нелинейных систем намного сложнее, если она подвергается внешнему воздействию (см., например, [18]). Известно [19], что в релейных системах при внешних периодических возмущениях наряду с основным периодическим решением, период которого совпадает с периодом функции возмущения (режим захватывания на основной частоте), могут существовать сопутствующие им периодические решения с периодами, кратными периоду функции возмущения (режимы захватывания на частоте субгармоник) и непериодические решения (режим биений между автоколебаниями и вынужденными колебаниями). В работах [3], [7]–[9], [11], [13], [15] и [16] автором, в том числе в соавторстве, изучаются периодические решения и обсуждаются вопросы их существования и устойчивости. Рассмотрены случаи, когда матрица системы имеет простые или кратные вещественные, а также комплексные собственные числа. Исследованы двухпозиционные и трехпозиционные реле с гистерезисом. В [17] для релейной неавтономной системы рассмотрены решения одного типа – двухточечно-колебательные решения, которые соответствуют непрерывным колебаниям системы с определенной частотой между двумя зафиксированными в фазовом пространстве точками. Доказаны теоремы существования и несуществования таких решений для системы с вещественной симметричной матрицей, имеющей кратные собственные числа. Полученные результаты легли в основу настоящей статьи, в которой продолжено изучение двухточечно-колебательных решений в случае, когда система имеет матрицу с простыми вещественными ненулевыми собственными числами и по крайней мере одним отрицательным. Рассуждения и доказательства частично перекликаются с работой [17], тем не менее анализ существенно дополнен, введены определения для рассматриваемого типа решения и поведения его изображающей точки, а установленные теоремы являются новыми для рассматриваемой матрицы системы, в элементах которой закладываются характеристики реального объекта исследования. В дальнейшем изучение системы при различных условиях на спектр матрицы позволит разработать общий алгоритм поиска решений с заданными параметрами. Кроме того, в отличие от [17] в настоящей статье сформулированы общие теоремы для двухточечно-колебательных решений.

Рассматривается n -мерная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1) \quad \dot{Y} = AY + BF(\sigma) + Kf(t), \quad \sigma = (C, Y).$$

Здесь собственная матрица системы A и векторы $B = (b_1, \dots, b_n)^*$, $K = (k_1, \dots, k_n)^*$ являются вещественными и не зависят от времени, символ $*$ означает транспонирование, Y – вектор состояний системы. Функцией $F(\sigma)$

описана характеристика неидеального реле с положительным гистерезисом, двумя пороговыми значениями ℓ_1, ℓ_2 и двумя значениями выхода m_1, m_2 , где ℓ_1, ℓ_2, m_1, m_2 являются вещественными. Для определенности пусть $\ell_1 < \ell_2$, $m_1 < m_2$. Функция $F(\sigma(t))$ определена при непрерывном входе $\sigma(t)$ для $t \geq 0$ в классе кусочно-непрерывных функций и принимает постоянное значение на замкнутом промежутке $[t_1, t_2]$, если либо $F(\sigma(t_1)) = m_1$ и $\sigma(t) < \ell_2$ при $t \in [t_1, t_2]$, либо $F(\sigma(t_1)) = m_2$ и $\sigma(t) > \ell_1$ при $t \in [t_1, t_2]$. Петля гистерезиса на плоскости $(\sigma, F(\sigma))$ обходится против часовой стрелки, что соответствует положительному гистерезису. Согласно [10], если в начальный момент $t = t_0$ имеем $\sigma(t_0) \in (\ell_1, \ell_2)$, то следует указать $F(\sigma(t_0)) = m_1$ или $F(\sigma(t_0)) = m_2$ и далее следовать положительному обходу петли на плоскости $(\sigma, F(\sigma))$: значение $F(\sigma(t))$ сохраняется постоянным для всех $t > t_0$ до тех пор, пока $\sigma(t)$ не достигнет пороговое значение ℓ_2 снизу или ℓ_1 сверху соответственно; как только $\sigma = \ell_1$ или $\sigma = \ell_2$, тотчас значение $F(\sigma(t))$ меняется на m_1 или m_2 соответственно.

Вектор $C = (c_1, \dots, c_n)^*$ определяет обратную связь в системе, является вещественным и не зависит от времени. Функция возмущения $f(t)$ принадлежит классу непрерывных периодических функций.

Полагаем координаты векторов C и K , а также значения ℓ_1, ℓ_2, m_1 и m_2 параметрами системы, которые подлежат выбору. В силу того, что параметры, от которых зависит динамическое поведение гистерезисной системы, задаются с некоторой точностью и могут меняться в процессе эксплуатации системы, возникают вопросы существования ограниченных режимов. Такому режиму соответствует и двухточечно-колебательное решение системы.

Для описания большого разнообразия физических явлений часто рассматривается в качестве математической модели система кусочно-постоянных обыкновенных дифференциальных уравнений, фазовое пространство которых делится поверхностями переключения на различные области [20]. Кроме того, значительная часть теории динамических систем, которая связана с приложениями, касается периодичности: дифференциальные уравнения, содержащие периодические функции возмущения или функции с периодическими коэффициентами, а также периодические решения (см., например, [6], [18] и [20]). В случае двухточечно-колебательного решения имеет место периодичность по времени возврата ее изображающей точки на каждую поверхность переключения. При этом решение может принадлежать как классу периодических, так и классу непериодических вектор-функций.

Будем рассматривать непрерывное двухточечно-колебательное решение с двумя точками переключения в фазовом пространстве системы, в каждую из которых изображающая точка решения возвращается через одинаковое время (время возврата).

Ставится задача по исследованию пространства параметров системы (1) и установлению условий на ее параметры, при которых существует рассматриваемое решение с одним типом поведения. Кроме того, важно получить формулу вычисления начальной точки для построения траектории изображающей точки решения в фазовом пространстве или интегральной кривой в пространстве состояний системы.

