S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 517.5
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 31B10

К ИССЛЕДОВАНИЮ ВЕСОВОЙ ОБОБЩЕННОЙ ГЕЛЬДЕРОВОСТИ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА НА МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ С МЕРОЙ

Ю.Е. ДРОБОТОВ, Б.Г. ВАКУЛОВ

Abstract. Получены весовые оценки типа Зигмунда для гиперсингулярного интеграла на почти однородном метрическом пространстве и, на их основе, теоремы о действии данного оператора в весовом пространстве обобщенной переменной гёльдеровости. В качестве веса рассматривается представитель класса степенных функций. Показано, что гиперсингулярный интеграл «ухудшает» характеристику обобщенного пространства Гёльдера на порядок гиперсингулярного интеграла. Условия представленных теорем сформулированы в терминах класса Бари–Стечкина, а также специального аналога условия Дини.

Keywords: bounded operator, continuity, generalized Hölder spaces, hypersingular integral, integral equations, local modulus of continuity, modulus of submetry, Zygmund-type estimates

Введение

Как известно, риссово дробное интегродифференцирование функций многих вещественных переменных определяет производную через гиперсингулярный

Drobotov Yu. E., Vakulov B. G., On the weighted generalized Hölder continuity of a hypersingular integral over a metric measure space.

Работа Дроботова Ю. Е. поддержана РФФИ и ТУБИТАК (грант 20-51-46003).

Работа Дроботова Ю. Е. выполнена в Северо-Кавказском центре математических исследований ВНЦ РАН при поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2024-1379.

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

интеграл [1, с. 483] (см. также [4, 5]), в том числе и на однородных пространствах, например – сфере [6]. Кроме того, всякий однородный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами может быть выражен гиперсингулярным интегралом с характеристикой специального вида [1, с. 530], что вызывает особый интерес к исследованию таких операторов в контексте задач математической физики.

Один из основных вопросов качественной теории интегральных операторов состоит в отыскании способа формализации их гладкости, содержательно характеризующего устойчивость соответствующих уравнений. На этом пути неизбежны обобщения классических функциональных пространств, в том числе пространств гёльдеровского типа, введение которых еще в теории эллиптических уравнений в частных производных мотивировано тем же вопросом. В качестве простой аналогии можно отметить, что потребность в описании континуальных свойств функций с помощью условия Гёльдера возникает еще при исследовании классического уравнения Пуассона [2, с. 51], в то время как гиперсингулярный интеграл на n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ реализует дробные степени оператора Лапласа.

Обзор исследования. В настоящей работе рассмотрены операторы гиперсингулярного интегрирования по множеству почти однородного метрического пространства. Исследуется отображение такими операторами функций, удовлетворяющих условию типа Гёльдера с локальным модулем непрерывности, представления о котором подробно раскрываются.

Говоря конкретно, в Теореме 2 доказана ограниченность гиперсингулярного интеграла D^{α}, заданного Определением 1, при отображении функций из весового пространства обобщенной переменной гёльдеровости $H_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$, введенного в Определении 7, в случае, когда вес является степенной функцией вида

$$(w_a) \qquad w_a(x) := d^{r}(x,a), \quad a, x \in \Omega, \quad 0 < r \leq 1,$$

где d означает расстояние на Ω (подробнее см. далее). Это достигается за счет построения оценки типа Зигмунда, представленной Теоремой 1 в терминах локального модуля непрерывности, определенного через понятие субметрии: представляя самостоятельную ценность, подобные неравенства могут быть востребованы в исследовании устойчивости решений интегральных уравнений первого рода.

Приведенные результаты дополняют полученные авторами ранее в работе [3] для степенных весов с показателем, большим единицы. Технически «малость» показателя r у веса (w_a) обнаруживает свою специфику в выборе вспомогательных неравенств, используемых при доказательстве Теоремы 1, что, в качестве полезного следствия, влечет за собой, вообще говоря, иные значения ограничивающих констант, которые часто удается оценить точно.

Если D^{α} выражает дифференциальный оператор (как в случае $X = \mathbb{R}^n$), условия полученной здесь теоремы о действии могут рассматриваться как достаточные условия весовой квалифицированной гладкости функции f и быть соотнесены с классическими результатами.

Обзор тематической области. Раздел риссовых интегралов и производных дробного порядка получил развитие методами спектральной теории в таких известных работах С. Г. Самко, как [4–6]. Основным их результатом явилось описание пространства риссовых потенциалов на $\mathbb{R}^n$ в терминах разностных сингулярных интегралов, особенность которых доминирует над размерностью пространства [7]. Результаты об обращении потенциалов Рисса такими, гиперсингулярными, интегралами доказывались на функциях из L^p–пространства, в том числе — в весовых терминах.

Подходы, основанные на исследовании символов интегральных операторов на сфере, позволили качественно обобщить теоретические результаты относительно операторов типа потенциала, в сущности породив самостоятельное направление анализа сферических сверток. В этом отношении стоит отметить работу [8], где рассматривались спектры некоторых наиболее часто встречающихся операторов сферической свертки, а также [9], пионерскую с точки зрения классификации таких операторов на основании асимптотического поведения на бесконечности их мультипликаторов Фурье–Лапласа. В ней же был поставлен вопрос о гладкости сферических сверток в терминах обобщенных пространств Гёльдера, предпосылки к чему имеют довольно богатую историю; значимым же результатом в этом отношении является теорема об изоморфизме вида

$$A^{\alpha}\left(H^{\varphi}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)\right) = H^{\varphi_\alpha}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right),$$

где $\mathbb{S}^{n-1}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$, A^{α} — оператор сферической свертки вида

$$A^{\alpha} f(x) := \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} k(x \cdot \sigma)\, f(\sigma)\, \mathrm{d}\,\sigma, \quad x \in \mathbb{S}^{n-1},$$

спектр которого $\{k_m\}_{m=0}^{\infty}$ в разложении по сферическим гармоникам (мультипликатор Фурье–Лапласа) имеет заданную асимптотику при $m \to \infty$, а $\varphi(h)$ и $\varphi_\alpha(h)$ есть мажоранты модуля непрерывности, характеризующие обобщенную гёльдеровость рассматриваемых функций.

Стоит напомнить, что гладкость как свойство непрерывной дифференцируемости функций может вводиться весьма разнообразными способами. Например, работы [10–12] определяли пространство гладких функций на сфере как частный случай пространств Бесова. В то же время, альтернативная точка зрения предполагала введение гладкости в терминах дифференцируемости по декартовым координатам [13]. Однако работы [14–16] показали возможность эквивалентной нормировки пространств Гёльдера, возникающих в этих двух различных подходах.

Свое развитие тематика обобщенно-гёльдеровских пространств получила в работах [17–19], предлагавших использовать в качестве мажоранты модуля непрерывности произвольный, не обязательно степенной, функциональный параметр. Гармонический анализ в таких пространствах пополнился результатами в области теории потенциала [20–23], в том числе и в последние годы: так, исследования [25–27], развивая результаты работы [9], представили условия ограниченности оператора типа потенциала Рисса со степенно-логарифмическим ядром на сфере, а также связанного с ним стереографической проекцией пространственного потенциала. В частных случаях оператор осуществляет изоморфизм обобщенных пространств Гёльдера, причем обратный оператор выражается композицией с гиперсингулярным интегралом. В работе [28] описаны классы однозначно разрешимых (в пространствах обобщенной гёльдеровости) интегральных уравнений первого рода, ядро оператора в которых имеет слабую особенность.

Интерес к операторам дробного интегродифференцирования переменного порядка [29–33] был естественно сопряжен с рассмотрением функциональных пространств, определяющие параметры которых также имеют функциональную природу. Отметим исследования [34–37], в которых были доказаны, в том числе, теоремы типа Соболева в случае пространств Лебега с переменным показателем; работы [38–44], в которых рассматривались пространства $H^{\lambda(x)}$ переменной гёльдеровости и действие в них сферических, а затем и пространственных потенциалов постоянного и переменного (включая комплексные) порядков, и, наконец, [48, 49], описывающие действие операторов типа потенциала и гиперсингулярных интегралов, определенных на однородных пространствах, в $H^{\lambda(x)}$ в безвесовом и случае специального веса.

Стоит заметить, что ослабление требований к множеству интегрирования за счет введения интегралов на множествах почти однородных квазиметрических пространств [48–50], является существенной проблемой. Отличие подхода, применяемого в этом случае, от известных в классической теории состоит в необходимости локализации аналитических свойств функций на таких пространствах на основании более общих геометрических соображений. Неприменимы более замечательные следствия евклидовой метризации пространства: например, тождество параллелограмма, которое, в случае сферы, приводит исследование в область сферических сверток. Получение оценок типа Зигмунда затруднено отсутствием формулы Каталана, что потребовало создания аналогичного аппарата в работах [48, 49] (здесь он также используется в виде Лемм 2 и 3). Наконец, оценки вблизи особых точек, например «весовой» точки a, требует применения специальных неравенств, выводимых, как правило, непосредственно из неравенства треугольника или, в случае квазиметрических пространств, его обобщения. Немаловажно, что при этом параметризация констант, с которыми ограничены соответствующие интегралы, усложняется и в качественном аспекте: они теперь становятся зависимы от постулируемых характеристик самого множества интегрирования, что, конечно, играет свою роль в приложении полученных результатов для решения уравнений.

