S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 517.5
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 31B10

К ИССЛЕДОВАНИЮ ВЕСОВОЙ ОБОБЩЕННОЙ ГЕЛЬДЕРОВОСТИ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА НА МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ю.Е. ДРОБОТОВ, Б.Г. ВАКУЛОВ

Abstract. Получены весовые оценки типа Зигмунда для гиперсингулярного интеграла на почти однородном метрическом пространстве и, на их основе, теоремы о действии данного оператора в весовом пространстве обобщенной переменной гёльдеровости. В качестве веса рассматривается представитель класса степенных функций. Показано, что гиперсингулярный интеграл «ухудшает» характеристику обобщенного пространства Гёльдера на порядок гиперсингулярного интеграла. Условия представленных теорем сформулированы в терминах класса Зигмунда–Бари–Стечкина, а также специального аналога условия Дини.

Keywords: bounded operator, generalized Hölder spaces, hypersingular integral, integral equations, local modulus of continuity, modulus of submetry, stability, Zygmund-type estimates

Введение

Как известно, риссово дробное интегродифференцирование функций многих вещественных переменных определяет производную через гиперсингулярный

Drobotov Yu. E., Vakulov B. G., On the weighted generalized Hölder property of a hypersingular integral on a metric space.

Работа поддержана РФФИ (грант 20-51-46003).

Работа выполнена в Северо-Кавказском центре математических исследований ВНЦ РАН при поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2022-896.

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

интеграл [1, с. 483] (см. также [2, 3]), в том числе и на однородных пространствах, например – сфере [4]. Кроме того, всякий однородный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами может быть выражен гиперсингулярным интегралом с характеристикой специального вида [1, с. 530], что вызывает особый интерес к исследованию таких операторов в контексте задач математической физики.

Один из основных вопросов качественной теории интегральных операторов состоит в отыскании способа формализации их гладкости, содержательно характеризующего устойчивость соответствующих уравнений. На этом пути неизбежны обобщения классических функциональных пространств, и конечно пространств гёльдеровского типа, введение которых еще в теории эллиптических уравнений в частных производных мотивировано тем же вопросом. В качестве простой аналогии можно отметить, что потребность в описании континуальных свойств функций с помощью условия Гёльдера возникает еще при исследовании классического уравнения Пуассона [6, с. 51], в то время как гиперсингулярный интеграл на n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ реализует дробные степени оператора Лапласа.

В настоящей работе рассмотрены операторы гиперсингулярного интегрирования по множеству почти однородного метрического пространства. Исследуется отображение такими операторами функций, удовлетворяющих условию типа Гёльдера с так называемым модулем субметрии – эквивалентом локального модуля непрерывности, отвечающим задаче исследования устойчивости интегральных уравнений первого рода.

Обзор предыдущих исследований. Раздел риссовых интегралов и производных дробного порядка получил развитие методами спектральной теории в таких известных работах С. Г. Самко, как [2–4]. Основным их результатом явилось описание пространства риссовых потенциалов на $\mathbb{R}^n$ в терминах разностных сингулярных интегралов, особенность которых доминирует над размерностью пространства [5]. Результаты об обращении потенциалов Рисса такими, гиперсингулярными, интегралами доказывались на функциях из L^p–пространства, в том числе – в весовых терминах.

Подходы, основанные на исследовании символов интегральных операторов на сфере, позволили качественно обобщить теоретические результаты относительно операторов типа потенциала, в сущности породив самостоятельное направление анализа сферических сверток. В этом отношении стоит отметить работу [7], где рассматривались спектры некоторых наиболее часто встречающихся операторов сферической свертки, а также [8], пионерскую с точки зрения классификации таких операторов на основании асимптотического поведения на бесконечности их мультипликаторов Фурье–Лапласа. В ней же был поставлен вопрос о гладкости сферических сверток в терминах обобщенных пространств Гёльдера, предпосылки к чему имеют довольно богатую историю; значимым же результатом в этом отношении является теорема об изоморфизме вида

$$A^{\alpha}\left(H^{\varphi}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)\right)=H^{\varphi_{\alpha}}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right),$$

где $\mathbb{S}^{n-1}$ – единичная сфера в $\mathbb{R}^n$, A^{α} – оператор сферической свертки вида

$$A^{\alpha}f(x):=\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} k(x\cdot\sigma)\,f(\sigma)\,\mathrm{d}\,\sigma,\quad x\in\mathbb{S}^{n-1},$$

спектр которого $\{k_m\}_{m=0}^{\infty}$ в разложении по сферическим гармоникам (мультипликатор Фурье–Лапласа) имеет заданную асимптотику при $m \to \infty$, а $\varphi(h)$ и $\varphi_\alpha(h)$ есть мажоранты модуля непрерывности, характеризующие обобщенную гёльдеровость рассматриваемых функций.