Для решения поставленной задачи к системе применяется неособое преобразование Лурье, которое приводит матрицу системы к диагональному виду. К

такому подходу, а именно, использовать диагональные матрицы, чтобы упростить анализ и получить результаты в аналитическом виде, часто прибегают исследователи (см., например, [6], [21]). Строится вспомогательная система трансцендентных уравнений относительно моментов времени и точек переключения. Идею построения такой системы для изучения периодических решений предложил В.И. Зубов в [22] для автономного случая.

Статья состоит из трех разделов и организована следующим образом. В первом разделе описан подход к решению задачи, введены определения и основные обозначения, приведена матрица преобразования, а также выписана система трансцендентных уравнений, которая является объектом данного исследования. Результаты статьи представлены во втором разделе и включают в себя необходимое условие существования решения преобразованной системы (теорема 1), условия разрешимости системы трансцендентных уравнений (теорема 2.1 для случая, когда время возврата не кратно, но соизмеримо с периодом функции возмущения, и теорема 2.2 для случая, когда кратно), а также теорему существования решения системы (1) (теорема 3) и следствие к ней. В третьем разделе приведен подтверждающий пример для трехмерной системы.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ОБЩИЙ ПОДХОД

Обозначим через $L_\mu, \mu = 1, 2$, поверхность переключения (поверхность разрыва [12]) $\sigma = \ell_\mu$. Дадим

Определение 1. *Точкой переключения назовем такое состояние системы (1), при котором входная функция $\sigma(t)$ достигает одного из пороговых значений ℓ_μ ($\mu = 1, 2$), а выходная функция $F(\sigma(t))$ при этом меняет значение выхода t_1 на t_2 или наоборот.*

Определение 2. *Параметрами решения системы (1) назовем точки переключения и соответствующие им моменты времени переключения при первом обходе петли гистерезиса.*

Определение 3. *Решение $Y(\cdot)$ системы (1) назовем двухточечно-колебательным с временем возврата T_f на поверхность $L_\mu, \mu = 1, 2$, если в фазовом пространстве системы существуют точки переключения $Y^1 \in L_1$ и $Y^2 \in L_2$ такие, что если $Y^1 = Y_0$ или $Y^2 = Y_0$, то $Y_0 = Y(t_0 + rT_f)$, где t_0 – начальный момент времени, $T_f > 0, r \in \mathbb{N}$.*

Замечание. Первому обходу петли гистерезиса соответствует $r = 1$. По определению 3 двухточечно-колебательное решение, вообще говоря, может иметь в фазовом пространстве более двух точек переключения за время возврата T_f , но только две из них удовлетворяют равенствам, которые определяют условие периодичности решения по времени возврата.

В соответствии с постановкой задачи, мы рассматриваем решение в классе непрерывных вектор-функций и с двумя точками переключения в фазовом пространстве, в которые возвращается изображающая точка решения. Поэтому для обеспечения непрерывности решения применяем метод припасовывания, а для задания начальных условий и числа точек переключения определяем поведение (траекторию) изображающей точки решения.

Согласно методу припасовывания, полагаем совмещение точек переключения с точками “сшивания” траекторий, которые строятся в силу разных правых

частей системы (1) при $F(\sigma) = m_1$ и $F(\sigma) = m_2$. С любой стороны поверхностей переключения система (1) является линейной системой под воздействием внешнего возмущения: если $(C, Y) < \ell_2$, то динамика системы задается $\dot{Y} = AY + Bm_1 + Kf(t)$, если $(C, Y) > \ell_1$, то $\dot{Y} = AY + Bm_2 + Kf(t)$.

Далее опишем поведение изображающей точки решения с двумя точками переключения в фазовом пространстве. Пусть, например, изображающая точка решения системы (1) начинает свое движение на поверхности L_1 в точке Y^1 в момент времени $t = t_0$ и в момент времени $t = t_1$ попадает на поверхность L_2 в точку Y^2 , в силу системы (1) при $F(\sigma) = m_1$. Затем она возвращается в момент времени $t = t_0 + T_f$ на поверхность L_1 в точку Y^1 , в силу системы (1) при $F(\sigma) = m_2$. Далее движение повторяется r раз, т. е. изображающая точка решения двигается от одной точки переключения к другой, попадая поочередно в каждую из них через время T_f . Введем обозначение $\tau_1 = t_1 - t_0$ и рассмотрим τ_1, T_f, Y^1, Y^2 в качестве параметров решения. В соответствии с описанием поведения изображающей точки решения дадим

Определение 4. Вектор-функция $Y(t)$ является решением системы $\dot{Y} = AY + Bm_1 + Kf(t)$ на интервале $[t_0 + (r-1)T_f, t_1 + (r-1)T_f]$, $r \in \mathbb{N}$, и решением системы $\dot{Y} = AY + Bm_2 + Kf(t)$ на интервале $[t_1 + (r-1)T_f, t_0 + rT_f]$ с точками переключения Y^1 и Y^2 в фазовом пространстве, которые удовлетворяют

- (i) условию периодичности решения по времени возврата T_f – равенствам $Y^1 = Y(t_0) = Y(t_0 + rT_f)$, $Y^2 = Y(t_1) = Y(t_1 + rT_f)$;
- (ii) условию принадлежности поверхности переключения – равенству $(C, Y^\mu) = \ell_\mu$, $\mu = 1, 2$.

В соответствии с определением 4, применяя метод припасовывания и формулу Коши для представления решения, выпишем вспомогательную систему на отрезке $[t_0, t_0 + T_f]$. Имеем

$$(2) \quad \ell_1 = (C, Y^1), \quad \ell_2 = (C, Y^2),$$

где

$$Y^2 = e^{A\tau_1} Y^1 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} (Bm_1 + Kf(\tau)) d\tau,$$

$$Y^1 = e^{A(T_f-\tau_1)} Y^2 + \int_{t_1}^{T_f+t_0} e^{A(T_f+t_0-\tau)} (Bm_2 + Kf(\tau)) d\tau.$$

Система трансцендентных уравнений (2) является сложной и для дальнейшего аналитического исследования требует упрощения.