В настоящее время наибольший интерес представляют пространства обобщенной переменной гёльдеровости, введенные впервые в работе [45]. Исследования их с точки зрения риссова интегродифференцирования переменного порядка в [46, 47], ставили задачу на гиперсфере и гиперплоскости многомерного евклидова пространства; известны также результаты для этих пространств в нестандартном анализе голоморфных функций [51]. Большую значимость имеют современные исследования классов Никольского–Бесова, осуществляемые с введением нового модуля непрерывности [52, 53].

В завершение обзора следует заметить, что генерализация известных функциональных пространств затрагивает не только отдельные пространства квалифицированной гладкости. Так, большой интерес представляет развитие анализа в пространствах Морри и их обобщениях [54–59], причем спектр подходов к постановке и решению соответствующих задач демонстрирует разнообразие даже в такой небольшой выборке референтных работ. Стоит отметить интенсивное развитие теории гранд-пространств, которая результатами ряда современных исследований [60–69] превращена в самодостаточную область анализа.

Во многом такой широкий спрос на новые результаты в анализе на нестандартных пространствах продиктован приложениями в математической физике и задачах математического моделирования — такими, как обсуждались, например, в [70, 71].

Предварительные сведения

Основные определения. Пусть (X, d, μ) — произвольное метрическое пространство, где $d(x,\sigma)$ означает расстояние, а $\mu(\sigma)$ — меру для всяких $x, \sigma \in X$. Будем предполагать (X, d, μ) таковым, что все его открытые шары

$$B(x,h) := \{\, \sigma \in X : \, d(x,\sigma) < h \,\}$$

измеримы и удовлетворяют следующему условию роста:

$$\text{(B)} \qquad \forall x \in X: \quad \mu\, B(x,h) \le K\, h^{\nu}, \quad \text{когда} \quad h \to 0, \quad K > 0,$$

где показатель $\nu > 0$ полагается действительным в рамках данной статьи. Будем полагать также, что все сферы в X удовлетворяют условию

$$\mu\, S(x,h) = 0, \quad S(x,h) := \{\, \sigma \in X : \, d(x,\sigma) = h \,\}\,.$$

Условимся обозначать замкнутые шары в X символом $B[x,h]$.

Метрику d будем полагать удовлетворяющей классическим прямому,

$$(\Delta_1) \qquad d(x,\sigma) \le d(x,y) + d(y,\sigma),$$

и обратному,

$$(\Delta_2) \qquad |\, d(x,y) - d(y,\sigma)\,| \le d(x,\sigma), \quad x, y, \sigma \in X,$$

неравенствам треугольника. Наконец, будем рассматривать произвольно выбранное множество Ω такое, что

$$(\Omega) \qquad \Omega \subset X, \quad 0 < \operatorname{diam}(\Omega) < \infty, \quad \Omega \text{ — открытое.}$$

Определение 1. *Пусть выбрано число, понимаемое как порядок гиперсингулярного интеграла:*

$$\alpha \in \mathbb{C}: \quad 0 < \operatorname{Re}\alpha < 1.$$

Гиперсингулярный интеграл определим следующим выражением:

$$D^{\alpha} f(x) := \int\limits_{\Omega} \frac{f(\sigma) - f(x)}{d^{\nu+\alpha}(x,\sigma)}\, \mathrm{d}\,\sigma, \quad x \in \Omega.$$

Здесь и далее символ $\mathrm{d}\,\sigma$ *указывает на интегрирование по мере* $\mu(\sigma)$ *в смысле главного значения:*

$$\int\limits_{\Omega} \varphi(x,\sigma)\, \mathrm{d}\,\sigma = \lim_{h \to +0} \int\limits_{\Omega \setminus B[x,h]} \varphi(x,\sigma)\, \mathrm{d}\,\sigma.$$

Отметим, что в дальнейшем будем опускать явное указание меры, пользуясь ее свойствами имплицитно через Леммы 2 и 3, а также Теорему 2.

Напомним, далее, что отображение φ между метрическими пространствами M и N называется субметрией, если для каждой точки $x \in M$ образ всякого замкнутого шара при отображении φ является замкнутым шаром того же радиуса с центром в точке $\varphi(x)$ [72]. Оттолкнувшись от этого понятия, введем следующую характеристику для случая, когда в качестве φ рассматривается функция:

Определение 2. *Будем называть модулем субметрии функции f, определенной на Ω, функцию*

$$\omega_{\Omega}(f,x,h) := \sup_{\sigma\in\Omega\cap B[x,h]} |\, f(x) - f(\sigma)\,|\,, \quad x\in\Omega, \quad h>0.$$

Наряду с Определением 2 рассмотрим, вслед за [18, с. 49], общее определение модуля непрерывности, адаптировав его под текущую постановку задачи:

Определение 3. *Пусть выбрано число $l : 0 < l \le \operatorname{diam}(\Omega)$. Функцию*

$$M(x,h), \quad x\in\Omega, \quad 0<h\le l,$$

будем называть локальным модулем непрерывности, если она удовлетворяет следующим четырем условиям:

(3.1) $\forall x\in\Omega: \quad M(x,0)=0$;

(3.2) $M(x,h)$ *является неубывающей функцией от h равномерно по x;*

(3.3) $M(x,h)$ *полуддитивна по h, т.е.*

$$\forall x\in\Omega: \quad M(x,h_1+h_2)\le M(x,h_1)+M(x,h_2);$$

(3.4) $M(x,h)$ *есть непрерывная по h функция для всякого $x\in\Omega$.*

Модуль субметрии из Определения 2 не обязательно является локальным модулем непрерывности в смысле Определения 3, поскольку свойство (3.3) полуаддитивности по h, вообще говоря, не гарантировано. В то же время, важное следствие свойства (3.3) составляет

Лемма 1. *Пусть $x\in\Omega$, $0<l\le\operatorname{diam}(\Omega)$, $M(x,h)$ — локальный модуль непрерывности в смысле Определения 3. Имеет место оценка:*

$$\text{(M.1)} \qquad \frac{M(x,h_2)}{h_2}\le 2\,\frac{M(x,h_1)}{h_1}, \quad 0<h_1\le h_2\le l.$$

Доказательство. Рассуждения в основе доказательства леммы ничем принципиально не отличаются от классического случая, изложенного в [18, с. 50]. Прежде всего, из свойства (3.3) в Определении 3 следует, что

$$\text{(M.2)} \qquad \forall x\in\Omega: \quad M(x,n\,h)\le n\,M(x,h), \quad n\in\mathbb{N}.$$

Положим:

$$h_2=h_1+h, \quad 0\le (n_0-1)\,h_2\le h\le n_0\,h_1,$$

где n_0 — некоторое натуральное число. Тогда имеем в силу свойства (3.3) и оценки (M.2), зафиксировав некоторую точку $x\in\Omega$:

$$\frac{M(x,h_2)}{h_2}\le\frac{M(x,h_1)}{h_1+h}+\frac{M(x,h)}{h_1+h}\le$$
$$\le\frac{M(x,h_1)}{h_1}+\frac{M(x,n_0\,h_1)}{h_1+(n_0-1)\,h_1}\le 2\,\frac{M(x,h_1)}{h_1}.$$

□

Отметим, что из свойства (M.2), а также (3.3) полуаддитивности и (3.2) неубывания по h следует следующая оценка с произвольным $k>0$:

$$\text{(M.3)} \qquad \begin{aligned} &M(f,x,k\,h)\le[k]\,M(f,x,h)+M(f,x,\lambda\,h)\le\\ &\le(k+1)\,M(f,x,h), \quad k=[k]+\lambda, \quad 0\le\lambda<1,\end{aligned}$$

где (и только в этом контексте) через $[k]$ обозначена целая часть числа k.