Стоит напомнить, что гладкость как свойство непрерывной дифференцируемости функций может вводиться весьма разнообразными способами. Например, работы [9–11] определяли пространство гладких функций на сфере как частный случай пространств Бесова. В то же время, альтернативная точка зрения предполагала введение гладкости в терминах дифференцируемости по декартовым координатам [12]. Однако работы [13–15] показали возможность эквивалентной нормировки пространств Гёльдера, возникающих в этих двух различных подходах.

Свое развитие тематика обобщенно-гёльдеровских пространств получила в работах [16–18], предлагавших использовать в качестве мажоранты модуля непрерывности произвольный, не обязательно степенной, функциональный параметр. Гармонический анализ в таких пространствах пополнился результатами в области теории потенциала [19–22], в том числе и в последние годы: так, исследования [24–26], развивая результаты работы [8], представили условия ограниченности оператора типа потенциала Рисса со степенно-логарифмическим ядром на сфере, а также связанного с ним стереографической проекцией пространственного потенциала. В частных случаях оператор осуществляет изоморфизм обобщённых пространств Гёльдера, причем обратный оператор выражается композицией с гиперсингулярным интегралом.

Интерес к операторам дробного интегродифференцирования переменного порядка [27–31] был естественно сопряжен с рассмотрением функциональных пространств, определяющие параметры которых также имеют функциональную природу. Отметим исследования [32–35], в которых были доказаны, в том числе, теоремы типа Соболева в случае пространств Лебега с переменным показателем; работы [36–42], в которых рассматривались пространства $H^{\lambda(x)}$ переменной гёльдеровости и действие в них сферических, а затем и пространственных потенциалов постоянного и переменного (включая комплексные) порядков, и, наконец, [46, 47], описывающие действие операторов типа потенциала и гиперсингулярных интегралов, определенных на однородных пространствах, в $H^{\lambda(x)}$ в безвесовом и случае специального веса.

В настоящее время наибольший интерес представляют пространства обобщенной переменной гёльдеровости, введенные впервые в работе [43] и исследовавшиеся с точки зрения риссова интегродифференцирования переменного порядка в [44, 45], ставивших задачу на гиперсфере и гиперплоскости многомерного евклидова пространства. Существенной проблемой является ослабление требований к множеству интегрирования, например за счет введения интегралов на множествах почти однородных квазиметрических пространств, как в работах [46–48].

В завершение следует заметить, что генерализация известных функциональных пространств затрагивает отнюдь не только пространства гёльдеровского типа. Так, большой интерес представляет развитие анализа в пространствах

Мори и их обобщениях [49–53], причем спектр подходов к постановке и решению соответствующих задач демонстрирует разнообразие даже в такой небольшой выборке референтных работ. Стоит отметить интенсивное развитие теории гранд-пространств, которая результатами ряда современных исследований [54–63] превращена в самодостаточную область анализа.

Предварительные сведения

Основные определения. Пусть (X, d, μ) – произвольное метрическое пространство, где $d(x, \sigma)$ означает расстояние, а $\mu(\sigma)$ – меру для всяких $x, \sigma \in X$. Будем предполагать (X, d, μ) таковым, что все его шары

$$B(x,h) := \{\, \sigma \in X : \, d(x,\sigma) \le h \,\}$$

удовлетворяют условию роста

$$\forall x \in X \quad \mu\, B(x,h) = O\left(h^{\nu}\right), \quad h \to 0, \tag{1}$$

где показатель ν полагается действительным в рамках данной статьи.

Определение 1. *Пусть Ω – открытое ограниченное подмножество X,*

$$\alpha \in \mathbb{C} : \quad 0 < \operatorname{Re} \alpha < 1.$$

Гиперсингулярный интеграл определим следующим выражением:

$$D^{\alpha} f(x) := \int\limits_{\Omega} \frac{f(\sigma) - f(x)}{d^{\nu+\alpha}(x,\sigma)} \, \mathrm{d}\, \sigma, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

осуществляя интегрирование в смысле, аналогичном главному значению по Адамару:

$$\int\limits_{\Omega} \varphi(x,\sigma)\, \mathrm{d}\, \sigma = \lim_{h \to +0} \int\limits_{\Omega \setminus B(x,h)} \varphi(x,\sigma)\, \mathrm{d}\, \mu(\sigma).$$

