

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

Том 16, стр. 144–144 (2019)  
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx

УДК 517.5  
MSC 31B10

**К ИССЛЕДОВАНИЮ ВЕСОВОЙ ОБОБЩЕННОЙ  
ГЕЛЬДЕРОВОСТИ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА НА  
МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ С МЕРОЙ**

Ю.Е. ДРОБOTOV, Б.Г. ВАКУЛОВ

**АБСТРАКТ.** Получены весовые оценки типа Зигмунда для гиперсингулярного интеграла на почти однородном метрическом пространстве и, на их основе, теоремы о действии данного оператора в весовом пространстве обобщенной переменной гёльдеровости. В качестве веса рассматривается представитель класса степенных функций. Показано, что гиперсингулярный интеграл «ухудшает» характеристику обобщенного пространства Гёльдера на порядок гиперсингулярного интеграла. Условия представленных теорем сформулированы в терминах класса Бари–Стечкина, а также специального аналога условия Дини.

**Keywords:** bounded operator, continuity, generalized Hölder spaces, hypersingular integral, integral equations, local modulus of continuity, modulus of submetry, Zygmund-type estimates

## ВВЕДЕНИЕ

Как известно, рисово дробное интегродифференцирование функций многих вещественных переменных определяет производную через гиперсингулярный

---

DROBOTOV YU. E., VAKULOV B. G., ON THE WEIGHTED GENERALIZED HÖLDER CONTINUITY OF A HYPERSINGULAR INTEGRAL ON A METRIC SPACE.

© 2022 Дроботов Ю. Е., Вакулов Б. Г.

Работа Дроботова Ю. Е. поддержана РФФИ и ТУБИТАК (грант 20-51-46003).

Работа Дроботова Ю. Е. выполнена в Северо-Кавказском центре математических исследований ВНЦ РАН при поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2024-1379.

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

интеграл [1, с. 483] (см. также [4, 5]), в том числе и на однородных пространствах, например – сфере [6]. Кроме того, всякий однородный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами может быть выражен гиперсингулярным интегралом с характеристикой специального вида [1, с. 530], что вызывает особый интерес к исследованию таких операторов в контексте задач математической физики.

Один из основных вопросов качественной теории интегральных операторов состоит в отыскании способа формализации их гладкости, содержательно характеризующего устойчивость соответствующих уравнений. На этом пути неизбежны обобщения классических функциональных пространств, в том числе пространств гёльдеровского типа, введение которых еще в теории эллиптических уравнений в частных производных мотивировано тем же вопросом. В качестве простой аналогии можно отметить, что потребность в описании континуальных свойств функций с помощью условия Гёльдера возникает еще при исследовании классического уравнения Пуассона [2, с. 51], в то время как гиперсингулярный интеграл на  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  реализует дробные степени оператора Лапласа.

**Обзор исследования.** В настоящей работе рассмотрены операторы гиперсингулярного интегрирования по множеству почти однородного метрического пространства. Исследуется отображение такими операторами функций, удовлетворяющих условию типа Гёльдера с локальным модулем непрерывности, представления о котором подробно раскрываются.

Говоря конкретно, в Теореме 2 доказана ограниченность гиперсингулярного интеграла  $D^\alpha$ , заданного Определением 1, при отображении функций из весового пространства обобщенной переменной гёльдеровости  $H_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$ , введенного в Определении 7, в случае, когда вес является степенной функцией вида

$$(w_a) \quad w_a(x) := d^r(a, x), \quad a, x \in \Omega, \quad 0 < r \leq 1,$$

где  $d(a, x)$  означает расстояние на открытом множестве  $\Omega$  (подробнее см. далее). Это достигается за счет построения оценки типа Зигмунда, представленной Теоремой 1 в терминах локального модуля непрерывности, определенного через понятие субметрии: представляя самостоятельную ценность, подобные неравенства могут быть востребованы в исследовании устойчивости решений интегральных уравнений первого рода.

Приведенные результаты дополняют полученные авторами ранее в работе [3] для степенных весов с показателем, большим единицы. Технически «малость» показателя  $r$  у веса  $(w_a)$  обнаруживает свою специфику в выборе вспомогательных неравенств, используемых при доказательстве Теоремы 1, что, в качестве полезного следствия, влечет за собой, вообще говоря, иные значения ограничивающих констант, которые часто удается оценить точно.

Если  $D^\alpha$  выражает дифференциальный оператор (как в случае  $X = \mathbb{R}^n$ ), условия полученной здесь теоремы о действии могут рассматриваться как достаточные условия весовой квалифицированной гладкости функции  $f$  и быть соотнесены с классическими результатами.

**Обзор тематической области.** Раздел риссовых интегралов и производных дробного порядка получил развитие методами спектральной теории в таких известных работах С. Г. Самко, как [4–6]. Основным их результатом явилось

описание пространства риссовых потенциалов на  $\mathbb{R}^n$  в терминах разностных сингулярных интегралов, особенность которых доминирует над размерностью пространства [7]. Результаты об обращении потенциалов Рисса такими, гиперсингулярными, интегралами доказывались на функциях из  $L^p$ -пространства, в том числе — в весовых терминах.

Подходы, основанные на исследовании символов интегральных операторов на сфере, позволили качественно обобщить теоретические результаты относительно операторов типа потенциала, в сущности породив самостоятельное направление анализа сферических сверток. В этом отношении стоит отметить работу [8], где рассматривались спектры некоторых наиболее часто встречающихся операторов сферической свертки, а также [9], пионерскую с точки зрения классификации таких операторов на основании асимптотического поведения на бесконечности их мультипликаторов Фурье–Лапласа. В ней же был поставлен вопрос о гладкости сферических сверток в терминах обобщенных пространств Гёльдера, предпосылки к чему имеют довольно богатую историю; значимым же результатом в этом отношении является теорема об изоморфизме вида

$$A^\alpha (H^\varphi (\mathbb{S}^{n-1})) = H^{\varphi_\alpha} (\mathbb{S}^{n-1}),$$

где  $\mathbb{S}^{n-1}$  — единичная сфера в  $\mathbb{R}^n$ ,  $A^\alpha$  — оператор сферической свертки вида

$$A^\alpha f(x) := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} k(x \cdot \sigma) f(\sigma) d\sigma, \quad x \in \mathbb{S}^{n-1},$$

спектр которого  $\{k_m\}_{m=0}^\infty$  в разложении по сферическим гармоникам (мультипликатор Фурье–Лапласа) имеет заданную асимптотику при  $m \rightarrow \infty$ , а  $\varphi(h)$  и  $\varphi_\alpha(h)$  есть мажоранты модуля непрерывности, характеризующие обобщенную гёльдеровость рассматриваемых функций.

Стоит напомнить, что гладкость как свойство непрерывной дифференцируемости функций может вводиться весьма разнообразными способами. Например, работы [10–12] определяли пространство гладких функций на сфере как частный случай пространств Бесова. В то же время, альтернативная точка зрения предполагала введение гладкости в терминах дифференцируемости по декартовым координатам [13]. Однако работы [14–16] показали возможность эквивалентной нормировки пространств Гёльдера, возникающих в этих двух различных подходах.

Свое развитие тематика обобщенно-гёльдеровских пространств получила в работах [17–19], предлагавших использовать в качестве мажоранты модуля непрерывности произвольный, не обязательно степенной, функциональный параметр. Гармонический анализ в таких пространствах пополнился результатами в области теории потенциала [20–23], в том числе и в последние годы: так, исследования [25–27], развивая результаты работы [9], представили условия ограниченности оператора типа потенциала Рисса со степенно-логарифмическим ядром на сфере, а также связанного с ним стереографической проекцией пространственного потенциала. В частных случаях оператор осуществляет изоморфизм обобщенных пространств Гёльдера, причем обратный оператор выражается композицией с гиперсингулярным интегралом. В работе [28] описаны классы однозначно разрешимых (в пространствах обобщенной гёльдеровости) интегральных уравнений первого рода, ядро оператора в которых имеет слабую особенность.

Интерес к операторам дробного интегродифференцирования переменного порядка [29–33] был естественно сопряжен с рассмотрением функциональных пространств, определяющие параметры которых также имеют функциональную природу. Отметим исследования [34–37], в которых были доказаны, в том числе, теоремы типа Соболева в случае пространств Лебега с переменным показателем; работы [38–44], в которых рассматривались пространства  $H^{\lambda(x)}$  переменной гёльдеровости и действие в них сферических, а затем и пространственных потенциалов постоянного и переменного (включая комплексные) порядков, и, наконец, [48, 49], описывающие действие операторов типа потенциала и гиперсингулярных интегралов, определенных на однородных пространствах, в  $H^{\lambda(x)}$  в безвесовом и случае специального веса.