Пусть выполнены следующие условия:

- 1) $\det(B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B) \neq 0$,
- 2) матрица A имеет вещественные простые ненулевые собственные числа λ_i ($i = \overline{1, n}$), среди которых по крайней мере одно является отрицательным (пусть $\lambda_s < 0$, где s – некоторый индекс, принимающий значение от 1 до n).

В этом случае к системе (1) применим неособое преобразование $Y = SX$, приводящее матрицу A к диагональному виду. Пусть, например, матрица S

имеет вид (см. [21])

$$(3) \quad S = - \begin{pmatrix} \frac{N_1(\lambda_1)}{D'(\lambda_1)} & \cdots & \frac{N_1(\lambda_n)}{D'(\lambda_n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{N_n(\lambda_1)}{D'(\lambda_1)} & \cdots & \frac{N_n(\lambda_n)}{D'(\lambda_n)} \end{pmatrix},$$

где $D'(\lambda_i) = \left. \frac{dD(p)}{dp} \right|_{p=\lambda_i}$, $D(p) = |A - pE|$, E – единичная матрица, $N_h(p)$ – определитель матрицы A , в которой координаты h -го столбца заменены координатами вектора B , p – некоторый вещественный параметр.

Преобразованная система принимает вид

$$(4) \quad \dot{X} = A_0 X + B_0 F(\sigma) + K_0 f(t), \quad \sigma = (\Gamma, X),$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad B_0 = S^{-1} B = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$K_0 = S^{-1} K = \begin{pmatrix} k_1^0 \\ \dots \\ k_n^0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = S^* C = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \dots \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

Координаты γ_i ($i = \overline{1, n}$) вычисляются по формуле

$$(5) \quad \gamma_i = \frac{-1}{D'(\lambda_i)} \sum_{h=1}^n c_h N_h(\lambda_i).$$

Следуя [21], полагаем γ_s отличным от нуля, остальные координаты преобразованного вектора обратной связи нулевыми. Согласно методу сечений пространства параметров, такое условие на вектор Γ позволяет вместо n -мерной системы получить уравнение первого порядка относительно $\sigma(t)$ и уравнения первого порядка относительно координат x_j ($j = \overline{1, n}, j \neq s$) вектора состояний преобразованной системы. Функция $\sigma(t) = \gamma_s x_s(t)$ определяется из уравнения $\dot{\sigma}(t) = \lambda_s \sigma(t) + \gamma_s (F(\sigma(t)) + k_s^0 f(t))$ с учетом начальных и граничных условий. Общий вид решения имеет вид

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{\lambda_s(t-t_0)} + \gamma_s e^{\lambda_s t} \left(m_\mu \int_{t_0}^t e^{-\lambda_s \tau} d\tau + k_s^0 \int_{t_0}^t e^{-\lambda_s \tau} f(\tau) d\tau \right), \quad \sigma_0 = \sigma(t_0).$$

Выпишем условия на отрезке $[0, T_f]$. На отрезке $[0, t_1]$ имеем $m_\mu = m_1$, начальное условие $t_0 = 0$, $\sigma_0 = \ell_1$ и граничное условие $\sigma(t_1) = \ell_2$. На отрезке $[t_1, T_f]$ имеем $m_\mu = m_2$, начальное условие $t_0 = t_1$, $\sigma_0 = \ell_2$ и граничное условие $\sigma(T_f) = \ell_1$. Переменные x_j определяются из линейных неоднородных уравнений

$$\dot{x}_j(t) = \lambda_j x_j(t) + F(\sigma(t)) + k_j^0 f(t).$$

Система (2) после преобразования также упрощается, распадаясь на систему трансцендентных уравнений относительно моментов времени переключения t_1

и T_f

$$(6) \quad \begin{aligned} \ell_2 &= \left(\ell_1 + \frac{\gamma_s m_1}{\lambda_s} \right) e^{\lambda_s t_1} - \frac{\gamma_s m_1}{\lambda_s} + \gamma_s k_s^0 \int_0^{t_1} e^{\lambda_s(t_1-\tau)} f(\tau) d\tau, \\ \ell_1 &= \left(\ell_2 + \frac{\gamma_s m_2}{\lambda_s} \right) e^{\lambda_s(T_f-t_1)} - \frac{\gamma_s m_2}{\lambda_s} + \gamma_s k_s^0 \int_{t_1}^{T_f} e^{\lambda_s(T_f-\tau)} f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

и формулы для нахождения точек переключения $X^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)^*$, $X^2 = (x_1^2, \dots, x_n^2)^*$ изображающей точки решения преобразованной системы (4)

$$(7) \quad \begin{aligned} x_s^1 &= \ell_1 / \gamma_s, \quad x_s^2 = \ell_2 / \gamma_s, \\ x_j^1 &= \frac{e^{\lambda_j T_f}}{1 - e^{\lambda_j T_f}} \left(m_1 \int_0^{t_1} e^{-\lambda_j \tau} d\tau + m_2 \int_{t_1}^{T_f} e^{-\lambda_j \tau} d\tau + k_j^0 \int_0^{T_f} e^{-\lambda_j \tau} f(\tau) d\tau \right), \\ x_j^2 &= \frac{e^{\lambda_j t_1}}{1 - e^{\lambda_j T_f}} \left(\int_{t_1}^{T_f} e^{-\lambda_j(T_f-\tau)} (m_2 + k_j^0 f(\tau)) d\tau + \int_0^{t_1} e^{-\lambda_j \tau} (m_1 + k_j^0 f(\tau)) d\tau \right), \\ j &= \overline{1, n}, \quad j \neq s. \end{aligned}$$

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть функция возмущения $f(t)$ задается T -периодической функцией вида $f(t) = f_0 + f_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + f_2 \sin(2\omega t + \varphi_2)$, где $f_0, f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2, \omega$ – вещественные и не зависят от времени, причем f_0, f_1 и f_2 – ненулевые, $\omega > 0$. Период функции равен $T = 2\pi/\omega$.