Укажем частного представителя класса локальных модулей непрерывности, который представляет интерес в дальнейшем изложении:

$$(M_\Omega) \qquad M_\Omega(f,x,h) := \sup_{\substack{\sigma_1,\sigma_2\in\Omega\cap B[x,l]:\\ d(\sigma_1,\sigma_2)\le h}} |\, f(\sigma_1) - f(\sigma_2)\,|\,, \quad x\in\Omega, \quad 0<h\le l<\infty.$$

Свойства (3.1), (3.2) и (3.4) из Определения 3, очевидно, выполнены для (M_Ω); свойство (3.3) легко проверяется: пусть

$$\sigma_k\in\Omega\cap B[x,l], \quad h_k := d(x,\sigma_k), \quad k=1,2,$$

тогда, согласно (Δ_1), $d(\sigma_1,\sigma_2)\le h_1+h_2$, и справедливо:

$$|\, f(\sigma_1)-f(\sigma_2)\,| \le |\, f(\sigma_1)-f(x)\,| + |\, f(x)-f(\sigma_2)\,| \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{2} \sup_{\substack{\sigma_1',\sigma_2'\in\Omega\cap B[x,l]:\\ d(\sigma_1',\sigma_2')\le h_k}} |\, f(\sigma_1')-f(\sigma_2')\,| = M_\Omega(f,x,h_1)+M_\Omega(f,x,h_2).$$

Вспомогательный аппарат. Раздел введения завершим, напомнив

Определение 4. *Будем говорить, что неотрицательная функция $L(x,t)$, определенная на $\Omega\times[0,l]$, $0<l<\infty$, почти возрастает по t равномерно по x, если найдется константа $c_L\ge 1$ такая, что выполнено неравенство*

$$L(x,t)\le c_L\, L(x,\tau) \quad \textit{для всех} \quad 0<t<\tau\le l.$$

Для оценки возникающих далее интегральных конструкций используются следующие леммы:

Лемма 2. *Пусть $L(x,t)$ – неотрицательная функция на $\Omega\times[0,l]$, $0<l<\infty$, почти возрастающая по t равномерно по x и удовлетворяющая неравенству*

$$L(x,2\,t)\le C\,L(x,t), \quad 0<C<\infty.$$

Для всякого λ, $0\le\lambda<\infty$, имеет место оценка:

$$\int\limits_{B(x,h)} \frac{L\,(x,d(x,\sigma))}{[d(x,\sigma)]^{\,\lambda}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le c_0 \int\limits_0^h \frac{t^{\,\nu-1}L(x,t)}{t^{\,\lambda}}\,\mathrm{d}\,t, \quad 0<c_0<\infty,$$

где $x\in\Omega$, $0<h<l$, постоянные C и c_0 не зависят от x.

Лемма 3. *Пусть выполнены предпосылки Леммы 2. Тогда*

$$\int\limits_{\Omega\setminus B(x,h)} \frac{L\,(x,d(x,\sigma))}{[d(x,\sigma)]^{\,\lambda}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le c_0 \int\limits_h^l \frac{t^{\,\nu-1}L(x,t)}{t^{\,\lambda}}\,\mathrm{d}\,t, \quad 0<c_0<\infty,$$

где $0<h<l\,/\,k$, $k>1$, постоянная c_0 не зависит от $x\in\Omega$.

Леммы 2 и 3 доказаны в работе [49] в более общем случае, когда вместо λ может быть рассмотрена неотрицательная, ограниченная на Ω функция. Их роль для анализа на произвольных метрических, а также квазиметрических пространствах аналогична роли следствий из формул типа Каталана в случае пространств евклидовых. Небезынтересно отметить, что константа c_0 в обеих леммах допускает точную оценку, связанную с постулируемыми свойствами пространства X.

В работах [48, 49] Леммы 2 и 3 (в указанном выше обобщенном виде) были использованы для доказательства оценок типа Зигмунда и теорем об ограниченности гиперсингулярного интеграла переменного порядка $\alpha(\cdot)$ при отображении функций из $H^{\omega(\cdot)}(\Omega)$. Одна из этих теорем используется в завершающем отделе статьи — в релевантной поставленным задачам формулировке.

Оценка типа Зигмунда

Прибавив и вычтя под знаком интеграла в D^{α} произведение $w(\sigma)f(\sigma)$, получаем следующее представление, справедливое для произвольного веса w:

$$w(x)\int_{\Omega}\frac{f(\sigma)-f(x)}{d^{\nu+\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma=\int_{\Omega}\frac{f_w(\sigma)-f_w(x)}{d^{\nu+\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma+ \\ +\int_{\Omega}\frac{w(x)-w(\sigma)}{w(\sigma)}\frac{f_w(\sigma)}{d^{\nu+\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma, \tag{1}$$

где обозначено:

$$f_w(x):=w(x)f(x),\quad x\in\Omega.$$

Введем в рассмотрение интегральный оператор

$$\mathfrak{D}^{\alpha}_{\Omega}f_w(x):=\int_{\Omega}\frac{w(x)-w(\sigma)}{w(\sigma)}\frac{f_w(\sigma)-f_w(a)}{d^{\nu+\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma. \tag{$\mathfrak{D}^{\alpha}_{\Omega}$}$$

Если вес w является степенной функцией вида (w_a), то $f_w(a)=0$, и из общего представления (1) имеем

$$w(x)\,D^{\alpha}f(x)=D^{\alpha}f_w(x)+\mathfrak{D}^{\alpha}_{\Omega}f_w(x),\quad x\in\Omega. \tag{2}$$

Для оператора $\mathfrak{D}^{\alpha}_{\Omega}$ докажем следующий результат:

Теорема 1. *Пусть $0<l<\infty$, а под $M(f,x,h)$ подразумеваются:*

- *модуль субметрии $\omega_{\Omega}(f,x,h)$, если он полуаддитивен по h;*
- *минимальная мажоранта модуля ω_{Ω} из класса локальных модулей непрерывности, если $\omega_{\Omega}(f,x,h)$ не обладает свойством полуаддитивности по h для данной функции f на Ω;*
- *определенный выше локальный модуль непрерывности (M_{Ω}).*

Имеет место оценка типа Зигмунда:

$$|\,\mathfrak{D}^{\alpha}_{\Omega}f_w(x)-\mathfrak{D}^{\alpha}_{\Omega}f_w(y)\,|\le c\left\{\sum_{z\in\{a,x,y\}}\int\limits_0^h\frac{M\,(f_w,z,t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t+\right.$$

$$\left.+\,h^{\,r}\sum_{z\in\{a,x\}}\int\limits_h^l\frac{M(f_w,z,t)}{t^{\,1+r+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t\right\},\quad y\in B[x,h],\quad 0<h<l,\quad 0<c<\infty.$$

Доказательство. Отметим, что в условиях теоремы выполнено:

$$x,y\in\Omega:\quad d(x,y)\le h<k\,h,\quad k>1. \tag{A}$$

Имеет место следующая декомпозиция множества Ω:

$$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup(\Omega_3\cap\Omega_4)\,,$$

где введены подмножества [1]

$$(\Omega_s) \qquad \begin{aligned} \Omega_{1\,|\,2} &:= \{\, \sigma \in \Omega :\ d(x\,|\,a,\sigma) < k\,h \,\}, \\ \Omega_{3\,|\,4} &:= \{\, \sigma \in \Omega :\ d(x\,|\,a,\sigma) \geq k\,h \,\}. \end{aligned}$$

В терминах (Ω_s) имеет место представление

$$\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(x) - \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(y) = \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega_1\cup\Omega_2} f_w(x) - \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega_1\cup\Omega_2} f_w(y) +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_3\cap\Omega_4} \frac{(w(x)-w(y)) + (w(y)-w(\sigma))}{w(\sigma)}\, \frac{f_w(\sigma)-f_w(a)}{d^{\,\nu+\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma -$$

$$- \int\limits_{\Omega_3\cap\Omega_4} \frac{w(y)-w(\sigma)}{w(\sigma)}\, \frac{f_w(\sigma)-f_w(a)}{d^{\,\nu+\alpha}(y,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma,$$

из которого следует оценка

$$(3) \qquad \begin{aligned} |\, \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(x) - \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(y) \,| \leq \left|\, \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega_1\cup\Omega_2} f_w(x) \,\right| + \left|\, \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega_1\cup\Omega_2} f_w(y) \,\right| + \\ + |\, w(x) - w(y) \,| \cdot |\, I \,| + |\, J \,|, \end{aligned}$$

где явно выделены следующие интегралы:

$$I := \int\limits_{\Omega_3\cap\Omega_4} \frac{f_w(\sigma)-f_w(a)}{w(\sigma)\, d^{\,\nu+\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma,$$

$$J := \int\limits_{\Omega_3\cap\Omega_4} \frac{w(y)-w(\sigma)}{w(\sigma)} \left(\frac{1}{d^{\,\nu+\alpha}(x,\sigma)} - \frac{1}{d^{\,\nu+\alpha}(y,\sigma)} \right) f_w(\sigma)\,\mathrm{d}\,\sigma.$$

Будем последовательно оценивать слагаемые из правой части (3), конструируя мажоранты необходимого вида.