Стоит заметить, что ослабление требований к множеству интегрирования за счет введения интегралов на множествах почти однородных квазиметрических пространств [48–50], является существенной проблемой. Отличие подхода, применяемого в этом случае, от известных в классической теории состоит в необходимости локализации аналитических свойств функций на таких пространствах на основании более общих геометрических соображений. Неприменимы более замечательные следствия евклидовой метризации пространства: например, тождество параллелограмма, которое, в случае сферы, приводит к исследованию в область сферических сверток. Получение оценок типа Зигмунда затруднено отсутствием формулы Каталана, что потребовало создания аналогичного аппарата в работах [48, 49] (здесь он также используется в виде Лемм 2 и 3). Наконец, оценки вблизи особых точек, например «весовой» точки  $a$ , требует применения специальных неравенств, выводимых, как правило, непосредственно из неравенства треугольника или, в случае квазиметрических пространств, его обобщения. Немаловажно, что при этом параметризация констант, с которыми ограничены соответствующие интегралы, усложняется и в качественном аспекте: они теперь становятся зависимы от постулируемых характеристик самого множества интегрирования, что, конечно, играет свою роль в приложении полученных результатов для решения уравнений.

В настоящее время наибольший интерес представляют пространства обобщенной переменной гёльдеровости, введенные впервые в работе [45]. Исследования их с точки зрения риссова интегродифференцирования переменного порядка в [46, 47], ставили задачу на гиперсфере и гиперплоскости многомерного евклидова пространства; известны также результаты для этих пространств в нестандартном анализе голоморфных функций [51]. Большую значимость имеют современные исследования классов Никольского–Бесова, осуществляемые с введением нового модуля непрерывности [52, 53].

В завершение обзора следует заметить, что генерализация известных функциональных пространств затрагивает не только отдельные пространства квалифицированной гладкости. Так, большой интерес представляет развитие анализа в пространствах Морри и их обобщениях [54–59], причем спектр подходов к постановке и решению соответствующих задач демонстрирует разнообразие даже в такой небольшой выборке референтных работ. Стоит отметить интенсивное развитие теории гранд-пространств, которая результатами ряда современных исследований [60–69] превращена в самодостаточную область анализа.

Во многом такой широкий спрос на новые результаты в анализе на нестандартных пространствах продиктован приложениями в математической физике и задачах математического моделирования — такими, как обсуждались, например, в [70, 71].

#### ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

**Основные определения.** Пусть  $(X, d, \mu)$  — произвольное метрическое пространство, где  $d(x, \sigma)$  означает расстояние, а  $\mu(\sigma)$  — меру для всяких  $x, \sigma \in X$ . Будем предполагать  $(X, d, \mu)$  таковым, что все его открытые шары

$$B(x, h) := \{ \sigma \in X : d(x, \sigma) < h \}$$

измеримы и удовлетворяют следующему условию роста:

$$(B) \quad \forall x \in X : \mu B(x, h) \leq K h^\nu, \quad \text{когда } h \rightarrow 0, \quad K > 0,$$

где  $K$  не зависит от  $x$ , а показатель  $\nu > 0$  полагается действительным в рамках данной статьи. Будем полагать также, что все сферы в  $X$  удовлетворяют условию

$$\mu S(x, h) = 0, \quad S(x, h) := \{ \sigma \in X : d(x, \sigma) = h \}.$$

Условимся обозначать замкнутые шары в  $X$  символом  $B[x, h]$ .

Метрику  $d(x, y)$  будем полагать симметричной и удовлетворяющей классическому прямому неравенству треугольника:

$$(\Delta_1) \quad d(x, \sigma) \leq d(x, y) + d(y, \sigma).$$

В дальнейшем используется также обратное неравенство треугольника,

$$(\Delta_2) \quad |d(x, y) - d(y, \sigma)| \leq d(x, \sigma), \quad x, y, \sigma \in X,$$

эквивалентное  $(\Delta_1)$  для симметричных метрик. Наконец, условимся рассматривать произвольно выбранное множество  $\Omega$  такое, что

$$(\Omega) \quad \Omega \subset X, \quad 0 < \text{diam}(\Omega) < \infty, \quad \Omega \text{ — открытое.}$$

**Определение 1.** Пусть выбрано число, понимаемое как порядок гиперсингулярного интеграла:

$$\alpha \in \mathbb{C} : \quad 0 < \text{Re} \alpha < 1.$$

Гиперсингулярный интеграл определим следующим выражением:

$$D^\alpha f(x) := \int_{\Omega} \frac{f(\sigma) - f(x)}{d^{\nu+\alpha}(x, \sigma)} d\sigma, \quad x \in \Omega.$$

Здесь и далее символ  $d\sigma$  указывает на интегрирование по мере  $\mu(\sigma)$  в смысле главного значения:

$$\int_{\Omega} \varphi(x, \sigma) d\sigma = \lim_{h \rightarrow +0} \int_{\Omega \setminus B[x, h]} \varphi(x, \sigma) d\sigma.$$

Отметим, что в дальнейшем будем опускать явное указание меры, пользуясь ее свойствами имплицитно через Леммы 2 и 3, а также Теорему 2.

Напомним, далее, что отображение  $\varphi$  между метрическими пространствами  $M$  и  $N$  называется субметрией, если для каждой точки  $x \in M$  образ всякого замкнутого шара при отображении  $\varphi$  является замкнутым шаром того же радиуса с центром в точке  $\varphi(x)$  [72]. Оттолкнувшись от этого понятия, введем

следующую характеристику для случая, когда в качестве  $\varphi$  рассматривается функция:

**Определение 2.** Будем называть модулем субметрии функции  $f$ , определенной на  $\Omega$ , функцию

$$\omega_{\Omega}(f, x, h) := \sup_{\sigma \in \Omega \cap B[x, h]} |f(x) - f(\sigma)|, \quad x \in \Omega, \quad h > 0.$$

Наряду с Определением 2 рассмотрим, вслед за [18, с. 49], общее определение модуля непрерывности, адаптировав его под текущую постановку задачи:

**Определение 3.** Пусть выбрано число  $l : 0 < l \leq \text{diam}(\Omega)$ . Функцию

$$M(x, h), \quad x \in \Omega, \quad 0 < h \leq l,$$

будем называть локальным модулем непрерывности, если она удовлетворяет следующим четырем условиям:

$$(3.1) \quad \forall x \in \Omega : \quad M(x, 0) = 0;$$

$$(3.2) \quad M(x, h) \text{ является неубывающей функцией от } h \text{ равномерно по } x;$$

$$(3.3) \quad M(x, h) \text{ полуддитивна по } h, \text{ т.е.}$$

$$\forall x \in \Omega : \quad M(x, h_1 + h_2) \leq M(x, h_1) + M(x, h_2);$$

$$(3.4) \quad M(x, h) \text{ есть непрерывная по } h \text{ функция для всякого } x \in \Omega.$$

Модуль субметрии из Определения 2 не обязательно является локальным модулем непрерывности в смысле Определения 3, поскольку свойство (3.3) полуддитивности по  $h$ , вообще говоря, не гарантировано. В то же время, важное следствие свойства (3.3) составляет

**Лемма 1.** Пусть  $x \in \Omega$ ,  $0 < l \leq \text{diam}(\Omega)$ ,  $M(x, h)$  — локальный модуль непрерывности в смысле Определения 3. Имеет место оценка:

$$(M.1) \quad \frac{M(x, h_2)}{h_2} \leq 2 \frac{M(x, h_1)}{h_1}, \quad 0 < h_1 \leq h_2 \leq l.$$

*Доказательство.* Рассуждения в основе доказательства леммы ничем принципиально не отличаются от классического случая, изложенного в [18, с. 50]. Прежде всего, из свойства (3.3) в Определении 3 следует, что

$$(M.2) \quad \forall x \in \Omega : \quad M(x, nh) \leq n M(x, h), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Положим:

$$h_2 = h_1 + h, \quad 0 \leq (n_0 - 1)h_1 \leq h \leq n_0 h_1,$$

где  $n_0 = 1 + [h/h_1]$  и (причем только в этом контексте) через  $[k]$  обозначена целая часть числа  $k$ . Тогда имеем в силу свойства (3.3) и оценки (M.2), зафиксировав некоторую точку  $x \in \Omega$ :

$$\begin{aligned} \frac{M(x, h_2)}{h_2} &\leq \frac{M(x, h_1)}{h_1 + h} + \frac{M(x, h)}{h_1 + h} \leq \\ &\leq \frac{M(x, h_1)}{h_1} + \frac{M(x, n_0 h_1)}{h_1 + (n_0 - 1)h_1} \leq 2 \frac{M(x, h_1)}{h_1}. \end{aligned}$$

□

Отметим, что из свойства (М.2), а также (3.3) полуаддитивности и (3.2) неубывания по  $h$  следует следующая оценка с произвольным  $k > 0$ :

$$(M.3) \quad \begin{aligned} M(f, x, kh) &\leq [k] M(f, x, h) + M(f, x, \lambda h) \leq \\ &\leq (k+1) M(f, x, h), \quad k = [k] + \lambda, \quad 0 \leq \lambda < 1. \end{aligned}$$