Введем обозначение. Пусть

$$(8) \quad \begin{aligned} Q(m_\mu, t, \lambda_i) &= \frac{m_\mu + k_i^0 f_0}{\lambda_i} + \frac{k_i^0 f_1}{\lambda_i^2 + \omega^2} (\lambda_i \sin(\omega t + \varphi_1) + \omega \cos(\omega t + \varphi_1)) + \\ &\frac{k_i^0 f_2}{\lambda_i^2 + 4\omega^2} (\lambda_i \sin(2\omega t + \varphi_2) + 2\omega \cos(2\omega t + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Система (6) принимает вид

$$(9) \quad \begin{aligned} \ell_2 &= (\ell_1 + \gamma_s Q(m_1, 0, \lambda_s)) e^{\lambda_s t_1} - \gamma_s Q(m_1, t_1, \lambda_s), \\ \ell_1 &= (\ell_2 + \gamma_s Q(m_2, t_1, \lambda_s)) e^{\lambda_s(T_f-t_1)} - \gamma_s Q(m_2, T_f, \lambda_s). \end{aligned}$$

Имеет место

Теорема 1. Пусть в системе (4) вектор Γ имеет координаты $\gamma_s \neq 0, \gamma_j = 0, j \neq s, j = \overline{1, n}$, и существует двухточечно-колебательное решение с параметрами t_1, T_f, X^1, X^2 , где X^1 и X^2 находятся по формулам (7). Тогда $T_f = \pi p/\omega$, p – четное натуральное число, и решение является T_f -периодической вектор-функцией, или имеют место следующие условия:

- 1) $t_1 = \pi m/\omega, T_f = \pi p/\omega, p$ – нечетное натуральное число, $m \in \mathbb{N}$ и $m < p$;
- 2) $\varphi_1 = -\arctg(\omega/\lambda_s) + \pi h, h \in \mathbb{Z}$;
- 3) $k_s^0 \neq 0$ и $k_j^0 = 0, j \neq s, j = \overline{1, n}$.

Доказательство. Пусть существует двухточечно-колебательное решение системы (4) с параметрами t_1 , T_f , X^1 и X^2 . В силу неособого преобразования условия (i) и (ii) из определением 4 с учетом определения 3 для решения $X(t)$ принимают вид $X^1 = X(0) = X(rT_f) \in L_1$, $X^2 = X(t_1) = X(t_1 + rT_f) \in L_2$, $r \in \mathbb{N}$, или в эквивалентной форме

- (а) $\ell_1 = \sigma(0) = \sigma(rT_f)$, $\ell_2 = \sigma(t_1) = \sigma(t_1 + rT_f)$, $r \in \mathbb{N}$, $x_s^\mu = \ell_\mu / \gamma_s$, $\mu = 1, 2$;
 (б) $x_j^1 = x_j(0) = x_j(rT_f)$, $x_j^2 = x_j(t_1) = x_j(t_1 + rT_f)$, $j \neq s$.

Рассмотрим условие (а). На отрезке $[0, T_f]$ имеет место система (9): первое уравнение – на отрезке $[0, t_1]$, второе уравнение – на отрезке $[t_1, T_f]$. Аналогично, на отрезке $[rT_f, (r+1)T_f]$, $r \in \mathbb{N}$, выполняется система равенств

$$(10) \quad \begin{aligned} \ell_2 &= (\ell_1 + \gamma_s Q(m_1, rT_f, \lambda_s)) e^{\lambda_s t_1} - \gamma_s Q(m_1, rT_f + t_1, \lambda_s), \\ \ell_1 &= (\ell_2 + \gamma_s Q(m_2, rT_f + t_1, \lambda_s)) e^{\lambda_s (T_f - t_1)} - \gamma_s Q(m_2, (r+1)T_f, \lambda_s). \end{aligned}$$

Согласно условию (а), правые части равенств (9) и (10) при равных левых частях совпадают, тогда имеет место система равенств

$$(11) \quad \begin{aligned} Q(m_2, 2T_f, \lambda_s) &= Q(m_2, T_f, \lambda_s), \quad Q(m_1, T_f, \lambda_s) = Q(m_1, 0, \lambda_s), \\ Q(m_\mu, t_1, \lambda_s) &= Q(m_\mu, T_f + t_1, \lambda_s). \end{aligned}$$

Преобразуем (8) в компактный вид, удобный для анализа системы (11) с учетом того, что $\lambda_s < 0$. Имеем

$$Q(m_\mu, t, \lambda_s) = \frac{m_\mu + k_s^0 f_0}{\lambda_s} - \frac{k_s^0 f_1 \sin(\omega t + \varphi_1 + \delta_1)}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} - \frac{k_s^0 f_2 \sin(2\omega t + \varphi_2 + \delta_2)}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}},$$

где $\delta_1 = \arctg(\omega/\lambda_s)$, $\delta_2 = \arctg(2\omega/\lambda_s)$. Тогда выполнение системы (11) равносильно при $k_s^0 \neq 0$ выполнению системы равенств

$$\begin{aligned} \sin(\varphi_1 + \delta_1) &= \sin(\omega T_f + \varphi_1 + \delta_1) = \sin(2\omega T_f + \varphi_1 + \delta_1), \\ \sin(\varphi_2 + \delta_2) &= \sin(2\omega T_f + \varphi_2 + \delta_2) = \sin(4\omega T_f + \varphi_2 + \delta_2), \\ \sin(\omega t_1 + \varphi_1 + \delta_1) &= \sin(\omega(T_f + t_1) + \varphi_1 + \delta_1), \\ \sin(2\omega t_1 + \varphi_2 + \delta_2) &= \sin(2\omega(T_f + t_1) + \varphi_2 + \delta_2). \end{aligned}$$

Из первого равенства следует, что $\omega T_f = (2\pi/T)T_f$ и далее возможны два варианта. Во-первых, $T_f = pT/2$, где p – четное натуральное число. Этот случай был подробно рассмотрен в работах [3], [15], [16] и соответствует T_f -периодическому решению в том смысле, что решение является периодической вектор-функцией с периодом $T_f = kT$, $k \in \mathbb{N}$. Во-вторых, $T_f = pT/2$, где p – нечетное натуральное число, при условии, что $\varphi_1 + \delta_1 = \pi h$, $h \in \mathbb{Z}$. Тогда из предпоследнего равенства системы вытекает, что $t_1 = mT/2$, где $m \in \mathbb{N}$ и $m < p$. Учитывая, что $T = 2\pi/\omega$, имеем $t_1 = \pi m/\omega$ и $T_f = \pi p/\omega$. Условия 1) и 2) теоремы 1 выполнены.