Оценка первого слагаемого. Множество $\Omega_1 \cup \Omega_2$ предполагает четыре взаимоисключающих варианта расположения точек x и a:

$$(4) \qquad \begin{aligned} \Lambda_{1\,|\,2} = \Lambda_{1\,|\,2}(x) &:= \{\, \sigma \in \Omega :\ d\,(a\,|\,x,\sigma) \leq d\,(x\,|\,a,\sigma) < k\,h \,\}, \\ \Theta_{1\,|\,2} = \Theta_{1\,|\,2}(x) &:= \{\, \sigma \in \Omega :\ d\,(a\,|\,x,\sigma) < k\,h \leq d\,(x\,|\,a,\sigma) \,\}, \end{aligned}$$

где принципиально важным является соотношение $d(a,\sigma)$ и $d(x,\sigma)$. Исходя из двух вариантов последнего, а именно:

$$\Lambda_1(x) \cup \Theta_1(x) \quad \text{и} \quad \Lambda_2(x) \cup \Theta_2(x),$$

составим мажоранту как сумму соответствующих интегралов.

---

[1]Здесь и далее запись вида «$a\,|\,b$» употребляется для обозначения выбора из двух вариантов, условия которого очевидны или явно представлены.

Оценка интеграла по $\Lambda_1 \cup \Theta_1$. Очевидно неравенство:

$$|\, f_w(\sigma) - f_w(a)\,| \le M\left(f, a, d(a,\sigma)\right), \quad \sigma \in \Lambda_1 \cup \Theta_1.$$

Имея в виду соотношение расстояний вида $d(a,\sigma) \le d(x,\sigma)$, характерное для $\Lambda_1 \cup \Theta_1$, запишем, применив Лемму 2:

$$\begin{aligned}\left|\,\mathfrak{D}^{\alpha}_{\Lambda_1\cup\Theta_1} f_w(x)\,\right| &\le \int\limits_{\Lambda_1\cup\Theta_1} \frac{|\, f_w(\sigma) - f_w(a)\,|}{d^{\,r}(a,\sigma)\,[d(x,\sigma)]^{-r+\nu+\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le \\ &\le \int\limits_{B(a,k\,h)} \frac{M\left(f_w, a, d(a,\sigma)\right)}{[d(a,\sigma)]^{\,\nu+\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le c_0\, c_1 \int\limits_0^h \frac{M\left(f_w, a, \tau\right)}{\tau^{\,1+\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,\tau,\end{aligned} \tag{5}$$

где использована замена $t = k\,\tau$, $\tau \in (0,h)$, вследствие чего константа c_1 выражается исходя из свойства (M.2) как $c_1 = k^{\,1-\mathrm{Re}\,\alpha}$ в случае натурального k и, согласно (M.3), как $c_1 = (k+1)\,k^{\,-\,\mathrm{Re}\,\alpha}$ в общем случае.

Оценка интеграла по $\Lambda_2 \cup \Theta_2$. Для интеграла по $\Lambda_2(x) \cup \Theta_2(x)$ рассуждения во многом аналогичны. Выше модуль субметрии вычислялся в точке a, поскольку $d(a,\sigma)$ полагалось минимальным. Теперь же оценим числитель подынтегрального выражения, ориентируясь на гладкостные свойства функции f_w в окрестности точки x:

$$\begin{aligned}|\, f_w(\sigma) - f_w(a)\,| &\le |\, f_w(\sigma) - f_w(x)\,| + |\, f_w(x) - f_w(a)\,| \le \\ &\le 3\, M\left(f_w, x, d(a,\sigma)\right), \quad d(x,\sigma) \le d(a,\sigma).\end{aligned} \tag{6}$$

Поясним, что для второго слагаемого требуемая оценка следует из неравенства

$$d(x,a) \le d(x,\sigma) + d(a,\sigma) \le 2\, d(a,\sigma),$$

и свойства (M.2):

$$|\, f_w(x) - f_w(a)\,| \le M\left(f_w, x, d(x,a)\right) \le 2\, M\left(f_w, x, d(a,\sigma)\right).$$

Далее, в силу свойства (M.1) модуля непрерывности имеет место:

$$\frac{M\left(f_w, x, d(a,\sigma)\right)}{d(a,\sigma)} \le 2\, \frac{M\left(f_w, x, d(x,\sigma)\right)}{d(x,\sigma)}, \quad d(x,\sigma) \le d(a,\sigma), \tag{7}$$

а значит, вновь применив Лемму 2, имеем:

$$\begin{aligned}\left|\,\mathfrak{D}^{\alpha}_{\Lambda_2\,\cup\,\Theta_2} f_w(x)\,\right| &\le 3 \int\limits_{\Lambda_2\,\cup\,\Theta_2} \frac{M\left(f_w, x, d(a,\sigma)\right)}{d^{\,r}(a,\sigma) d^{\,\nu-r+\mathrm{Re}\,\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma \le \\ &\le 6 \int\limits_{B(x,kh)} \frac{M\left(f_w, x, d(x,\sigma)\right)}{d^{\,\nu+\mathrm{Re}\,\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma \le C_1 \int\limits_0^h \frac{M\left(f_w, a, t\right)}{t^{\,\mathrm{Re}\,\alpha+1}}\,\mathrm{d}\,t, \quad C_1 = 6\, c_0\, c_1.\end{aligned}$$

Таким образом, мажоранта первого слагаемого из генерального представления (3) имеет вид:

$$\left|\,\mathfrak{D}^{\alpha}_{\Omega_1\cup\Omega_2} f_w(x)\,\right| \le C_1 \left\{ \int\limits_0^h \frac{M(f_w, x, t)}{t^{\,\mathrm{Re}\,\alpha+1}}\,\mathrm{d}\,t + \int\limits_0^h \frac{M(f_w, a, t)}{t^{\,\mathrm{Re}\,\alpha+1}}\,\mathrm{d}\,t \right\}. \tag{R_1}$$

Оценка второго слагаемого. В силу (A) и (Δ_1) имеет место:

$$d(y,\sigma) \le d(x,y) + d(x,\sigma) \le (k+1)\,h, \quad \forall \sigma \in \Omega_1,$$

а значит

$$\Omega_1 \subseteq \{\, \sigma \in \Omega : \, d(y,\sigma) \le (k+1)\,h \,\} =: G, \quad G \cup \Omega_2 = \bigcup_{i=1}^{2} \Lambda_i(y) \cup \Theta_i(y),$$

где $\Lambda_i(y)$ и $\Theta_i(y)$ заданы выражением (4). Повторив рассуждения из предыдущего пункта, приходим к искомой оценке вида (R_1):

$$(R_2) \qquad \big|\, \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega_1 \cup \Omega_2} f_w(y) \,\big| \le C_1 \left\{ \int\limits_0^h \frac{M(f_w, y, t)}{t^{\,\mathrm{Re}\,\alpha + 1}}\, \mathrm{d}\, t + \int\limits_0^h \frac{M(f_w, a, t)}{t^{\,\mathrm{Re}\,\alpha + 1}}\, \mathrm{d}\, t \right\}.$$

Оценка третьего слагаемого. Прежде всего отметим неравенство

$$(8) \qquad |\, w(x_1) - w(x_2) \,| = |\, d^{\,r}(x_1, a) - d^{\,r}(x_2, a) \,| \le d^{\,r}(x_1, x_2),$$

следующее из (Δ_2), а также числового результата

$$|\, d_1^r - d_2^r \,| \le |\, d_1 - d_2 \,|^{\,r}, \quad d_1, d_2 \ge 0, \quad 0 < r \le 1,$$

известного, например, из работы [18, с. 27]. Применив (8), имеем:

$$(9) \qquad |\, w(x) - w(y) \,| \cdot |\, I \,| \le k^{\,r}\, h^{\,r} \int\limits_{\Omega_3 \cap \Omega_4} \frac{|\, f_w(\sigma) - f_w(a) \,|}{w(\sigma)\, d^{\,\nu + \alpha}(x, \sigma)}\, \mathrm{d}\, \sigma.$$

Множество $\Omega_3 \cap \Omega_4$ оставляет два равновозможных варианта расположения точек x и a относительно y:

$$(H_s) \qquad \begin{gathered} H_{1\,|\,2} := \{\, \sigma \in \Omega : \, kh \le d(a\,|\,x, \sigma) \le d(x\,|\,a, \sigma) \,\}\,, \\ \Omega_3 \cap \Omega_4 = H_1 \cup H_2. \end{gathered}$$

Представим интеграл в правой части (9) суммой интегралов с тем же подынтегральным выражением, но взятых по H_1 и H_2 соответственно; обозначим последние через I_1 и I_2.