Укажем частного представителя класса локальных модулей непрерывности, который составляет интерес в дальнейшем изложении:

$$(M_\Omega) \quad M_\Omega(f, x, h) := \sup_{\substack{\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega \cap B[x, l]: \\ d(\sigma_1, \sigma_2) \leq h}} |f(\sigma_1) - f(\sigma_2)|, \quad x \in \Omega, \quad 0 < h \leq l < \infty.$$

Если  $f$  непрерывна, свойства (3.1), (3.2) и (3.4) из Определения 3, очевидно, выполнены для  $(M_\Omega)$ ; свойство (3.3) легко проверяется: пусть

$$\sigma_k \in \Omega \cap B[x, l], \quad h_k := d(x, \sigma_k), \quad k = 1, 2,$$

тогда, согласно  $(\Delta_1)$ ,  $d(\sigma_1, \sigma_2) \leq h_1 + h_2$ , и справедливо:

$$\begin{aligned} |f(\sigma_1) - f(\sigma_2)| &\leq |f(\sigma_1) - f(x)| + |f(x) - f(\sigma_2)| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^2 \sup_{\substack{\sigma'_1, \sigma'_2 \in \Omega \cap B[x, l]: \\ d(\sigma'_1, \sigma'_2) \leq h_k}} |f(\sigma'_1) - f(\sigma'_2)| = M_\Omega(f, x, h_1) + M_\Omega(f, x, h_2). \end{aligned}$$

**Вспомогательный аппарат.** Раздел введения завершим, напомнив

**Определение 4.** Будем говорить, что неотрицательная функция  $L(x, t)$ , определенная на  $\Omega \times [0, l]$ ,  $0 < l < \infty$ , почти возрастает по  $t$  равномерно по  $x$ , если найдется константа  $c_L \geq 1$  такая, что выполнено неравенство

$$L(x, t) \leq c_L L(x, \tau) \quad \text{для всех } 0 < t < \tau \leq l.$$

Для оценки возникающих далее интегральных конструкций используются следующие леммы:

**Лемма 2.** Пусть  $L(x, t)$  – неотрицательная функция на  $\Omega \times [0, l]$ ,  $0 < l < \infty$ , почти возрастающая по  $t$  равномерно по  $x$  и удовлетворяющая неравенству

$$L(x, 2t) \leq C L(x, t), \quad 0 < C < \infty.$$

Для всякого  $\lambda$ ,  $0 \leq \lambda < \infty$ , имеет место оценка:

$$\int_{B(x, h)} \frac{L(x, d(x, \sigma))}{[d(x, \sigma)]^\lambda} d\sigma \leq c_0 \int_0^h \frac{t^{\nu-1} L(x, t)}{t^\lambda} dt, \quad 0 < c_0 < \infty,$$

где  $x \in \Omega$ ,  $0 < h < l$ , постоянные  $C$  и  $c_0$  не зависят от  $x$ .

**Лемма 3.** Пусть выполнены предпосылки Леммы 2. Тогда

$$\int_{\Omega \setminus B(x, h)} \frac{L(x, d(x, \sigma))}{[d(x, \sigma)]^\lambda} d\sigma \leq c_0 \int_h^l \frac{t^{\nu-1} L(x, t)}{t^\lambda} dt, \quad 0 < c_0 < \infty,$$

где  $0 < h < l/k$ ,  $k > 1$ , постоянная  $c_0$  не зависит от  $x \in \Omega$ .

Леммы 2 и 3 доказаны в работе [49] в более общем случае, когда вместо  $\lambda$  может быть рассмотрена неотрицательная, ограниченная на  $\Omega$  функция. Их роль для анализа на произвольных метрических, а также квазиметрических пространствах аналогична роли следствий из формул типа Каталана в случае пространств евклидовых. Небезынтересно отметить, что константа  $c_0$  в обеих леммах допускает точную оценку, связанную с постулируемыми свойствами пространства  $X$ .

В работах [48, 49] Леммы 2 и 3 (в указанном выше обобщенном виде) были использованы для доказательства оценок типа Зигмунда и теорем об ограниченности гиперсингулярного интеграла переменного порядка  $\alpha(\cdot)$  при отображении функций из  $H^{\omega(\cdot)}(\Omega)$ . Одна из этих теорем используется в завершающем отделе статьи — в релевантной поставленным задачам формулировке.

### ОЦЕНКА ТИПА ЗИГМУНДА

Прибавив и вычтя под знаком интеграла в  $D^\alpha$  произведение  $w(\sigma)f(\sigma)$ , получаем следующее представление, справедливое для произвольного веса  $w$ :

$$(1) \quad w(x) \int_{\Omega} \frac{f(\sigma) - f(x)}{d^{\nu+\alpha}(x, \sigma)} d\sigma = \int_{\Omega} \frac{f_w(\sigma) - f_w(x)}{d^{\nu+\alpha}(x, \sigma)} d\sigma + \\ + \int_{\Omega} \frac{w(x) - w(\sigma)}{w(\sigma)} \frac{f_w(\sigma)}{d^{\nu+\alpha}(x, \sigma)} d\sigma,$$

где обозначено:

$$f_w(x) := w(x)f(x), \quad x \in \Omega.$$

Введем в рассмотрение интегральный оператор

$$(2) \quad \mathfrak{D}_{\Omega}^{\alpha} f_w(x) := \int_{\Omega} \frac{w(x) - w(\sigma)}{w(\sigma)} \frac{f_w(\sigma) - f_w(a)}{d^{\nu+\alpha}(x, \sigma)} d\sigma.$$

Если вес  $w$  является степенной функцией вида  $(w_a)$ , то  $f_w(a) = 0$ , и из общего представления (1) имеем

$$(2) \quad w(x) D^{\alpha} f(x) = D^{\alpha} f_w(x) + \mathfrak{D}_{\Omega}^{\alpha} f_w(x), \quad x \in \Omega.$$

Для оператора  $\mathfrak{D}_{\Omega}^{\alpha}$  докажем следующий результат:

**Теорема 1.** Пусть  $0 < l < \infty$ , а под  $M(f, x, h)$  подразумеваются:

- модуль субметрии  $\omega_{\Omega}(f, x, h)$ , если он полуаддитивен по  $h$ ;
- минимальная мажоранта модуля  $\omega_{\Omega}$  из класса локальных модулей непрерывности, если  $\omega_{\Omega}(f, x, h)$  не обладает свойством полуаддитивности по  $h$  для данной функции  $f$  на  $\Omega$ ;
- определенный выше локальный модуль непрерывности  $(M_{\Omega})$ .

Имеет место оценка типа Зигмунда:

$$|\mathfrak{D}_{\Omega}^{\alpha} f_w(x) - \mathfrak{D}_{\Omega}^{\alpha} f_w(y)| \leq c \left\{ \sum_{z \in \{a, x, y\}} \int_0^h \frac{M(f_w, z, t)}{t^{1+\operatorname{Re} \alpha}} dt + \right. \\ \left. + h^r \sum_{z \in \{a, x\}} \int_h^l \frac{M(f_w, z, t)}{t^{1+r+\operatorname{Re} \alpha}} dt \right\}, \quad y \in B[x, h], \quad 0 < h < l, \quad 0 < c < \infty.$$

*Доказательство.* Отметим, что в условиях теоремы выполнено:

$$(A) \quad x, y \in \Omega : \quad d(x, y) \leq h < kh, \quad k > 1.$$

Имеет место следующая декомпозиция множества  $\Omega$ :

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup (\Omega_3 \cap \Omega_4),$$

где введены подмножества <sup>1</sup>

$$(\Omega_s) \quad \begin{aligned} \Omega_{1|2} &:= \{ \sigma \in \Omega : d(x|a, \sigma) < kh \}, \\ \Omega_{3|4} &:= \{ \sigma \in \Omega : d(x|a, \sigma) \geq kh \}. \end{aligned}$$

В терминах  $(\Omega_s)$  имеет место представление

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{\Omega}^{\alpha} f_w(x) - \mathfrak{D}_{\Omega}^{\alpha} f_w(y) &= \mathfrak{D}_{\Omega_1 \cup \Omega_2}^{\alpha} f_w(x) - \mathfrak{D}_{\Omega_1 \cup \Omega_2}^{\alpha} f_w(y) + \\ &+ \int_{\Omega_3 \cap \Omega_4} \frac{(w(x) - w(y)) + (w(y) - w(\sigma))}{w(\sigma)} \frac{f_w(\sigma) - f_w(a)}{d^{\nu+\alpha}(x, \sigma)} d\sigma - \\ &- \int_{\Omega_3 \cap \Omega_4} \frac{w(y) - w(\sigma)}{w(\sigma)} \frac{f_w(\sigma) - f_w(a)}{d^{\nu+\alpha}(y, \sigma)} d\sigma, \end{aligned}$$

из которого следует оценка

$$(3) \quad \begin{aligned} |\mathfrak{D}_{\Omega}^{\alpha} f_w(x) - \mathfrak{D}_{\Omega}^{\alpha} f_w(y)| &\leq |\mathfrak{D}_{\Omega_1 \cup \Omega_2}^{\alpha} f_w(x)| + |\mathfrak{D}_{\Omega_1 \cup \Omega_2}^{\alpha} f_w(y)| + \\ &+ |w(x) - w(y)| \cdot |I| + |J|, \end{aligned}$$

где явно выделены следующие интегралы:

$$\begin{aligned} I &:= \int_{\Omega_3 \cap \Omega_4} \frac{f_w(\sigma) - f_w(a)}{w(\sigma) d^{\nu+\alpha}(x, \sigma)} d\sigma, \\ J &:= \int_{\Omega_3 \cap \Omega_4} \frac{w(y) - w(\sigma)}{w(\sigma)} \left( \frac{1}{d^{\nu+\alpha}(x, \sigma)} - \frac{1}{d^{\nu+\alpha}(y, \sigma)} \right) f_w(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Будем последовательно оценивать слагаемые из правой части (3), конструируя мажоранты необходимого вида.