Из условия (б) следуют равенства вида (11), в которых вместо λ_s рассматриваются λ_j . Поскольку собственные числа разные, то $\varphi_1 \neq -\arctg(\omega/\lambda_j)$. Отсюда вытекает, что $k_j^0 = 0$. Условие 3) теоремы 1 выполнено. Таким образом, необходимое условие существования в системе (4) двухточечно-колебательного решения с указанными параметрами установлено. Теорема 1 доказана. \square

Условия разрешимости системы трансцендентных уравнений (6) относительно t_1 и T_f получены в теореме 2 из [17] в случае, когда $T_f \neq kT$, $k \in \mathbb{N}$. Приведем эту теорему в принятых в настоящей статье обозначениях для системы в виде (9). Итак, для решения системы (9) с $T_f = pT/2$, p – нечетное натуральное число, $p > 1$, справедлива

Теорема 2.1. *Пусть имеют место условия 1)–3) теоремы 1 и следующие условия:*

1) для некоторого $m \in \mathbb{N}$ выполняются неравенство $\ell_2 + \gamma_s Q(m_1, 0, \lambda_s) < 0$ и равенство

$$\ell_2(m) = (\ell_1 + \gamma_s Q(m_1, 0, \lambda_s)) e^{\lambda_s(mT/2)} - \gamma_s Q(m_1, 0, \lambda_s);$$

2) для $t_1 = mT/2$, $\gamma_s < 0$ и нечетного $p \in \mathbb{N}$, $p > m$, выполняется равенство

$$m_2(p) = \frac{\lambda_s}{\gamma_s} \frac{e^{\lambda_s pT/2} - 1}{1 - e^{\lambda_s(pT/2 - t_1)}} (\ell_1 + \gamma_s Q(m_1, 0, \lambda_s)) + m_1.$$

Тогда система трансцендентных уравнений (9) имеет решение (t_1, T_f) , где $T_f = pT/2$.

Доказательство приведено в [17] при $b_s^0 = 1$, $Q = Q(m_1, 0, \lambda_s)$, $\tau_1 = t_1 = mT/2$ и $\tau_2 = T_f - t_1 = (p - m)T/2$.

В работе [3], теорема 3.2, получены условия разрешимости системы (6) в случае, когда $T_f = kT$, $k \in \mathbb{N}$. Но здесь воспользуемся более удачной формулировкой теоремы, которая приведена в [16], теорема 1, для другого случая ($\lambda_s > 0$). Итак, для решения системы (6) с $T_f = pT/2 = kT$ в обозначениях настоящей статьи имеет место

Теорема 2.2. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) при некотором $k \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства

$$m_2 - m_1 e^{\lambda_s kT} + (1 - e^{\lambda_s kT})L > 0, \quad m_1 < L < m_2,$$

где

$$L = -\frac{\lambda_s \ell_1}{\gamma_s} + m_\mu - \lambda_s Q(m_\mu, 0, \lambda_s),$$

и равенство

$$(12) \quad t_1 = kT + \frac{1}{\lambda_s} \ln \frac{m_2 - m_1}{(1 - e^{\lambda_s kT})L + m_2 - m_1 e^{\lambda_s kT}};$$

2) определяемая равенством (12) величина t_1 удовлетворяет первому уравнению системы (9).

Тогда при $T_f = kT$ система уравнений (9) имеет решение t_1 , где $t_1 \in (0, kT)$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1 из [16], если вместо $\lambda_s > 0$ рассмотреть $\lambda_s < 0$, а T/k заменить на kT .

Далее докажем теорему существования решения $Y(t)$ системы (1).

Теорема 3. *Пусть имеют место условия теоремы 2.1 или теоремы 2.2 и дополнительно t_1 является наименьшим (или единственным) решением первого уравнения системы (9), T_f – второго уравнения системы (9). Тогда существует двухточечно-колебательное решение системы (1) с точками переключения $Y^1 = SX^1$ и $Y^2 = SX^2$ в фазовом пространстве, где S определена формулой (3), X^1 и X^2 – формулами (7).*

Доказательство. Если выполнены условия теоремы 2.1 и определены параметры $m, p, \ell_1, \ell_2(m), m_1, m_2(p), k_s^0$ и γ_s , то система (9) имеет решение $t_1 = mT/2, T_f = pT/2$. Если выполнены условия теоремы 2.2 и определены параметры $k, \ell_1, \ell_2, m_1, m_2, k_s^0$ и γ_s , то система (9) имеет решение t_1 , которое вычисляется по формуле (12), и $T_f = kT$.

Условия теоремы 2.1 или теоремы 2.2 не являются достаточными для существования решения $X(t)$ системы (4), поскольку система (9) при выбранных параметрах может иметь другие решения t_1 и T_f , которые отвечают моментам времени достижения или пересечения поверхностей переключения L_1 и L_2 . Покажем, что должно выполняться дополнительное условие теоремы 3.