Оценка I_1. Интеграл по I_1 оценивается в тех же соображениях, что и слагаемое $\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Lambda_1 \cup \Theta_1} f_w(x)$, отсылая к (5). Именно, поскольку $d(a, \sigma)$ минимально на H_1, запишем, применив Лемму 3:

$$|\, I_1 \,| \le \int\limits_{\Omega \setminus B(a,\, k\, h)} \frac{M\,(f_w, a, d(a, \sigma))}{[d(a, \sigma)]^{\,r + \nu + \mathrm{Re}\,\alpha}}\, \mathrm{d}\, \sigma \le C \int\limits_h^l \frac{M(f_w, a, t)}{t^{\,r + \mathrm{Re}\,\alpha + 1}}\, \mathrm{d}\, t, \quad C = c_0\, c_1.$$

Оценка I_2. Для оценки интеграла I_2 воспользуемся теми же рассуждениями, что лежали в основе оценки $\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Lambda_2 \cup \Theta_2} f_w(x)$. Обратимся к (6) и затем (7):

$$|\, I_2 \,| \le 3 \int\limits_{H_2} \frac{M\,(f_w, x, d(a, \sigma))}{d^{\,r}(a, \sigma) d^{\,\nu + \mathrm{Re}\,\alpha}(x, \sigma)}\, \mathrm{d}\, \sigma \le 6 \int\limits_{\Omega \setminus B(x, kh)} \frac{M(f_w, x, d(x, \sigma))}{[d(x, \sigma)]^{\,\nu + r + \mathrm{Re}\,\alpha}}\, \mathrm{d}\, \sigma,$$

где осталось лишь применить Лемму 3.

Таким образом, имеем для третьего слагаемого:

$$(R_3) \quad |\, w(x) - w(y) \,| \cdot |\, I \,| \le C_1\, h^{\,r} \left\{ \int\limits_h^l \frac{\omega_\Omega(f_w, x, t)}{t^{\,r + \mathrm{Re}\,\alpha + 1}}\, \mathrm{d}\, t + \int\limits_h^l \frac{\omega_\Omega(f_w, a, t)}{t^{\,r + \mathrm{Re}\,\alpha + 1}}\, \mathrm{d}\, t \right\}.$$

Оценка четвертого слагаемого. Для удобства обозначим $\lambda := \nu + \operatorname{Re}\alpha$. Имеем следующую мажоранту:

$$|\,J\,| \le \int\limits_{\Omega_3\cap\Omega_4} \frac{|\,d^{\,r}(a,y) - d^{\,r}(a,\sigma)\,|}{d^{\,r}(a,\sigma)} \left|d^{\,-\lambda}(x,\sigma) - d^{\,-\lambda}(y,\sigma)\right| \,|\,f_w(\sigma) - f_w(a)\,|\,\mathrm{d}\,\sigma.$$

Для оценки отношения воспользуемся тем, что для всякой пары различных положительных чисел d_1 и d_2 имеет место следующая оценка:

$$|\,d_1^r - d_2^r\,| \le r\,(d_1\,|\,d_2)^{\,r-1}\,|\,d_1 - d_2\,|\,, \quad 0 < r \le 1, \tag{10}$$

которая является следствием классического двойного неравенства

$$r\,t_1^{\,r-1}(t_1 - t_2) < t_1^r - t_2^r < r\,t_2^{\,r-1}(t_1 - t_2), \quad 0 < r < 1, \tag{11}$$

приведенного в [73, с. 39] за ссылкой (2.15.2). Поясним, что под произвольным выбором $d_1\,|d_2$ в правой части (10) подразумевается следующее рассуждение: пусть $d_2 > d_1$, тогда

$$0 < d_2^r - d_1^r = d_2^r\left[1^{\,r} - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{r}\right] \le r\,d_1^r\left(1 - \frac{d_1}{d_2}\right) \le r\,d_2^{\,r-1}(d_2 - d_1),$$

где воспользовались (11) для оценки выражения в квадратных скобках, а затем возрастанием функции $t^{\,r}$, $r > 0$. Заметим, что в [46, 49] аналогичный выражению (11) результат был получен применением к функции $t^{\,r}$ теоремы о среднем в интегральной форме. Таким образом, имеем:

$$\frac{|\,d^{\,r}(a,y) - d^{\,r}(a,\sigma)\,|}{d^{\,r}(a,\sigma)} \le r\,\frac{d(y,\sigma)}{d(a,\sigma)}. \tag{12}$$

Напомним также известное неравенство С. Л. Соболева [74, с. 251]:

$$\left|\frac{1}{d_1^\gamma} - \frac{1}{d_2^\gamma}\right| \le c_\gamma\,\frac{|\,d_1 - d_2\,|\,(d_1 + d_2)^{\,\gamma-1}}{(d_1\,d_2)^{\,\gamma}}, \quad \gamma > 0, \tag{13}$$

где положительная постоянная c_γ зависит только от γ. Применим (13) к оценке второго модуля в правой части мажоранты $|\,J\,|$:

$$\left|\,d^{\,-\lambda}(x,\sigma) - d^{\,-\lambda}(y,\sigma)\,\right| \le \frac{c_\lambda\,k\,h}{d^{\,\lambda}(x,\sigma)\,d(y,\sigma)}\left[1 + \frac{d(x,\sigma)}{d(y,\sigma)}\right]^{\lambda-1}.$$

Ясно, что при $\nu < 1 - \operatorname{Re}\alpha$, то есть $\lambda < 1$, последняя скобка мажорируется единицей. Покажем, что она ограничена и в противоположном случае.

Принимая во внимание конструкцию множества интегрирования (Ω_s), а также изначальное условие (A), констатируем истинность двойного неравенства

$$d(x,y) < k\,h \le d(x,\sigma), \quad \sigma \in \Omega_3 \cap \Omega_4,$$

а значит, и нижней оценки

$$d(y,\sigma) \ge d(x,\sigma) - d(x,y) > (k-1)\,h, \quad \sigma \in \Omega_3 \cap \Omega_4.$$

Как следствие представленных выше соотношений имеем

$$\frac{d(x,\sigma)}{d(y,\sigma)} \le \frac{d(x,y) + d(y,\sigma)}{d(y,\sigma)} < 1 + \frac{k\,h}{d(y,\sigma)} < 1 + \frac{k}{k-1}, \quad k > 1.$$

Таким образом, в случае $\sigma \in \Omega_3 \cap \Omega_4$ справедлива оценка

$$\left|\,d^{\,-\lambda}(x,\sigma) - d^{\,-\lambda}(y,\sigma)\,\right| \le \frac{c_\lambda\,h}{d^{\,\lambda}(x,\sigma)\,d(y,\sigma)}, \tag{14}$$

в которой постоянная c_λ зависит от параметров α, ν, а также значения $k > 1$.

Объединив теперь оценки (12) и (14), имеем:

$$| J | \leq C_2 \, h \sum_{s=1}^{2} \int\limits_{H_s} \frac{| f_w(\sigma) - f_w(a) |}{d(a,\sigma)\, d^{\,\nu+\mathrm{Re}\,\alpha}(x,\sigma)} \, \mathrm{d}\,\sigma = C_2 \, h \, (J_1 + J_2), \quad C_2 = r \, c_0 \, c_\lambda,$$

где интегралы J_1 и J_2 имеют то же подынтегральное выражение, но взяты, соответственно, по множествам H_1 и H_2, определенным выражением (H_s).

Оценка J_1. На H_1 выполняется $d(a,\sigma) \leq d(x,\sigma)$, так что имеем, применив Лемму 3:

$$J_1 \leq \int\limits_{\Omega \setminus B(a,kh)} \frac{M(f_w, a, d(a,\sigma))}{d\,[(a,\sigma)]^{\,\nu+\mathrm{Re}\,\alpha+1}} \, \mathrm{d}\,\sigma \leq c_0 \, c_1 \int\limits_{h}^{l} \frac{M(f_w, a, t)}{t^{\,\mathrm{Re}\,\alpha+2}} \, \mathrm{d}\,t.$$

Оценка J_2. На H_2 воспользуемся (6), (7) и Леммой 3:

$$J_2 \leq 6 \int\limits_{\Omega \setminus B(x,kh)} \frac{M\,(f_w, x, d(x,\sigma))}{d^{\,\nu+\mathrm{Re}\,\alpha+1}(x,\sigma)} \, \mathrm{d}\,\sigma \leq C_1 \int\limits_{h}^{l} \frac{M\,(f_w, x, d(x,\sigma))}{d^{\,\mathrm{Re}\,\alpha+2}(x,\sigma)} \, \mathrm{d}\,\sigma.$$

В заключение отметим, что

$$\frac{h}{t^{\,\mathrm{Re}\,\alpha+2}} \leq \frac{h^{\,r}\, t^{\,1-r}}{t^{\,\mathrm{Re}\,\alpha+2}} = \frac{h^{\,r}}{t^{\,r+\mathrm{Re}\,\alpha+1}}, \quad h \leq t, \quad r \leq 1.$$

Таким образом, имеем для последнего слагаемого из представления (3):

$$(R_4) \qquad | J | \leq C_1 \, C_2 \, h^{\,r} \left\{ \int\limits_{h}^{l} \frac{M(f_w, x, t)}{t^{\,r+\mathrm{Re}\,\alpha+1}} \, \mathrm{d}\,t + \int\limits_{h}^{l} \frac{M(f_w, a, t)}{t^{\,r+\mathrm{Re}\,\alpha+1}} \, \mathrm{d}\,t \right\}.$$

Завершающие выводы. Объединив полученные выше оценки (R_1) – (R_4), получаем утверждение доказываемой теоремы. Интересно отметить, что константа c, с которой оно справедливо, представляет собой произведение C_1 и C_2, значения которых могут быть исследованы в контексте конкретной задачи. $\square$

Теоремы о действии

Доказанные далее теоремы утверждают условия ограниченности интегральных операторов $D^{\,\alpha}$ (из Определения 1) и $(\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega})$, в пространствах обобщенной переменной, а также локальной обобщенной гёльдеровости со степенным весом (w_a). Они существенно опираются на результат, полученный в [48], и сформулированы в контексте применяемых в этой работе понятий: восстановим последний.