**Оценка первого слагаемого.** Множество  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  предполагает четыре взаимоисключающих варианта расположения точек  $x$  и  $a$ :

$$(4) \quad \begin{aligned} \Lambda_{1|2} &= \Lambda_{1|2}(x) := \{ \sigma \in \Omega : d(a|x, \sigma) \leq d(x|a, \sigma) < kh \}, \\ \Theta_{1|2} &= \Theta_{1|2}(x) := \{ \sigma \in \Omega : d(a|x, \sigma) < kh \leq d(x|a, \sigma) \}, \end{aligned}$$

где принципиально важным является соотношение  $d(a, \sigma)$  и  $d(x, \sigma)$ . Исходя из двух вариантов последнего, а именно:

$$\Lambda_1(x) \cup \Theta_1(x) \quad \text{и} \quad \Lambda_2(x) \cup \Theta_2(x),$$

составим мажоранту как сумму соответствующих интегралов.

<sup>1</sup>Здесь и далее запись вида « $a|b$ » употребляется для обозначения выбора из двух вариантов, условия которого очевидны или явно представлены.

Оценка интеграла по  $\Lambda_1 \cup \Theta_1$ . Очевидно неравенство:

$$|f_w(\sigma) - f_w(a)| \leq M(f_w, a, d(a, \sigma)), \quad \sigma \in \Lambda_1 \cup \Theta_1.$$

Имея в виду соотношение расстояний вида  $d(a, \sigma) \leq d(x, \sigma)$ , характерное для  $\Lambda_1 \cup \Theta_1$ , запишем, применив Лемму 2:

$$(5) \quad \begin{aligned} |\mathfrak{D}_{\Lambda_1 \cup \Theta_1}^\alpha f_w(x)| &\leq \int_{\Lambda_1 \cup \Theta_1} \frac{|f_w(\sigma) - f_w(a)|}{d^r(a, \sigma) [d(x, \sigma)]^{-r+\nu+\operatorname{Re} \alpha}} d\sigma \leq \\ &\leq \int_{B(a, kh)} \frac{M(f_w, a, d(a, \sigma))}{[d(a, \sigma)]^{\nu+\operatorname{Re} \alpha}} d\sigma \leq c_0 c_1 \int_0^h \frac{M(f_w, a, \tau)}{\tau^{1+\operatorname{Re} \alpha}} d\tau, \end{aligned}$$

где использована замена  $t = k\tau$ ,  $\tau \in (0, h)$ , вследствие чего константа  $c_1$  выражается исходя из свойства (М.2) как  $c_1 = k^{1-\operatorname{Re} \alpha}$  в случае натурального  $k$  и, согласно (М.3), как  $c_1 = (k+1)k^{-\operatorname{Re} \alpha}$  в общем случае.

Оценка интеграла по  $\Lambda_2 \cup \Theta_2$ . Для интеграла по  $\Lambda_2(x) \cup \Theta_2(x)$  рассуждения во многом аналогичны. Выше модуль субметрии вычислялся в точке  $a$ , поскольку  $d(a, \sigma)$  полагалось минимальным. Теперь же оценим числитель подынтегрального выражения, ориентируясь на гладкостные свойства функции  $f_w$  в окрестности точки  $x$ :

$$(6) \quad \begin{aligned} |f_w(\sigma) - f_w(a)| &\leq |f_w(\sigma) - f_w(x)| + |f_w(x) - f_w(a)| \leq \\ &\leq 3M(f_w, x, d(a, \sigma)), \quad d(x, \sigma) \leq d(a, \sigma). \end{aligned}$$

Поясним, что для второго слагаемого требуемая оценка следует из неравенства

$$d(x, a) \leq d(x, \sigma) + d(a, \sigma) \leq 2d(a, \sigma),$$

и свойства (М.2):

$$|f_w(x) - f_w(a)| \leq M(f_w, x, d(x, a)) \leq 2M(f_w, x, d(a, \sigma)).$$

Далее, в силу свойства (М.1) модуля непрерывности имеет место:

$$(7) \quad \frac{M(f_w, x, d(a, \sigma))}{d(a, \sigma)} \leq 2 \frac{M(f_w, x, d(x, \sigma))}{d(x, \sigma)}, \quad d(x, \sigma) \leq d(a, \sigma),$$

а значит, вновь применив Лемму 2, имеем:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{D}_{\Lambda_2 \cup \Theta_2}^\alpha f_w(x)| &\leq 3 \int_{\Lambda_2 \cup \Theta_2} \frac{M(f_w, x, d(a, \sigma))}{d^r(a, \sigma) d^{\nu-r+\operatorname{Re} \alpha}(x, \sigma)} d\sigma \leq \\ &\leq 6 \int_{B(x, kh)} \frac{M(f_w, x, d(x, \sigma))}{d^{\nu+\operatorname{Re} \alpha}(x, \sigma)} d\sigma \leq C_1 \int_0^h \frac{M(f_w, a, t)}{t^{\operatorname{Re} \alpha+1}} dt, \quad C_1 = 6c_0 c_1. \end{aligned}$$

Таким образом, мажоранта первого слагаемого из генерального представления (3) имеет вид:

$$(R_1) \quad |\mathfrak{D}_{\Omega_1 \cup \Omega_2}^\alpha f_w(x)| \leq C_1 \left\{ \int_0^h \frac{M(f_w, x, t)}{t^{\operatorname{Re} \alpha+1}} dt + \int_0^h \frac{M(f_w, a, t)}{t^{\operatorname{Re} \alpha+1}} dt \right\}.$$

**Оценка второго слагаемого.** В силу (A) и  $(\Delta_1)$  имеет место:

$$d(y, \sigma) \leq d(x, y) + d(x, \sigma) \leq (k+1)h, \quad \forall \sigma \in \Omega_1,$$

а значит

$$\Omega_1 \subseteq \{ \sigma \in \Omega : d(y, \sigma) \leq (k+1)h \} =: G, \quad G \cup \Omega_2 = \bigcup_{i=1}^2 \Lambda_i(y) \cup \Theta_i(y),$$

где  $\Lambda_i(y)$  и  $\Theta_i(y)$  заданы выражением (4). Повторив рассуждения из предыдущего пункта, приходим к искомой оценке вида  $(R_1)$ :

$$(R_2) \quad \left| \mathfrak{D}_{\Omega_1 \cup \Omega_2}^\alpha f_w(y) \right| \leq C_1 \left\{ \int_0^h \frac{M(f_w, y, t)}{t^{\operatorname{Re} \alpha + 1}} dt + \int_0^h \frac{M(f_w, a, t)}{t^{\operatorname{Re} \alpha + 1}} dt \right\}.$$

**Оценка третьего слагаемого.** Прежде всего отметим неравенство

$$(8) \quad |w(x_1) - w(x_2)| = |d^r(x_1, a) - d^r(x_2, a)| \leq d^r(x_1, x_2),$$

следующее из  $(\Delta_2)$ , а также числового результата

$$|d_1^r - d_2^r| \leq |d_1 - d_2|^r, \quad d_1, d_2 \geq 0, \quad 0 < r \leq 1,$$

известного, например, из работы [18, с. 27]. Применяя (8), имеем:

$$(9) \quad |w(x) - w(y)| \cdot |I| \leq k^r h^r \int_{\Omega_3 \cap \Omega_4} \frac{|f_w(\sigma) - f_w(a)|}{w(\sigma) d^{\nu + \alpha}(x, \sigma)} d\sigma.$$

Множество  $\Omega_3 \cap \Omega_4$  оставляет два равновозможных варианта расположения точек  $x$  и  $a$  относительно  $y$ :

$$(H_s) \quad H_{1|2} := \{ \sigma \in \Omega : kh \leq d(a|x, \sigma) \leq d(x|a, \sigma) \},$$

$$\Omega_3 \cap \Omega_4 = H_1 \cup H_2.$$

Представим интеграл в правой части (9) суммой интегралов с тем же подынтегральным выражением, но взятых по  $H_1$  и  $H_2$  соответственно; обозначим последние через  $I_1$  и  $I_2$ .