Как следует из определения 4, при $r = 1$ на интервале $[0, t_1)$ имеют место равенство $m_\mu = m_1$ и неравенство $(C, Y) < \ell_2$. Для решения $X(t)$ системы (4) последнее неравенство принимает вид $(\Gamma, X) < \ell_2$. На интервале $[t_1, T_f)$ выполняются равенство $m_\mu = m_2$ и неравенство $(C, Y) > \ell_1$ для $Y(t)$ или $(\Gamma, X) > \ell_1$ для $X(t)$. Это означает, что в момент времени t_1 происходит первая встреча изображающей точки решения с L_2 и первое изменение $F(\sigma)$ со значения m_1 на m_2 . Такое поведение изображающей точки решения описано первым уравнением системы (9). Поэтому в условии теоремы требуем, что t_1 является наименьшим его решением (в случае нескольких решений) или единственным. Аналогично, в момент времени T_f происходит первое возвращение изображающей точки решения на L_1 и первое изменение $F(\sigma)$ со значения m_2 на m_1 . Поведение на отрезке $[t_1, T_f]$ описано вторым уравнением системы (9), поэтому и требуем, что T_f является его единственным или наименьшим решением.

Таким образом, при выполнении условий теоремы 3 полученные значения t_1 и T_f отвечают точкам переключения $X^1 \in L_1, X^2 \in L_2$, которые находятся по формулам (7).

В силу неособого преобразования системы (1) и (4) взаимозаменяемые, поэтому полученные для преобразованной системы результаты легко переносятся на исходную систему. Исходя из (5), параметры c_h системы (1) находятся из неоднородной системы n линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{h=1}^n c_h N_h(\lambda_j) = 0, \quad \sum_{h=1}^n c_h N_h(\lambda_s) = -D'(\lambda_s)\gamma_s.$$

Параметры k_i находятся как координаты вектора K с помощью преобразования $K = SK_0$ или по формуле

$$k_i = -\frac{N_i(\lambda_s)}{D'(\lambda_s)} k_s^0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, определены условия и на параметры системы (1), при которых существует T_f -двухточечно-колебательное решение с точками переключения $Y^1 \in L_1, Y^2 \in L_2$ в фазовом пространстве. Эти точки находятся из равенств $Y^1 = SX^1, Y^2 = SX^2$, где S задается формулой (3). Теорема 3 доказана. \square

Из теоремы 3 вытекает

Следствие. Пусть существует двухточечно-колебательное решение системы (1) с параметрами t_1, T_f, Y^1 и Y^2 . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) решение является T_f -периодической вектор-функцией, если выполняются условия теоремы 2.2;
 2) решение не является T_f -периодической, но является $2T_f$ -периодической вектор-функцией, если имеют место условия теоремы 2.1.

Доказательство. В силу эквивалентности систем (1) и (4) существование решения $Y(\cdot)$ системы (1) с параметрами t_1, T_f, Y^1 и Y^2 равносильно существованию решения $X(\cdot)$ системы (4) с параметрами t_1, T_f, X^1 и X^2 , и утверждения следствия справедливы для обеих систем.

Докажем утверждения для системы (4). Выпишем общий вид решения $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^*$ в координатной форме

$$x_i(t) = x_i(t_0)e^{\lambda_i(t-t_0)} + e^{\lambda_i t} \int_{t_0}^t e^{-\lambda_i \tau} (m_\mu + k_i^0 f(\tau)) d\tau, \quad i = \overline{1, n}.$$

Пусть выполняются условия теоремы 2.2. В этом случае решение на интервале $[(r-1)T_f, t_1 + (r-1)T_f)$, $r \in \mathbb{N}$, для $\tau \in [0, t_1)$ и $t_0 = (r-1)T_f$ имеет вид

$$x_i((r-1)T_f + \tau) = (x_i^1 + Q(m_1, 0, \lambda_i)) e^{\lambda_i \tau} - Q(m_1, \tau, \lambda_i), \quad i = \overline{1, n},$$

на интервале $[t_1 + (r-1)T_f, rT_f)$ для $\tau \in [0, T_f - t_1)$ и $t_0 = t_1 + (r-1)T_f$ имеет вид

$$x_i((r-1)T_f + t_1 + \tau) = (x_i^2 + Q(m_2, 0, \lambda_i)) e^{\lambda_i \tau} - Q(m_2, t_1 + \tau, \lambda_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

Напомним, что по условию $f(t)$ является T -периодической функцией. Поскольку $T_f = kT$, $k \in \mathbb{N}$, т. е. T_f равно или кратно T , то функции

$$Q(m_1, (r-1)T_f + \tau, \lambda_i) = Q(m_1, \tau, \lambda_i), \quad \tau \in [0, t_1),$$

$$Q(m_2, (r-1)T_f + t_1 + \tau, \lambda_i) = Q(m_2, t_1 + \tau, \lambda_i), \quad \tau \in [0, T_f - t_1),$$

которые определяются по формуле (8), не зависят от r . Отсюда,

$$x_i(t) = x_i(rT_f + t) \quad \forall t \geq 0,$$

т. е. решение $X(t)$ является T_f -периодической вектор-функцией. Утверждение 1) доказано.

Пусть выполняются условия теоремы 2.1. Тогда решение на интервале $[(r-1)T_f, t_1 + (r-1)T_f)$, $r \in \mathbb{N}$, для $\tau \in [0, t_1)$ и $t_0 = (r-1)T_f$ имеет вид

$$x_s((r-1)T_f + \tau) = (x_s^1 + Q(m_1, 0, \lambda_s)) e^{\lambda_s \tau} - Q(m_1, (r-1)T_f + \tau, \lambda_s),$$

$$x_j((r-1)T_f + \tau) = (x_j^1 + m_1/\lambda_j) e^{\lambda_j \tau} - m_1/\lambda_j, \quad j \neq s,$$

на интервале $[t_1 + (r-1)T_f, rT_f)$ для $\tau \in [0, T_f - t_1)$ и $t_0 = t_1 + (r-1)T_f$ имеет вид

$$x_s((r-1)T_f + t_1 + \tau) = (x_s^2 + Q(m_2, 0, \lambda_s)) e^{\lambda_s \tau} - Q(m_2, (r-1)T_f + t_1 + \tau, \lambda_s),$$

$$x_j((r-1)T_f + t_1 + \tau) = (x_j^1 + m_2/\lambda_j) e^{\lambda_j \tau} - m_2/\lambda_j, \quad j \neq s.$$