Пространства обобщенной переменной гёльдеровости. Пусть Ω удовлетворяет условиям (Ω). Востребовано

Определение 5. *Будем говорить, что*

$$\omega \in W_l(\Omega), \quad \textit{где} \quad \omega : \Omega \times (0, l] \to [0, \infty),$$

если выполнены следующие условия:

(1) $\forall x \in \Omega$: $\omega(x,h)$ *— непрерывная, почти возрастающая по* $h \in (0,l]$, *и*

$$\lim_{h\to+0} \omega(x,h) = 0;$$

(2) $\inf\limits_{x\in\Omega} \omega(x,h) > 0$ *при* $h > 0$.

В дальнейшем будем использовать $\omega(x,h)$ как функциональный параметр, который называют *характеристикой* обобщенного пространства Гёльдера.

Определение 6. *Будем называть пространством* $H^{\,\omega(\cdot)}(\Omega)$ *обобщенной переменной гёльедровости линейное пространство функций, удовлетворяющих неравенству*

$$\forall (x,h) \in \Omega\times(0,l]: \quad M(f,x,h) \le c\,\omega(x,h), \quad \omega\in W_l(\Omega), \quad 0<c<\infty,$$

где M *означает модуль субметрии* ω_Ω, *если, для данных* f *и* Ω, *он полуаддитивен по* $h \in (0,l]$, *или его минимальную мажоранту из класса локальных модулей непрерывности в смысле Определения 3.*

Пространство $H^{\,\omega(\cdot)}(\Omega)$ является банаховым относительно нормы

$$\|f\|_{H^{\,\omega(\cdot)}(\Omega)} = \|f\|_{C(\Omega)} + \sup_{\substack{x\in\Omega,\\ h\in(0,l]}} \frac{M(f,x,h)}{\omega(x,h)},$$

где символом $C(\Omega)$ обозначено пространство равномерно непрерывных на Ω функций, которое можно определить в терминах модуля субметрии:

$$C(\Omega) := \left\{ f: \lim_{h\to+0} \omega_\Omega(f,x,h) = 0, \quad \forall x\in\Omega \right\}.$$

Весовое пространство $C(\Omega, w)$ определим обычным образом, но для работы с весом (w_a) приведем

Определение 7. *Пусть* $\Omega_0 \subset \Omega$. *Функцию* $f \in C(\Omega,w)$ *отнесем к* $H_0^{\omega(\cdot)}(\Omega,w)$, *если*

$$w\,f \in H^{\,\omega(\cdot)}(\Omega) \quad \text{и} \quad \forall x\in\Omega_0: \quad (w\,f)(x) = 0.$$

Докажем ограниченность гиперсингулярного интеграла $D^{\,\alpha}$ при отображении функции из $H_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$, считая $\Omega_0 = \{a\}$.

Основной результат. Спецификацией класса W_l является класс Бари–Стечкина, который имеет следующее определение:

Определение 8. *Функция* $\omega \in W_l(\Omega)$ *принадлежит классу Бари–Стечкина* $\Phi^{\,\delta}_{\beta}$, $0 \le \delta < \beta$, *если одновременно выполнены следующие условия:*

$$\int_0^h \left(\frac{h}{t}\right)^{\delta} \frac{\omega(x,t)}{t}\,\mathrm{d}\,t \le c\,\omega(x,h), \quad \int_h^l \left(\frac{h}{t}\right)^{\beta} \frac{\omega(x,t)}{t}\,\mathrm{d}\,t \le c\,\omega(x,h), \tag{15}$$

где $x\in\Omega$, $0<h\le l$, *постоянная* $c>0$ *не зависит ни от* x, *ни от* h.

Теорема 2. *Пусть гёльдеровская характеристика*

$$\omega \in \Phi^{\,\mathrm{Re}\,\alpha}_{\,1+\mathrm{Re}\,\alpha}, \quad 0 < \mathrm{Re}\,\alpha < 1, \tag{16}$$

а также удовлетворяет условию непрерывности типа Дини:

$$
\begin{gathered}
c_1\,\omega\,(y,d(x,y)) \le \omega\,(x,d(x,y)) \le c_2\,\omega\,(y,d(x,y))\,, \\
x,y\in\Omega,\quad 0<c_1,c_2<\infty.
\end{gathered} \tag{17}
$$

Тогда оператор D^{α} *ограничен из* $H^{\,\omega(\cdot)}(\Omega)$ *в* $H^{\,\omega_{\,-\alpha}(\cdot)}(\Omega)$ *с характеристикой*

$$
\omega_{-\alpha}(x,h) := h^{\,-\operatorname{Re}\alpha}\,\omega(x,h),\quad 0<h\le l<\infty. \tag{ω_α}
$$

Теорема 2 доказывалась в работе [49]. Новый результат представляет

Теорема 3. *Пусть характеристика* $\omega(x,h)$ *удовлетворяет условиям* (16) *и* (17)*, а также, для всякого* $h>0$*, условию*

$$
\sup_{x\in\Omega}\frac{\omega(a,h)}{\omega(x,h)} \le c_\omega,\quad 0<c_\omega<\infty. \tag{18}
$$

Тогда оператор D^{α} *ограничен из* $H^{\,\omega(\cdot)}\,(\Omega,w_a)$ *в* $H^{\,\omega_{\,-\alpha}(\cdot)}\,(\Omega,w_a)$ *с характеристикой* (ω_α) *и степенным весом* (w_a).

Доказательство. По предположению теоремы выполнено:

$$
\forall x\in\Omega:\quad M(w_a\,f,x,h)\le C\,\omega(x,h),\quad h\in(0,l],\quad 0<l\le \operatorname{diam}(\Omega)\,, \tag{19}
$$

где в качестве M выступает ω_Ω или его минимальная мажоранта из класса локальных модулей непрерывности.

Воспользуемся аддитивным представлением (2). Ограниченность первого слагаемого в правой его части утверждается Теоремой 2. Ограниченность же оператора $\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega}$ на функции $H_0^{\omega(\cdot)}(\Omega,w_a)$ следует из оценки типа Зигмунда, указанной в Теореме 1.

Действительно, на основании (19) имеет место неравенство:

$$
\begin{aligned}
\frac{|\,\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega}f_w(x)-\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega}f_w(y)\,|}{h^{\,-\operatorname{Re}\alpha}\,\omega(x,h)} \le \frac{c}{\omega(x,h)}\Bigg\{ &\sum_{z\in\{a,x,y\}}\int_0^h\left(\frac{h}{t}\right)^{\operatorname{Re}\alpha}\frac{\omega(z,t)}{t}\,\mathrm{d}\,t+ \\
&+\sum_{z\in\{a,x\}}\int_h^l\left(\frac{h}{t}\right)^{r+\operatorname{Re}\alpha}\frac{\omega(z,t)}{t}\,\mathrm{d}\,t\Bigg\},\quad 0<c<\infty,
\end{aligned}
$$

Справедливы следующие рассуждения:

- слагаемые с $z=a$ получают мажоранту нужного вида немедленно ввиду условия (18) доказываемой теоремы, которое влечет оценку
$$
\frac{c}{\omega(x,h)} \le \frac{c}{\omega(a,h)}\,\sup_{x\in\Omega}\frac{\omega(a,h)}{\omega(x,h)} \le \frac{c\,c_\omega}{\omega(a,h)},\quad h>0;
$$
- слагаемые, где $z=x$, оцениваются непосредственно исходя из определения класса Бари–Стечкина;
- для оценки слагаемых, у которых $z=y$, учтем требование (17), которое сводит этот случай к предыдущему.

□

Заметим, что, если при всяком $h>0$ функция $\omega(x,h)$ достигает минимума в точке $x=a$, то условие (18) может быть очевидным образом переформулировано с константой $c_\omega=1$.

Локальное обобщенное пространство Гёльдера. Предложим одно обобщение локальной непрерывности по Гёльдеру в терминах введенного выше модуля (M_Ω). Как и ранее, рассматривается метрическое пространство X с мерой, которое удовлетворяет условиям (B), (Δ_1), (Δ_2).