*Оценка  $I_1$ .* Интеграл по  $I_1$  оценивается в тех же соображениях, что и слагаемое  $\mathfrak{D}_{\Lambda_1 \cup \Theta_1}^\alpha f_w(x)$ , отсылая к (5). Именно, поскольку  $d(a, \sigma)$  минимально на  $H_1$ , запишем, применив Лемму 3:

$$|I_1| \leq \int_{\Omega \setminus B(a, kh)} \frac{M(f_w, a, d(a, \sigma))}{[d(a, \sigma)]^{r + \nu + \operatorname{Re} \alpha}} d\sigma \leq C \int_h^l \frac{M(f_w, a, t)}{t^{r + \operatorname{Re} \alpha + 1}} dt, \quad C = c_0 c_1.$$

*Оценка  $I_2$ .* Для оценки интеграла  $I_2$  воспользуемся теми же рассуждениями, что лежали в основе оценки  $\mathfrak{D}_{\Lambda_2 \cup \Theta_2}^\alpha f_w(x)$ . Обратимся к (6) и затем (7):

$$|I_2| \leq 3 \int_{H_2} \frac{M(f_w, x, d(a, \sigma))}{d^r(a, \sigma) d^{\nu + \operatorname{Re} \alpha}(x, \sigma)} d\sigma \leq 6 \int_{\Omega \setminus B(x, kh)} \frac{M(f_w, x, d(x, \sigma))}{[d(x, \sigma)]^{\nu + r + \operatorname{Re} \alpha}} d\sigma,$$

где осталось лишь применить Лемму 3.

Таким образом, имеем для третьего слагаемого:

$$(R_3) \quad |w(x) - w(y)| \cdot |I| \leq C_1 h^r \left\{ \int_h^l \frac{\omega_\Omega(f_w, x, t)}{t^{r + \operatorname{Re} \alpha + 1}} dt + \int_h^l \frac{\omega_\Omega(f_w, a, t)}{t^{r + \operatorname{Re} \alpha + 1}} dt \right\}.$$

**Оценка четвертого слагаемого.** Для удобства обозначим  $\lambda := \nu + \operatorname{Re} \alpha$ . Имеем следующую мажоранту:

$$|J| \leq \int_{\Omega_3 \cap \Omega_4} \frac{|d^r(a, y) - d^r(a, \sigma)|}{d^r(a, \sigma)} |d^{-\lambda}(x, \sigma) - d^{-\lambda}(y, \sigma)| |f_w(\sigma) - f_w(a)| d\sigma.$$

Для оценки отношения воспользуемся тем, что для всякой пары различных положительных чисел  $d_1$  и  $d_2$  имеет место следующая оценка:

$$(10) \quad |d_1^r - d_2^r| \leq r (d_1 |d_2|)^{r-1} |d_1 - d_2|, \quad 0 < r \leq 1,$$

которая является следствием классического двойного неравенства

$$(11) \quad r t_1^{r-1} (t_1 - t_2) < t_1^r - t_2^r < r t_2^{r-1} (t_1 - t_2), \quad 0 < r < 1,$$

приведенного в [73, с. 39] за ссылкой (2.15.2). Поясним, что под произвольным выбором  $d_1 |d_2|$  в правой части (10) подразумевается следующее рассуждение: пусть  $d_2 > d_1$ , тогда

$$0 < d_2^r - d_1^r = d_2^r \left[ 1^r - \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^r \right] \leq r d_1^r \left( 1 - \frac{d_1}{d_2} \right) \leq r d_2^{r-1} (d_2 - d_1),$$

где воспользовались (11) для оценки выражения в квадратных скобках, а затем возрастанием функции  $t^r$ ,  $r > 0$ . Заметим, что в [46, 49] аналогичный выражению (11) результат был получен применением к функции  $t^r$  теоремы о среднем в интегральной форме. Таким образом, имеем:

$$(12) \quad \frac{|d^r(a, y) - d^r(a, \sigma)|}{d^r(a, \sigma)} \leq r \frac{d(y, \sigma)}{d(a, \sigma)}.$$

Напомним также известное неравенство С. Л. Соболева [74, с. 251]:

$$(13) \quad \left| \frac{1}{d_1^\gamma} - \frac{1}{d_2^\gamma} \right| \leq c_\gamma \frac{|d_1 - d_2| (d_1 + d_2)^{\gamma-1}}{(d_1 d_2)^\gamma}, \quad \gamma > 0,$$

где положительная постоянная  $c_\gamma$  зависит только от  $\gamma$ . Применим (13) к оценке второго модуля в правой части мажоранты  $|J|$ :

$$|d^{-\lambda}(x, \sigma) - d^{-\lambda}(y, \sigma)| \leq \frac{c_\lambda k h}{d^\lambda(x, \sigma) d(y, \sigma)} \left[ 1 + \frac{d(x, \sigma)}{d(y, \sigma)} \right]^{\lambda-1}.$$

Ясно, что при  $\nu < 1 - \operatorname{Re} \alpha$ , то есть  $\lambda < 1$ , последняя скобка мажорируется единицей. Покажем, что она ограничена и в противоположном случае.

Принимая во внимание конструкцию множества интегрирования ( $\Omega_s$ ), а также изначальное условие (A), констатируем истинность двойного неравенства

$$d(x, y) < k h \leq d(x, \sigma), \quad \sigma \in \Omega_3 \cap \Omega_4,$$

а значит, и нижней оценки

$$d(y, \sigma) \geq d(x, \sigma) - d(x, y) > (k - 1) h, \quad \sigma \in \Omega_3 \cap \Omega_4.$$

Как следствие представленных выше соотношений имеем

$$\frac{d(x, \sigma)}{d(y, \sigma)} \leq \frac{d(x, y) + d(y, \sigma)}{d(y, \sigma)} < 1 + \frac{k h}{d(y, \sigma)} < 1 + \frac{k}{k - 1}, \quad k > 1.$$

Таким образом, в случае  $\sigma \in \Omega_3 \cap \Omega_4$  справедлива оценка

$$(14) \quad |d^{-\lambda}(x, \sigma) - d^{-\lambda}(y, \sigma)| \leq \frac{c_\lambda h}{d^\lambda(x, \sigma) d(y, \sigma)},$$

в которой постоянная  $c_\lambda$  зависит от параметров  $\alpha$ ,  $\nu$ , а также значения  $k > 1$ .

Объединив теперь оценки (12) и (14), имеем:

$$|J| \leq C_2 h \sum_{s=1}^2 \int_{H_s} \frac{|f_w(\sigma) - f_w(a)|}{d(a, \sigma) d^{\nu + \operatorname{Re} \alpha}(x, \sigma)} d\sigma = C_2 h (J_1 + J_2), \quad C_2 = r c_0 c_\lambda,$$

где интегралы  $J_1$  и  $J_2$  имеют то же подынтегральное выражение, но взяты, соответственно, по множествам  $H_1$  и  $H_2$ , определенным выражением ( $H_s$ ).

*Оценка  $J_1$ .* На  $H_1$  выполняется  $d(a, \sigma) \leq d(x, \sigma)$ , так что имеем, применив Лемму 3:

$$J_1 \leq \int_{\Omega \setminus B(a, kh)} \frac{M(f_w, a, d(a, \sigma))}{d[(a, \sigma)]^{\nu + \operatorname{Re} \alpha + 1}} d\sigma \leq c_0 c_1 \int_h^l \frac{M(f_w, a, t)}{t^{\operatorname{Re} \alpha + 2}} dt.$$

*Оценка  $J_2$ .* На  $H_2$  воспользуемся (6), (7) и Леммой 3:

$$J_2 \leq 6 \int_{\Omega \setminus B(x, kh)} \frac{M(f_w, x, d(x, \sigma))}{d^{\nu + \operatorname{Re} \alpha + 1}(x, \sigma)} d\sigma \leq C_1 \int_h^l \frac{M(f_w, x, d(x, \sigma))}{d^{\operatorname{Re} \alpha + 2}(x, \sigma)} d\sigma.$$

В заключение отметим, что

$$\frac{h}{t^{\operatorname{Re} \alpha + 2}} \leq \frac{h^r t^{1-r}}{t^{\operatorname{Re} \alpha + 2}} = \frac{h^r}{t^{r + \operatorname{Re} \alpha + 1}}, \quad h \leq t, \quad r \leq 1.$$

Таким образом, имеем для последнего слагаемого из представления (3):

$$(R_4) \quad |J| \leq C_1 C_2 h^r \left\{ \int_h^l \frac{M(f_w, x, t)}{t^{r + \operatorname{Re} \alpha + 1}} dt + \int_h^l \frac{M(f_w, a, t)}{t^{r + \operatorname{Re} \alpha + 1}} dt \right\}.$$

**Завершающие выводы.** Объединив полученные выше оценки ( $R_1$ ) – ( $R_4$ ), получаем утверждение доказываемой теоремы. Интересно отметить, что константа  $c$ , с которой оно справедливо, представляет собой произведение  $C_1$  и  $C_2$ , значения которых могут быть исследованы в контексте конкретной задачи.  $\square$

#### ТЕОРЕМЫ О ДЕЙСТВИИ

Доказанные далее теоремы утверждают условия ограниченности интегральных операторов  $D^\alpha$  (из Определения 1) и  $(\mathfrak{D}_\Omega^\alpha)$ , в пространствах обобщенной переменной, а также локальной обобщенной гёльдеровости со степенным весом ( $w_a$ ). Они существенно опираются на результат, полученный в [48], и сформулированы в контексте применяемых в этой работе понятий: восстановим последний.