Время возврата T_f не кратно периоду T , так как $T_f = pT/2$ с нечетным $p > 1$. Функции $Q(m_1, (r-1)T_f + \tau, \lambda_s)$ для $\tau \in [0, t_1)$, $Q(m_2, (r-1)T_f + t_1 + \tau, \lambda_s)$ для $\tau \in [0, T_f - t_1)$ зависят от четности r (т. е. отличаются для четных и нечетных r). Следовательно, $x_s((r-1)T_f + \tau) \neq x_s(rT_f + \tau)$ для $\tau \in [0, t_1)$, и

$x_s((r-1)T_f + t_1 + \tau) \neq x_s(rT_f + t_1 + \tau)$ для $\tau \in [0, T_f - t_1)$, т. е. нарушается T_f -периодичность решения по координате x_s . Это означает, что в фазовом пространстве траектории решения на соответствующих интервалах по координате x_s не совпадают при четном и нечетном обходах петли гистерезиса, а в интегральном пространстве решению системы (4) соответствует кривая, состоящая из непериодически повторяющихся кусков интегральных кривых, т. е. решение $X(t)$ не является T_f -периодической вектор-функцией. Однако, $2T_f$ кратно T , и следовательно, решение является $2T_f$ -периодической вектор-функцией. Утверждение 2) доказано. \square

3. ПРИМЕР

Рассмотрим трехмерную систему (1) с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -16 & -13.5 & -22.5 \\ 27 & 22.5 & 36.5 \\ -3 & -2.5 & -4.5 \end{pmatrix}$$

и вектором $B = (2.5, -3.5, 0.5)^*$. Среди собственных чисел λ_i ($i = \overline{1, 3}$) матрицы A есть отрицательное $\lambda_1 = -1$ (положим $\lambda_s = \lambda_1$), $\lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = 2$. Векторы B, AB, A^2B являются линейно независимыми, т. к. $\det(B AB A^2B) = 3 \neq 0$.

Пусть матрица S неособого преобразования, приводящего матрицу системы к диагональной матрице A_0 , имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} 1.5 & 4.5 & -3.5 \\ -2.5 & -6.5 & 5.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix},$$

где $\det S = 0.5 \neq 0$. Тогда $B_0 = (1, 1, 1)^*$. Положим $\Gamma = (-0.5, 0, 0)^*$, где $\gamma_1 \neq 0$. Пусть внешнее возмущение описывает функция

$$f(t) = 0.3 + 1.2 \sin(t + \phi_1) + 0.5 \sin(2t + 1)$$

с периодом $T = 2\pi$. Здесь $\phi_1 \approx 0.785398$ (в соответствии с теоремой 1). Согласно теореме 1 положим $K_0 = (-2, 0, 0)^*$.

Обратимся к условиям теоремы 2.1. Условия 2) и 3) теоремы 1 выполнены. Пусть решение имеет вид $t_1 = mT/2$, $T_f = pT/2$, p – нечетное. Определим остальные параметры и решение системы трансцендентных уравнений (9). Выбор $\gamma_s = \gamma_1$ удовлетворяет условию 2) теоремы 2.1. Пусть $\ell_1 = -16.1589$, $m_1 = -3$. Тогда $Q(m_1, 0, \lambda_s) \approx 3.3828$ и верно неравенство $-17.8503 < 0$ в условии 1) теоремы 2.1. Пусть $m = 1$. Имеем $\ell_2(1) \approx 0.9200$. Итак, первое уравнение системы (9) имеет решение $t_1 = T/2 = \pi$. Пусть $p = 3 > m$. С помощью равенства из условия 2) теоремы 2.1 находим $m_2(3) \approx 32.764501$. Второе уравнение системы (9) обращается в тождество $0.031953 \approx 0.031953$. Отсюда следует, что условия теоремы 2.1 выполнены, и при указанных параметрах $\ell_1, \ell_2, m_1, m_2, k_1^0$ и γ_1 система трансцендентных уравнений (9) имеет одно решение $t_1 = \pi$, $T_f = 3\pi$.

Дополнительное условие теоремы 3 выполняется: $t_1 = \pi$ являются наименьшим среди трех решений на интервале $(0, T_f)$, а $T_f = 3\pi$ – единственным на

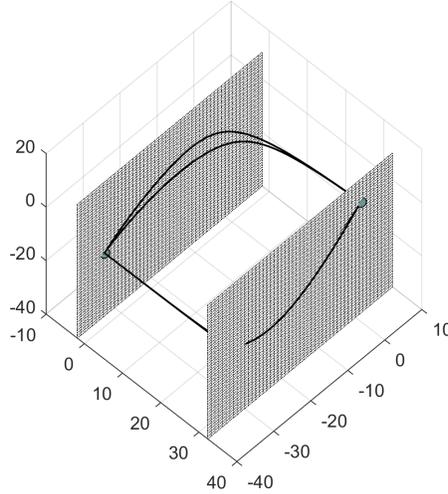


Рис. 1. Траектория 3π -двухточечно-колебательного решения с точками переключения X^1 (справа) и X^2 (слева) в фазовом пространстве (x_1, x_2, x_3) .

интервале $(t_1, 2T) = (\pi, 4\pi)$. По формулам (7) рассчитываем точки переключения преобразованной системы (4). Имеем

$$X^1 \approx \begin{pmatrix} 32.3178 \\ 1.457237 \\ 1.466606 \end{pmatrix}, \quad X^2 \approx \begin{pmatrix} -1.840031 \\ -32.7005942 \\ -16.382188 \end{pmatrix}.$$

Из системы уравнений, построенной в соответствии с (5), находим значения координат вектора обратной связи $c_1 \approx -0.5$, $c_2 \approx -0.5$ и $c_3 \approx -2$. Вычисляем координаты вектора K . Имеем $K \approx (-3, 5, -1)^*$.