Определение 9. *Пусть выполнены условия* (Ω). *Будем понимать под локальным обобщенным пространством Гёльдера* $\mathcal{H}^{\omega(\cdot)}(\Omega)$ *линейное пространство функций, удовлетворяющих условию*

$$M_\Omega(f,x,h) \le c\,\omega(x,h), \quad x \in \Omega, \quad h \in (0,l], \quad 0 < c < \infty,$$

где предполагается

$$\omega \in W_l(\Omega), \quad 0 < l \le \operatorname{diam}(\Omega)\,.$$

Аналогично Определению 7 составим определение $\mathcal{H}_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w)$. В силу (M.2) выполнено следующее соотношение:

$$\forall x \in \Omega: \quad \omega_\Omega(f,x,h) \le 2\,M_\Omega(f,x,h), \quad h \in (0,l], \quad 0 < l < \infty,$$

что позволяет утверждать о теоретико-множественном включении $\mathcal{H}$-пространств в H-пространства хотя бы в том случае, когда ω_Ω принадлежит классу локальных модулей непрерывности; обратное же не гарантировано.

Из Теоремы 1 непосредственно следует ограниченность оператора $\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega}$ при отображении функции из $\mathcal{H}_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$:

Теорема 4. *Пусть выполнены условия Теоремы 3. Оператор* $\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega}$ *ограничен из* $\mathcal{H}_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$ *в* $\mathcal{H}_0^{\omega_\alpha(\cdot)}(\Omega, w_a)$, *где имеют место определения* (ω_α), (w_a).

Рассуждения в основе доказательства Теоремы 4 повторяют таковые для Теоремы 3, не представляя существенной новизны. Относительно оператора $D^{\,\alpha}$ из Определения 1 сформулируем, имея в виду методику получения оценок типа Зигмунда в безвесовом случае,

Предложение 1. *В предпосылках Теоремы 3 гиперсингулярный интеграл* $D^{\,\alpha}$ *ограничен из* $\mathcal{H}_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$ *в* $\mathcal{H}_0^{\omega_\alpha(\cdot)}(\Omega, w_a)$.

References

[1] S. G. Samko, A. A. Marichev, O. I. Kilbas, *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Philadelphia, PA, 1993.

[2] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, 2001.

[3] Yu. E. Drobotov, B. G. Vakulov, *Hypersingular integrals in power-weighted variable generalized Hölder spaces over metric measure spaces*, J Math Sci (2024)

[4] S. G. Samko, *On spaces of Riesz potentials*, Izv. Math., **10**:5 (1976), 1089–1117.

[5] S. G. Samko, *Generalized Riesz potentials and hypersingular integrals, their symbols and inversion*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **232**:3 (1977), 528–531.

[6] S. G. Samko, *Spherical potentials, spherical Riesz differentiation, and their applications*, Russian Math. (Iz. VUZ), **21**:2 (1977), 106–110.

[7] S. G. Samko, *Generalized Riesz potentials and hypersingular integrals with homogeneous characteristics; their symbols and inversion*, Proc. Steklov Inst. Math., **156** (1980), 173–243.

[8] S. G. Samko, *Singular integrals over a sphere and the construction of the characteristic from the symbol*, Russian Math. (Iz. VUZ), **27**:4 (1983), 35–52.

[9] B. G. Vakulov, *An operator of potential type on a sphere in generalized Hölder classes*, Russian Math. (Iz. VUZ), **30**:11 (1986), 90–94.

[10] A. S. Dzhafarov, *Konstruktivnoe opisanie obobshhennyh klassov Besova na mnogomernoj sfere*, DAN SSSR, **285**: 3 (1985), 542–546.

[11] A. D. Gadzhiev, H. P. Rustamov, *Jekvivalentnaja normirovka v prostranstvah Besova na sfere i svojstva simvola mnogomernogo singuljarnogo integrala*, Izv. vuzov, Matemat., **9** (1984), 69–71.

[12] I. V. Petrova, *Teorema Dzheksona i prostranstva Besova na sfere*, DAN SSSR, Vol. 276, 3 (1984), 544–549.

[13] S. M. Nikolsky, Lizorkin P. I. *Priblizhenie spericheskimi polinomami*, Tr. MIAN SSSR, Moscow, 166, 1984, 186–200.

[14] B. G. Vakulov, S. G. Samko, *Equivalent normings in spaces of functions of fractional smoothness on the sphere, of type* $C^{\lambda}(\mathbb{S}_{n-1})$, $H^{\lambda}(\mathbb{S}_{n-1})$, Russian Math. (Iz. VUZ), **31**: 12 (1987), 90–95.

[15] S. G. Samko, B. G. Vakulov, *On equivalent norms in fractional order function spaces of continuous functions on the unit sphere*, Fract. Calc. Appl. Anal., **3**: 4 (2000), 401–433.

[16] B. G. Vakulov, *Ob ekvivalentnyh normirovkah v prostranstvah funkcij kompleksnoj gladkosti na sfere*, Proceedings of the Institute of Mathematics, **9** (2001), 41–44.

[17] A. S. Dzhafarov, *Nailuchshee priblizhenie konechnymi sfericheskimi summami i nekotorye differencial'nye svojstva garmonicheskih v share funkcij*, Teoremy vlozheniya i ih prilozheniya. Trudy simpoziuma po teoremam vlozheniya. Baku, 1966 god, Nauka, 1970, 75–81.

[18] A. I. Gusejnov, H. Sh. Muhtarov, *Vvedenie v teoriyu nelinejnyh singulyarnyh integral'nyh uravnenij*, Nauka, Moscow, 1980.

[19] H. P. Rustamov, *O tochnosti gladkostnyh svojstv simvola mnogomernogo singuljarnogo operatora s nepreryvnoj harakteristikoj*, Deponirovanie v VINITI, Baku, 1981, №5014-81 DEP.

[20] L. D. Shankishvili *Operatory tipa sfericheskogo potenciala kompleksnogo porjadka v obobshhjonnyh prostranstvah Gjol'dera*, Deponirovanie v VINITI 23.03.98, №860-B98.

[21] B. G. Vakulov, *Sfericheskie operatory tipa potenciala v obobshchennyh prostranstvah Gel'dera s vesom na sfere*, Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Severo-Kavkazskij region. Seriya: estestvennye nauki, **4** (1999), 5–10.

[22] B. G. Vakulov, N. K. Karapetians, L. D. Shankisdvili, *Spherical hypersingular operators of imaginary order and their multipliers*, Fractional Calculus and Applied Analysis, **4** : 1 (2001), 101.

[23] B. G. Vakulov, N. K. Karapetjanc, L. D. Shankishvili, *Spherical convolution operators with a power-logarithmic kernel in generalized Hl̈der spaces*, Russian Math. (Iz. VUZ), **47**:2 (2003), 1–12.

[24] B. G. Vakulov, G. S. Kostetskaya, Yu. E. Drobotov, *Riesz potentials in generalized Hölder spaces*, Fractal Approaches for Modeling Financial Assets and Predicting Crises, IGI Global, 249–273.

[25] B. G. Vakulov, Yu. E. Drobotov, *Riesz potential with logarithmic kernel in generalized Hölder spaces*, Recent Applications of Financial Risk Modelling and

Portfolio Management, IGI Global, 275–296.

[26] B. G. Vakulov, Yu. E. Drobotov, *The Riesz potential type operator with a power-logarithmic kernel in the generalized Hölder spaces on a sphere*, Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications, Springer International Publishing, Cham, 147–159.

[27] Yu. E. Drobotov, B. G. Vakulov, *Smoothness properties of a Riesz potential type operator with logarithmic characteristic* , University News. North-Caucasus Region. Natural Sciences Series, **1** (2022), 4–11.

[28] Yu. E. Drobotov, B. G. Vakulov, *The Riesz potential type operator with a power-logarithmic kernel in the generalized Hölder spaces on a sphere*, Springer Proceedings in Materials, **20** (2023), 120–132.

[29] S. G. Samko, B. Ross, *Integration and differentiation to a variable fractional order*, Integral Transform. Spec. Funct, 1 (1993), 277–300.

[30] S. G. Samko, *Fractional integration and differentiation of variable order*, Anal. Math., **21** (1995), 213–236.

[31] B. G. Vakulov, E. S. Kochurov, *Operatory drobnogo integrirovanija i differencirovanija peremennogo porjadka v prostranstvah Gjol'dera* $H^{\omega(x,t)}$, Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal, **12**: 4 (2010), 3–11.

[32] B. G. Vakulov, E. S. Kochurov, *Ocenki tipa Zigmunda dlja operatorov drobnogo integrirovanija i differencirovanija peremennogo porjadka*, Izv. vuzov. Sev. Kavk. region. Estestv. nauki. Specvypusk (2011), 15–17.