**Пространства обобщенной переменной гёльдеровости.** Пусть  $\Omega$  удовлетворяет условиям ( $\Omega$ ). Востребовано

**Определение 5.** Будем говорить, что

$$\omega \in W_l(\Omega), \quad \text{где } \omega : \Omega \times (0, l] \rightarrow [0, \infty),$$

если выполнены следующие условия:

(1)  $\forall x \in \Omega$ :  $\omega(x, h)$  — непрерывная, почти возрастающая по  $h \in (0, l]$ , и

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(x, h) = 0;$$

(2)  $\inf_{x \in \Omega} \omega(x, h) > 0$  при  $h > 0$ .

В дальнейшем будем использовать  $\omega(x, h)$  как функциональный параметр, который называют *характеристикой* обобщенного пространства Гельдера.

**Определение 6.** Будем называть пространством  $H^{\omega(\cdot)}(\Omega)$  обобщенной переменной гёльдеровости линейное пространство функций, удовлетворяющих неравенству

$$\forall (x, h) \in \Omega \times (0, l] : M(f, x, h) \leq c\omega(x, h), \quad \omega \in W_l(\Omega), \quad 0 < c < \infty,$$

где  $M$  означает модуль субметрии  $\omega_\Omega$ , если, для данных  $f$  и  $\Omega$ , он полуаддитивен по  $h \in (0, l]$ , или его минимальную мажоранту из класса локальных модулей непрерывности в смысле Определения 3.

Пространство  $H^{\omega(\cdot)}(\Omega)$  является банаховым относительно нормы

$$\|f\|_{H^{\omega(\cdot)}(\Omega)} = \|f\|_{C(\Omega)} + \sup_{\substack{x \in \Omega, \\ h \in (0, l]}} \frac{M(f, x, h)}{\omega(x, h)},$$

где через  $C(\Omega)$  обозначено пространство непрерывных на  $\Omega$  функций.

Весовое пространство  $C(\Omega, w)$  определим обычным образом, но для работы с весом  $(w_a)$  приведем

**Определение 7.** Пусть  $\Omega_0 \subset \Omega$ . Функцию  $f \in C(\Omega, w)$  отнесем к  $H_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w)$ , если

$$w f \in H^{\omega(\cdot)}(\Omega) \quad \text{и} \quad \forall x \in \Omega_0 : (w f)(x) = 0.$$

Докажем ограниченность гиперсингулярного интеграла  $D^\alpha$  при отображении функции из  $H_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$ , считая  $\Omega_0 = \{a\}$ .

**Основной результат.** Спецификацией класса  $W_l$  является класс Бари–Стечкина, который имеет следующее определение:

**Определение 8.** Функция  $\omega \in W_l(\Omega)$  принадлежит классу Бари–Стечкина  $\Phi_\beta^\delta$ ,  $0 \leq \delta < \beta$ , если одновременно выполнены следующие условия:

$$(15) \quad \int_0^h \left(\frac{h}{t}\right)^\delta \frac{\omega(x, t)}{t} dt \leq c\omega(x, h), \quad \int_h^l \left(\frac{h}{t}\right)^\beta \frac{\omega(x, t)}{t} dt \leq c\omega(x, h),$$

где  $x \in \Omega$ ,  $0 < h \leq l$ , постоянная  $c > 0$  не зависит ни от  $x$ , ни от  $h$ .

**Теорема 2.** Пусть гёльдеровская характеристика

$$(16) \quad \omega \in \Phi_{1+\text{Re } \alpha}^{\text{Re } \alpha}, \quad 0 < \text{Re } \alpha < 1,$$

а также удовлетворяет условию непрерывности типа Дини:

$$(17) \quad c_1 \omega(y, d(x, y)) \leq \omega(x, d(x, y)) \leq c_2 \omega(y, d(x, y)), \\ x, y \in \Omega, \quad 0 < c_1, c_2 < \infty.$$

Тогда оператор  $D^\alpha$  ограничен из  $H^{\omega(\cdot)}(\Omega)$  в  $H^{\omega_{-\alpha}(\cdot)}(\Omega)$  с характеристикой

$$(18) \quad \omega_{-\alpha}(x, h) := h^{-\text{Re } \alpha} \omega(x, h), \quad 0 < h \leq l < \infty.$$

Теорема 2 доказывалась в работе [49]. Новый результат представляет

**Теорема 3.** Пусть характеристика  $\omega(x, h)$  удовлетворяет условиям (16) и (17), а также, для всякого  $h > 0$ , условию

$$(18) \quad \sup_{x \in \Omega} \frac{\omega(a, h)}{\omega(x, h)} \leq c_\omega, \quad 0 < c_\omega < \infty.$$

Тогда оператор  $D^\alpha$  ограничен из  $H^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$  в  $H^{\omega-\alpha(\cdot)}(\Omega, w_a)$  с характеристикой  $(\omega_\alpha)$  и степенным весом  $(w_a)$ .

*Доказательство.* По предположению теоремы выполнено:

$$(19) \quad \forall x \in \Omega: \quad M(w_a f, x, h) \leq C \omega(x, h), \quad h \in (0, l], \quad 0 < l \leq \text{diam}(\Omega),$$

где в качестве  $M$  выступает  $\omega_\Omega$  или его минимальная мажоранта из класса локальных модулей непрерывности.

Воспользуемся аддитивным представлением (2). Ограниченность первого слагаемого в правой его части утверждается Теоремой 2. Ограниченность же оператора  $\mathfrak{D}_\Omega^\alpha$  на функции  $H_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$  следует из оценки типа Зигмунда, указанной в Теореме 1.

Действительно, на основании (19) имеет место неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{|\mathfrak{D}_\Omega^\alpha f_w(x) - \mathfrak{D}_\Omega^\alpha f_w(y)|}{h^{-\text{Re } \alpha} \omega(x, h)} &\leq \frac{c}{\omega(x, h)} \left\{ \sum_{z \in \{a, x, y\}} \int_0^h \left(\frac{h}{t}\right)^{\text{Re } \alpha} \frac{\omega(z, t)}{t} dt + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{z \in \{a, x\}} \int_h^l \left(\frac{h}{t}\right)^{r+\text{Re } \alpha} \frac{\omega(z, t)}{t} dt \right\}, \quad 0 < c < \infty, \end{aligned}$$

Справедливы следующие рассуждения:

- слагаемые с  $z = a$  получают мажоранту нужного вида немедленно ввиду условия (18) доказываемой теоремы, которое влечет оценку

$$\frac{c}{\omega(x, h)} \leq \frac{c}{\omega(a, h)} \sup_{x \in \Omega} \frac{\omega(a, h)}{\omega(x, h)} \leq \frac{c c_\omega}{\omega(a, h)}, \quad h > 0;$$

- слагаемые, где  $z = x$ , оцениваются непосредственно исходя из определения класса Бари–Стечкина;
- для оценки слагаемых, у которых  $z = y$ , учтем требование (17), которое сводит этот случай к предыдущему.

□

Заметим, что, если при всяком  $h > 0$  функция  $\omega(x, h)$  достигает минимума в точке  $x = a$ , то условие (18) может быть очевидным образом переформулировано с константой  $c_\omega = 1$ .

**Локальное обобщенное пространство Гёльдера.** Предложим одно обобщение локальной непрерывности по Гёльдеру в терминах введенного выше модуля  $(M_\Omega)$ . Как и ранее, рассматривается метрическое пространство  $X$  с мерой, которое удовлетворяет условиям (B),  $(\Delta_1)$ ,  $(\Delta_2)$ .

**Определение 9.** Пусть  $\Omega \subset X$  удовлетворяет (Ω). Будем понимать под локальным обобщенным пространством Гёльдера  $\mathcal{H}^{\omega(\cdot)}(\Omega)$  линейное пространство функций, удовлетворяющих условию

$$M_{\Omega}(f, x, h) \leq c \omega(x, h), \quad x \in \Omega, \quad h \in (0, l], \quad 0 < c < \infty,$$

где предполагается

$$\omega \in W_l(\Omega), \quad 0 < l \leq \text{diam}(\Omega).$$

Аналогично Определению 7 составим определение  $\mathcal{H}_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w)$ . В силу (М.2) выполнено следующее соотношение:

$$\forall x \in \Omega: \quad \omega_{\Omega}(f, x, h) \leq 2 M_{\Omega}(f, x, h), \quad h \in (0, l], \quad 0 < l < \infty,$$

что позволяет утверждать о теоретико-множественном включении  $\mathcal{H}$ -пространств в  $H$ -пространства хотя бы в том случае, когда  $\omega_{\Omega}$  принадлежит классу локальных модулей непрерывности; обратное же не гарантировано.