Таким образом, в системе (1) при заданных $t_1 = \pi$ и $T_f = 3\pi$ определены параметры ℓ_1, ℓ_2, m_1 и m_2 , а также координаты векторов K и C , при которых, согласно теореме 3, существует 3π -двухточечно-колебательное решение с точками переключения

$$Y^1 = \begin{pmatrix} 49.901147 \\ -82.200210 \\ 16.154215 \end{pmatrix}, \quad Y^2 = \begin{pmatrix} -92.575062 \\ 127.051905 \\ -9.079218 \end{pmatrix}$$

в фазовом пространстве системы (1).

На рис. 1 представлен график траектории двухточечно-колебательного решения в фазовом пространстве преобразованной системы с точками переключения (отмечены на траектории) и двумя обходами петли гистерезиса. Поверхности L_1 и L_2 ориентированы ортогонально оси x_1 . Изображающая точка решения начинает свое движение в $X^1 \in L_1$ (справа), в момент времени $t_1 = \pi$ попадает на L_2 в точку X^2 (слева), затем в момент времени $T_f = 3\pi$ возвращается на L_1 в начальную точку X^1 . Далее движение от L_1 к L_2 и обратно повторяется.

REFERENCES

- [1] M.A. Krasnosel'skii, A.V. Pokrovskii, *Periodic oscillations in systems with relay nonlinearities*, Soviet Math. Dokl., **15**:3 (1974), 873–877.
- [2] A. Visintin, *Ten issues about hysteresis*, Acta Appl. Math., **132**:1 (2014), 635–647.
- [3] V.V. Yevstafyeva, *On existence conditions for a two-point oscillating periodic solution in an non-autonomous relay system with a Hurwitz matrix*, Automat. Remote Control, **76**:6 (2015), 977–988.
- [4] L. Fang, J. Wang, Q. Zhang, *Identification of extended Hammerstein systems with hysteresis-type input nonlinearities described by Preisach model*, Nonlinear Dyn., **79**:2 (2015), 1257–1273.
- [5] A. Visintin, *P.D.E.S with hysteresis 30 years later*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, **8**:4 (2015), 793–816.
- [6] E. Hooton, Z. Balanov, W. Krawcewicz, D. Rachinskii, *Noninvasive stabilization of periodic orbits in O_4 -symmetrically coupled systems near a Hopf bifurcation point*, Int. J. Bifurcation Chaos, **27**:6 (2017), 1750087, 18 p.
- [7] A.M. Kamachkin, D.K. Potapov, V.V. Yevstafyeva, *Existence of periodic solutions to automatic control system with relay nonlinearity and sinusoidal external influence*, Int. J. Robust Nonlinear Control, **27**:2 (2017), 204–211.
- [8] A.M. Kamachkin, D.K. Potapov, V.V. Yevstafyeva, *Existence of subharmonic solutions to a hysteresis system with sinusoidal external influence*, Electron. J. Differ. Equ., 140 (2017), 1–10.
- [9] A.M. Kamachkin, D.K. Potapov, V.V. Yevstafyeva, *On uniqueness and properties of periodic solution of second-order nonautonomous system with discontinuous nonlinearity*, J. Dyn. Control Syst., **23**:4 (2017), 825–837.
- [10] G.A. Leonov, M.M. Shumafov, V.A. Teshev, K.D. Aleksandrov, *Differential equations with hysteresis operators. Existence of solutions, stability, and oscillations*, Differ. Equ., **53**:13 (2017), 1764–1816.
- [11] V.V. Yevstafyeva, *Periodic solutions of a system of differential equations with hysteresis nonlinearity in the presence of eigenvalue zero*, Ukr. Math. J., **70**:8 (2019), 1252–1263.
- [12] V.I. Utkin, Yu.V. Orlov, *Control systems with vector relays*, Automat. Remote Control, **80**:9 (2019), 1671–1680.
- [13] A.M. Kamachkin, D.K. Potapov, V.V. Yevstafyeva, *Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay*, Int. J. Control, **93**:4 (2020), 763–770.
- [14] C.E.L. da Silva, A. Jacquemard, M.A. Teixeira, *Periodic solutions of a class of non-autonomous discontinuous second-order differential equations*, J. Dyn. Control Syst., **26**:1 (2020), 17–44.
- [15] V.V. Yevstafyeva, *Existence of T/k -periodic solutions of a nonlinear nonautonomous system whose matrix has a multiple eigenvalue*, Math. Notes, **109**:4 (2021), 551–562.
- [16] V.V. Yevstafyeva, *On the existence of two-point oscillatory solutions of a perturbed relay system with hysteresis*, Differ. Equ., **57**:2 (2021), 155–164.
- [17] V.V. Yevstafyeva, *Existence of two-point oscillatory solutions of a relay nonautonomous system with multiple eigenvalue of a real symmetric matrix*, Ukr. Math. J., **73**:5 (2021), 746–757.
- [18] A. Jacquemard, M.A. Teixeira, *Periodic solutions of a class of non-autonomous second order differential equations with discontinuous right-hand side*, Phys. D: Nonlinear Phenom., **241**:22 (2012), 2003–2009.
- [19] Ya.Z. Tsyppin, *Automatic Relay Systems*, Nauka, Moscow, 1974.
- [20] M. di Bernardo, C.J. Budd, A.R. Champneys, P. Kowalczyk, *Piecewise-Smooth Dynamical Systems – Theory and Applications*, Springer, London, 2008.
- [21] R.A. Nelepin, *Exact Analytical Methods in Theory of Nonlinear Automatic Systems*, Sudostroenie, Leningrad, 1967.
- [22] V.I. Zubov, *Oscillations in Nonlinear and Controlled Systems*, Sudpromgiz, Leningrad, 1962.

VICTORIA VIKTOROVNA YEVSTAFYEVA
 SAINT PETERSBURG STATE UNIVERSITY,
 UNIVERSITetskAYA NAB., 7/9,
 199034, ST. PETERSBURG, RUSSIA
 E-mail address: v.evstafieva@spbu.ru