[33] B. G. Vakulov, E. S. Kochurov, N. G. Samko, *Zygmund-type estimates for fractional integration and differentiation operators of variable order*, Russian Mathematics, **55**: 6 (2011), 20–28.

[34] S. G. Samko, *Differentiation and integration of variable order and the spaces* $L^{p(x)}$, Contemporary Mathematics, **212** (1998), 203–219.

[35] B. G. Vakulov, S. G. Samko, *A weighted Sobolev theorem for spatial and spherical potentials in Lebesgue spaces with variable exponents*, Doklady Mathematics, **72** : 1 (2005), 487–490.

[36] S. Samko, E. Shargorodsky, B. Vakulov, *Weighted Sobolev theorem with variable exponent for spatial and spherical potential operators, II*, Journal of Mathematical Analysis and Applicationsthis, **325**: 1 (2007), 745–751.

[37] N. G. Samko, S. G. Samko, B. G. Vakulov, *Weighted Sobolev theorem in Lebesgue spaces with variable exponent*, Journal of Mathematical Analysis and Applicationsthis, **335**: 1 (2007), 560–583.

[38] A. I. Ginsburg, N. K. Karapetyants, *Drobnoe integrodifferencirovanie v gel'derovskih klassah peremennogo porjadka*, Doklady RAN, **339**: 4 (1994), 439–441.

[39] B. Ross, S. G. Samko, *Fractional integration operator of a variable order in the Hölder spaces* $H^{\lambda(x)}$, Internat. J. Math. Math. Sci., **18** (1995), 777–788.

[40] B. G. Vakulov, *Sfericheskie operatory tipa potenciala v vesovyh prostranstvah Gjol'dera peremennogo porjadka*, Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal, **7**: 2 (2005), 26–40.

[41] B. G. Vakulov, *Spherical potentials in weighted Hölder spaces of variable order*, Doklady Mathematics, **71**: 1 (2005), 1–14.

[42] B. G. Vakulov, *Spherical potentials of complex order in the variable order Hölder spaces*, Integral Transforms and Special Functions, **16**: 5-6 (2005), 489–497.

[43] B. G. Vakulov, *Spherical convolution operators in spaces of variable Hölder order*, Mathematical Notes, **80**: 5–6 (2006), 645–657.

[44] B. G. Vakulov, Yu. E. Drobotov, *Riesz potential with integrable density in Hölder-variable spaces*, Mathematical Notes, **108**:5 (2020), 669–678.

[45] B. G. Vakulov, *Spherical potentials of complex order in generalized Hölder spaces of variable order*, Doklady Akademii Nauk, **407**:1 (2006), 12–15.

[46] N. Samko, B. Vakulov, *Spherical fractional and hypersingular integrals of variable order in generalized Hölder spaces with variable characteristic*, Mathematische Nachrichten, **284**: 2–3 (2011), 355–369.

[47] B. G. Vakulov, Yu. E. Drobotov, *Variable order Riesz potential over $\dot{\mathbb{R}}^n$ on weighted generalized variable Hölder spaces*, Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya, **14** (2017), 647–656.

[48] B. G. Vakulov, N. G. Samko, S. G. Samko, *Operatory tipa potenciala i gipersingulyarnye integraly v prostranstvah Gyol'dera peremennogo poryadka na odnorodnyh prostranstvah*, Izv. vuzov. Sev. Kavk. region. Estestv. nauki. Specvypusk, (2009), 40–45.

[49] N. Samko, S. Samko, B. Vakulov, *Fractional integrals and hypersingular integrals in variable order Hölder spaces on homogeneous spaces*, Journal of Function Spaces and Applications, **8**:3 (2010), 215–244.

[50] S. G. Samko, *Potential operators in generalized Hölder spaces on sets in quasi-metric measure spaces without the cancellation property*, Nonlinear Analysis, **78** (2013), 130–140.

[51] A. Karapetyants, S. Samko, *Variable order fractional integrals in variable generalized Hölder spaces of holomorphic functions*, Analysis and Mathematical Physics, **11**:156 (2021).

[52] E. D. Kosov, *A Characterization of Besov Classes in Terms of a New Modulus of Continuity*, Doklady Mathematics, **96**:3 (2017), 587–590.

[53] E. D. Kosov, *Besov classes on finite and infinite dimensional spaces*, Sb. Math., **210**:5 (2019), 663–692.

[54] M. L. Gol'dman, E. G. Bakhtigareeva, *Application of general approach to the theory of Morrey-type spaces*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, **43**:16 (2020), 9435–9447.

[55] S. G. Samko, S. M. Umarkhadzhiev, *Grand Morrey type spaces*, Vladikavkaz Mathematical Journal, **22**:4 (2020), 104–118.

[56] O. G. Avsyankin, *On integral operators with homogeneous kernels in Morrey spaces*, Eurasian Math. J., **12**:1 (2021), 92–96

[57] V. I. Burenkov, M. A. Senouci, *Boundedness of the generalized Riesz potential in local Morrey type spaces*, Eurasian Math. J., **12**:4 (2021), 92–98.

[58] V. I. Burenkov, E. D. Nursultanov, *Interpolation theorems for nonlinear operators in general Morrey-type spaces and their applications*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematicsthis link is disabled, **312**:1 (2021), 124–149.

[59] I. Ekincioglu, S. M. Umarkhadzhiev, *Oscillatory integrals with variable Calderon-Zygmund kernel on generalized weighted Morrey spaces*, Transactions Issue Mathematics, Azerbaijan National Academy of Sciences, **42**:1 (2022), 99–110.

[60] S. M. Umarkhadzhiev, *Generalization of a notion of grand Lebesgue space*, Russian Math. (Iz. VUZ), **58**:4 (2014), 35–43.

[61] S. M. Umarkhadzhiev, Yu. E. Drobotov, *Riesz potential in generalized grand Lebesgue space*, Bulletin of the Academy of Sciences of the Chechen Republic, **4**(29) (2015), 26–29.

[62] Yu. E. Drobotov, S. M. Umarkhadzhiev, *Riesz potential with homogeneous kernel in grand Lebesgue spaces on semi-axis*, Bulletin of the Academy of Sciences of the Chechen Republic, **1**(38) (2018), 18–25.

[63] S. M. Umarkhadzhiev, *On elliptic homogeneous differential operators in grand spaces*, Russian Mathematics, **64**:3 (2020), 57–65.

[64] S. M. Umarkhadzhiev, *Unilateral ball potentials in grand Lebesgue spaces*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, **357** (2021), 569–576.

[65] S. G. Samko, S. M. Umarkhadzhiev, *Local grand Lebesgue spaces*, Vladikavkaz Mathematical Journal, **23**:4 (2021), 96–108.

[66] S. G. Samko, S. M. Umarkhadzhiev, *Weighted Hardy operators in grand Lebesgue spaces on* $\mathbb{R}^n$, J Math Sci (2022)

[67] H. Rafeiro, S. Samko, S. Umarkhadzhiev, *Grand Lebesgue space for* $p = \infty$ *and its application to Sobolev–Adams embedding theorems in borderline cases*, Mathematische Nachrichten, **295**: 5 (2022), 991–1007.

[68] H. Rafeiro, S. Samko, S. Umarkhadzhiev, *Local grand Lebesgue spaces on quasi-metric measure spaces and some applications*, Positivity, **26**: 3 (2022), 53.

[69] S. M. Umarkhadzhiev, *Embedding of grand central Morrey-type spaces into local grand weighted Lebesgue spaces*, J Math Sci (2022)

[70] V. E. Tarasov *Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*, Springer Berlin, Heidelberg, 2010.

[71] I. A. Parinov, S. V. Zubkov, A. S. Skaliukh, V. A. Chebanenko, A. V. Cherpakov , Yu. E. Drobotov, *Advanced Ferroelectric and Piezoelectric Materials: With Improved Properties and their Applications*, World Scientific, 2024.

[72] V. N. Berestovskii, *Submetries of space-forms of negative curvature*, Siberian Mathematical Journal, **28** (1987), 552–562.

[73] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1934.

[74] S. L. Sobolev, *Vvedenie v teoriyu kubaturnyh formul*, Nauka, Moscow, 1974.

Yuri Evgenievich Drobotov
Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich,
ul. Milchakova, 8a,
344090, Rostov-on-Don, Russia
North-Caucasus Center for Mathematical Research of the Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences,
ul. Vil'yamsa, 1,
363110, RSO-Alaniya, Prigorodnyj rajon, s.Mihajlovskoe, Russia
Don State Technical University,
Gagarina squ., 1,
344000, Rostov-on-Don, Russia
Email address: yu.e.drobotov@yandex.ru

Boris Grigorievich Vakulov
Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich,
Milchakova str., 8a,
344090, Rostov-on-Don, Russia
Email address: bvak1961@bk.ru