Из Теоремы 1 непосредственно следует ограниченность оператора  $\mathfrak{D}_{\Omega}^{\alpha}$  при отображении функции из  $\mathcal{H}_0(\Omega, w)$ :

**Теорема 4.** Пусть выполнены условия Теоремы 3. Оператор  $\mathfrak{D}_{\Omega}^{\alpha}$  ограничен из  $\mathcal{H}_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$  в  $\mathcal{H}_0^{\omega_{\alpha}(\cdot)}(\Omega, w_a)$ , где имеют место определения  $(\omega_{\alpha})$ ,  $(w_a)$ .

Рассуждения в основе доказательства Теоремы 4 повторяют таковые для Теоремы 3, не представляя существенной новизны. Относительно оператора  $D^{\alpha}$  из Определения 1 сформулируем, имея в виду методику получения оценок типа Зигмунда в безвесовом случае,

**Предложение 1.** В предпосылках Теоремы 3 гиперсингулярный интеграл  $D^{\alpha}$  ограничен из  $\mathcal{H}_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$  в  $\mathcal{H}_0^{\omega_{\alpha}(\cdot)}(\Omega, w_a)$ .

#### REFERENCES

- [1] S. G. Samko, A. A. Marichev, O. I. Kilbas, *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Philadelphia, PA, 1993.
- [2] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, 2001.
- [3] Yu. E. Drobotov, B. G. Vakulov, *Hypersingular integrals in power-weighted variable generalized Hölder spaces over metric measure spaces*, J Math Sci (2024)
- [4] S. G. Samko, *On spaces of Riesz potentials*, Izv. Math., **10**:5 (1976), 1089–1117.
- [5] S. G. Samko, *Generalized Riesz potentials and hypersingular integrals, their symbols and inversion*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **232**:3 (1977), 528–531.
- [6] S. G. Samko, *Spherical potentials, spherical Riesz differentiation, and their applications*, Russian Math. (Iz. VUZ), **21**:2 (1977), 106–110.
- [7] S. G. Samko, *Generalized Riesz potentials and hypersingular integrals with homogeneous characteristics; their symbols and inversion*, Proc. Steklov Inst. Math., **156** (1980), 173–243.
- [8] S. G. Samko, *Singular integrals over a sphere and the construction of the characteristic from the symbol*, Russian Math. (Iz. VUZ), **27**:4 (1983), 35–52.
- [9] B. G. Vakulov, *An operator of potential type on a sphere in generalized Hölder classes*, Russian Math. (Iz. VUZ), **30**:11 (1986), 90–94.

- [10] A. S. Dzhaferov, *Konstruktivnoe opisanie obobshhennykh klassov Besova na mnogomernoj sfere*, DAN SSSR, **285**: 3 (1985), 542–546.
- [11] A. D. Gadzhiev, H. P. Rustamov, *Jekvivalentnaja normirovka v prostranstvax Besova na sfere i svojstva simvola mnogomernogo singuljarnogo integrala*, Izv. vuzov, Matemat., **9** (1984), 69–71.
- [12] I. V. Petrova, *Teorema Dzheksona i prostranstva Besova na sfere*, DAN SSSR, Vol. 276, 3 (1984), 544–549.
- [13] S. M. Nikolsky, Lizorkin P. I. *Priblizhenie sfericheskimi polinomami*, Tr. MIAN SSSR, Moscow, 166, 1984, 186–200.
- [14] B. G. Vakulov, S. G. Samko, *Equivalent normings in spaces of functions of fractional smoothness on the sphere, of type  $C^\lambda(\mathbb{S}_{n-1})$ ,  $H^\lambda(\mathbb{S}_{n-1})$* , Russian Math. (Iz. VUZ), **31**: 12 (1987), 90–95.
- [15] S. G. Samko, B. G. Vakulov, *On equivalent norms in fractional order function spaces of continuous functions on the unit sphere*, Fract. Calc. Appl. Anal., **3**: 4 (2000), 401–433.
- [16] B. G. Vakulov, *Ob ekvivalentnykh normirovках v prostranstvax funkcij kompleksnoj gladkosti na sfere*, Proceedings of the Institute of Mathematics, **9** (2001), 41–44.
- [17] A. S. Dzhaferov, *Nailuchshee priblizhenie konechnymi sfericheskimi summami i nekotorye differencial'nye svojstva garmonicheskikh v share funkcij*, Teoremy vlozheniya i ih prilozheniya. Trudy simpoziuma po teoreмам vlozheniya. Baku, 1966 god, Nauka, 1970, 75–81.
- [18] A. I. Gusejnov, H. Sh. Muhtarov, *Vvedenie v teoriyu nelinejnykh singulyarnykh integral'nykh uravnenij*, Nauka, Moscow, 1980.
- [19] H. P. Rustamov, *O tochnosti gladkostnykh svojstv simvola mnogomernogo singuljarnogo operatora s nepreryvnoj harakteristikoj*, Deponirovanie v VINITI, Baku, 1981, №5014-81 DEP.
- [20] L. D. Shankishvili *Operatory tipa sfericheskogo potenciala kompleksnogo porjadka v obobshhjonnykh prostranstvax Gjol'dera*, Deponirovanie v VINITI 23.03.98, №860-B98.
- [21] B. G. Vakulov, *Sfericheskie operatory tipa potenciala v obobshhennykh prostranstvax Gel'dera s vesom na sfere*, Izvestiya vysshih uchebnykh zavedenij. Severo-Kavkazskij region. Seriya: estestvennye nauki, **4** (1999), 5–10.
- [22] B. G. Vakulov, N. K. Karapetians, L. D. Shankisdvili, *Spherical hypersingular operators of imaginary order and their multipliers*, Fractional Calculus and Applied Analysis, **4** : 1 (2001), 101.
- [23] B. G. Vakulov, N. K. Karapetjanc, L. D. Shankishvili, *Spherical convolution operators with a power-logarithmic kernel in generalized Hölder spaces*, Russian Math. (Iz. VUZ), **47**:2 (2003), 1–12.
- [24] B. G. Vakulov, G. S. Kostetskaya, Yu. E. Drobotov, *Riesz potentials in generalized Hölder spaces*, Fractal Approaches for Modeling Financial Assets and Predicting Crises, IGI Global, 249–273.
- [25] B. G. Vakulov, Yu. E. Drobotov, *Riesz potential with logarithmic kernel in generalized Hölder spaces*, Recent Applications of Financial Risk Modelling and Portfolio Management, IGI Global, 275–296.
- [26] B. G. Vakulov, Yu. E. Drobotov, *The Riesz potential type operator with a power-logarithmic kernel in the generalized Hölder spaces on a sphere*, Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications, Springer International

- Publishing, Cham, 147–159.
- [27] Yu. E. Drobotov, B. G. Vakulov, *Smoothness properties of a Riesz potential type operator with logarithmic characteristic*, University News. North-Caucasus Region. Natural Sciences Series, **1** (2022), 4–11.
- [28] Yu. E. Drobotov, B. G. Vakulov, *The Riesz potential type operator with a power-logarithmic kernel in the generalized Hölder spaces on a sphere*, Springer Proceedings in Materials, **20** (2023), 120–132.
- [29] S. G. Samko, B. Ross, *Integration and differentiation to a variable fractional order*, Integral Transform. Spec. Funct, **1** (1993), 277–300.
- [30] S. G. Samko, *Fractional integration and differentiation of variable order*, Anal. Math., **21** (1995), 213–236.
- [31] B. G. Vakulov, E. S. Kochurov, *Operatory drobnogo integririvanija i differencirovanija peremennogo porjadka v prostranstvah Gjol'dera  $H^{\omega(x,t)}$* , Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal, **12**: 4 (2010), 3–11.
- [32] B. G. Vakulov, E. S. Kochurov, *Ocenki tipa Zigmunda dlja operatorov drobnogo integririvanija i differencirovanija peremennogo porjadka*, Izv. vuzov. Sev. Kavk. region. Estestv. nauki. Specvypusk (2011), 15–17.
- [33] B. G. Vakulov, E. S. Kochurov, N. G. Samko, *Zygmund-type estimates for fractional integration and differentiation operators of variable order*, Russian Mathematics, **55**: 6 (2011), 20–28.
- [34] S. G. Samko, *Differentiation and integration of variable order and the spaces  $L^{p(x)}$* , Contemporary Mathematics, **212** (1998), 203–219.
- [35] B. G. Vakulov, S. G. Samko, *A weighted Sobolev theorem for spatial and spherical potentials in Lebesgue spaces with variable exponents*, Doklady Mathematics, **72** : 1 (2005), 487–490.
- [36] S. Samko, E. Shargorodsky, B. Vakulov, *Weighted Sobolev theorem with variable exponent for spatial and spherical potential operators, II*, Journal of Mathematical Analysis and Applicationsthis, **325**: 1 (2007), 745–751.
- [37] N. G. Samko, S. G. Samko, B. G. Vakulov, *Weighted Sobolev theorem in Lebesgue spaces with variable exponent*, Journal of Mathematical Analysis and Applicationsthis, **335**: 1 (2007), 560–583.
- [38] A. I. Ginsburg, N. K. Karapetyants, *Drobnoe integrodifferencirovanie v gel'derovskih klassah peremennogo porjadka*, Doklady RAN, **339**: 4 (1994), 439–441.
- [39] B. Ross, S. G. Samko, *Fractional integration operator of a variable order in the Hölder spaces  $H^{\lambda(x)}$* , Internat. J. Math. Math. Sci., **18** (1995), 777–788.
- [40] B. G. Vakulov, *Sfericheskie operatory tipa potenciala v vesovyh prostranstvah Gjol'dera peremennogo porjadka*, Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal, **7**: 2 (2005), 26–40.
- [41] B. G. Vakulov, *Spherical potentials in weighted Hölder spaces of variable order*, Doklady Mathematics, **71**: 1 (2005), 1–14.
- [42] B. G. Vakulov, *Spherical potentials of complex order in the variable order Hölder spaces*, Integral Transforms and Special Functions, **16**: 5-6 (2005), 489–497.
- [43] B. G. Vakulov, *Spherical convolution operators in spaces of variable Hölder order*, Mathematical Notes, **80**: 5–6 (2006), 645–657.
- [44] B. G. Vakulov, Yu. E. Drobotov, *Riesz potential with integrable density in Hölder-variable spaces*, Mathematical Notes, **108**:5 (2020), 669–678.

- [45] B. G. Vakulov, *Spherical potentials of complex order in generalized Hölder spaces of variable order*, Doklady Akademii Nauk, **407**:1 (2006), 12–15.
- [46] N. Samko, B. Vakulov, *Spherical fractional and hypersingular integrals of variable order in generalized Hölder spaces with variable characteristic*, Mathematische Nachrichten, **284**: 2–3 (2011), 355–369.
- [47] B. G. Vakulov, Yu. E. Drobotov, *Variable order Riesz potential over  $\mathbb{R}^n$  on weighted generalized variable Hölder spaces*, Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya, **14** (2017), 647–656.
- [48] B. G. Vakulov, N. G. Samko, S. G. Samko, *Operatory tipa potencijala i gipersingulyarnye integraly v prostranstvah Gyol'dera peremennogo porjadka na odnorodnyh prostranstvah*, Izv. vuzov. Sev. Kavk. region. Estestv. nauki. Specvypusk, (2009), 40–45.
- [49] N. Samko, S. Samko, B. Vakulov, *Fractional integrals and hypersingular integrals in variable order Hölder spaces on homogeneous spaces*, Journal of Function Spaces and Applications, **8**:3 (2010), 215–244.
- [50] S. G. Samko, *Potential operators in generalized Hölder spaces on sets in quasi-metric measure spaces without the cancellation property*, Nonlinear Analysis, **78** (2013), 130–140.
- [51] A. Karapetyants, S. Samko, *Variable order fractional integrals in variable generalized Hölder spaces of holomorphic functions*, Analysis and Mathematical Physics, **11**:156 (2021).
- [52] E. D. Kosov, *A Characterization of Besov Classes in Terms of a New Modulus of Continuity*, Doklady Mathematics, **96**:3 (2017), 587–590.
- [53] E. D. Kosov, *Besov classes on finite and infinite dimensional spaces*, Sb. Math., **210**:5 (2019), 663–692.
- [54] M. L. Gol'dman, E. G. Bakhtigareeva, *Application of general approach to the theory of Morrey-type spaces*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, **43**:16 (2020), 9435–9447.
- [55] S. G. Samko, S. M. Umarchadzhiev, *Grand Morrey type spaces*, Vladikavkaz Mathematical Journal, **22**:4 (2020), 104–118.
- [56] O. G. Avsyankin, *On integral operators with homogeneous kernels in Morrey spaces*, Eurasian Math. J., **12**:1 (2021), 92–96.
- [57] V. I. Burenkov, M. A. Senouci, *Boundedness of the generalized Riesz potential in local Morrey type spaces*, Eurasian Math. J., **12**:4 (2021), 92–98.
- [58] V. I. Burenkov, E. D. Nursultanov, *Interpolation theorems for nonlinear operators in general Morrey-type spaces and their applications*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics [this link is disabled](#), **312**:1 (2021), 124–149.
- [59] I. Ekincioglu, S. M. Umarchadzhiev, *Oscillatory integrals with variable Calderon-Zygmund kernel on generalized weighted Morrey spaces*, Transactions Issue Mathematics, Azerbaijan National Academy of Sciences, **42**:1 (2022), 99–110.
- [60] S. M. Umarchadzhiev, *Generalization of a notion of grand Lebesgue space*, Russian Math. (Iz. VUZ), **58**:4 (2014), 35–43.
- [61] S. M. Umarchadzhiev, Yu. E. Drobotov, *Riesz potential in generalized grand Lebesgue space*, Bulletin of the Academy of Sciences of the Chechen Republic, **4**(29) (2015), 26–29.
- [62] Yu. E. Drobotov, S. M. Umarchadzhiev, *Riesz potential with homogeneous kernel in grand Lebesgue spaces on semi-axis*, Bulletin of the Academy of

- Sciences of the Chechen Republic, **1**(38) (2018), 18–25.
- [63] S. M. Umarkhadzhiev, *On elliptic homogeneous differential operators in grand spaces*, Russian Mathematics, **64**:3 (2020), 57–65.
- [64] S. M. Umarkhadzhiev, *Unilateral ball potentials in grand Lebesgue spaces*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, **357** (2021), 569–576.
- [65] S. G. Samko, S. M. Umarkhadzhiev, *Local grand Lebesgue spaces*, Vladikavkaz Mathematical Journal, **23**:4 (2021), 96–108.
- [66] S. G. Samko, S. M. Umarkhadzhiev, *Weighted Hardy operators in grand Lebesgue spaces on  $\mathbb{R}^n$* , J Math Sci (2022)
- [67] H. Rafeiro, S. Samko, S. Umarkhadzhiev, *Grand Lebesgue space for  $p = \infty$  and its application to Sobolev–Adams embedding theorems in borderline cases*, Mathematische Nachrichten, **295**: 5 (2022), 991–1007.
- [68] H. Rafeiro, S. Samko, S. Umarkhadzhiev, *Local grand Lebesgue spaces on quasi-metric measure spaces and some applications*, Positivity, **26**: 3 (2022), 53.
- [69] S. M. Umarkhadzhiev, *Embedding of grand central Morrey-type spaces into local grand weighted Lebesgue spaces*, J Math Sci (2022)
- [70] V. E. Tarasov *Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*, Springer Berlin, Heidelberg, 2010.
- [71] I. A. Parinov, S. V. Zubkov, A. S. Skaliukh, V. A. Chebanenko, A. V. Cherpakov, Yu. E. Drobotov, *Advanced Ferroelectric and Piezoelectric Materials: With Improved Properties and their Applications*, World Scientific, 2024.
- [72] V. N. Berestovskii, *Submetries of space-forms of negative curvature*, Siberian Mathematical Journal, **28** (1987), 552–562.
- [73] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1934.
- [74] S. L. Sobolev, *Vvedenie v teoriyu kubaturnyh formul*, Nauka, Moscow, 1974.

YURI EVGENIEVICH DROBOTOV  
INSTITUTE OF MATHEMATICS, MECHANICS AND COMPUTER SCIENCES NAMED AFTER I. I. VOROVICH,  
UL. MILCHAKOVA, 8A,  
344090, ROSTOV-ON-DON, RUSSIA  
NORTH-CAUCASUS CENTER FOR MATHEMATICAL RESEARCH OF THE VLADIKAVKAZ SCIENTIFIC  
CENTRE OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES,  
UL. VIL'YAMSA, 1,  
363110, RSO-ALANIYA, PRIGORODNYJ RAJON, S. MIHAJLOVSKOE, RUSSIA  
DON STATE TECHNICAL UNIVERSITY,  
GAGARINA SQU., 1,  
344000, ROSTOV-ON-DON, RUSSIA  
Email address: [yu.e.drobotov@yandex.ru](mailto:yu.e.drobotov@yandex.ru)

BORIS GRIGORIEVICH VAKULOV  
INSTITUTE OF MATHEMATICS, MECHANICS AND COMPUTER SCIENCES NAMED AFTER I. I. VOROVICH,  
MILCHAKOVA STR., 8A,  
344090, ROSTOV-ON-DON, RUSSIA  
Email address: [bvak1961@bk.ru](mailto:bvak1961@bk.ru)