Напомним, что отображение φ между метрическими пространствами M и N называется субметрией, если для каждой точки $x \in (M, d)$ образ всякого замкнутого шара при отображении φ является замкнутым шаром того же радиуса с центром в точке $\varphi(x)$ [64]. Оттолкнувшись от этого понятия, введем следующую характеристику для случая, когда в качестве φ рассматривается числовая функция:

Определение 2. *Пусть Ω – произвольное ограниченное подмножество X. Будем называть модулем субметрии функции $f : \Omega \to \mathbb{R}$ функцию*

$$\omega_{\Omega}(f,x,h) := \sup_{\sigma \in B(x,h)} |\, f(x) - f(\sigma)\,|, \quad x \in \Omega, \quad h > 0. \tag{3}$$

Таким образом, условие $\omega_{\Omega}(f,x,h) = h$ гарантирует f как субметрию метрических пространств. Интерес, однако, представляют условия типа Гёльдера, более широкие и содержательные для приложения в качественной теории интегральных уравнений.

Определение 3. *Будем называть пространством $H^{\,\omega(\cdot)}(\Omega)$ обобщённой переменной гёльедровости линейное пространство функций, удовлетворяющих неравенству*

$$\omega_{\Omega}(f,x,h) \le c\, \omega(x,h), \quad c > 0, \tag{4}$$

где функциональный параметр $\omega(\cdot)$ называется характеристикой пространства $H^{\,\omega(\cdot)}\,(\Omega)$. Весовое $H^{\,\omega(\cdot)}$-пространство зададим выражением

$$H^{\,\omega(\cdot)}\,(\Omega, w) := \Big\{\, f:\; w\,f \in H^{\,\omega(\cdot)}\,(\Omega) \,\Big\}. \tag{5}$$

При этом $\omega_\Omega(\cdot, h)$, как функция вещественного аргумента, эквивалентна колебанию $\tilde{\omega}$ функции f в шаре $B(x,h)$. Действительно,

$$\omega_\Omega(f,x,h) \le \sup_{\sigma_1,\sigma_2\in B(x,h)} |\, f(\sigma_1) - f(\sigma_2)\,| =: \tilde{\omega}(f, B(x,h)),$$

и в то же время

$$\tilde{\omega}(f, B(x,h)) = \sup_{\sigma_1,\sigma_2\in B(x,h)} |\, f(\sigma_1) \mp f(x) - f(\sigma_2)\,| \le$$

$$\le 2 \max_{\sigma\in\{\sigma_1,\sigma_2\}} \sup |\, f(x) - f(\sigma)\,|\,, \quad \forall \sigma_1, \sigma_2 \in B(x,h),$$

так что

$$1 \le \frac{\omega(f, B(x,h))}{\omega_\Omega(f,x,h)} \le 2. \tag{6}$$

В свою очередь, колебание функции в шаре выражает значение модуля непрерывности как функции удвоенного радиуса, то есть

$$\tilde{\omega}\,(f, \Omega\cap B(x,h)) = \sup_{\substack{\sigma_1,\sigma_2\in\Omega:\\ d(\sigma_1,\sigma_2)\le 2\,h}} |\, f(\sigma_1) - f(\sigma_2)\,| =: \omega_f(2\,h), \tag{7}$$

что очевидно в силу неравенства треугольника. Учитывая это, предложим

Определение 4. *Определим локальный модуль непрерывности функции f как следующую функцию на $\Omega\times[0,l]$:*

$$M(f,x,h) := \tilde{\omega}\left(f,\, \Omega\cap B\left(x, \frac{h}{2}\right)\right), \quad 0 < l < \infty.$$

Модуль субметрии «несколько хуже» модуля непрерывности, ведь он, очевидно, не обязательно обладает свойством полуаддитивности. Однако функции $M(\,\cdot,\,h)$ оно присуще как, фактически, сужению модуля непрерывности на замкнутый шар согласно выражению (7). Мотивированные этим наблюдением, выделим класс функций, аналитически близких к модулю непрерывности, привлекая

Определение 5. *Будем называть $\varphi(h)$, $h \ge 0$, функцией типа модуля непрерывности, если она эквивалентна обладающей следующими свойствами:*

- *$\varphi(h)$ непрерывна и $\varphi(0) = 0$;*
- *$\varphi(h)$ является неубывающей полуаддитивной функцией, то есть*

$$\varphi(h_1 + h_2) \le \varphi(h_1) + \varphi(h_2).$$

В силу эквивалентности (6), определенный выражением (3) модуль субметрии $\omega_\Omega(\,\cdot\,, h)$ доставляет пример функции типа модуля непрерывности:

$$\omega_\Omega(f,x,h) \sim M(f,x,h), \quad x\in\Omega. \tag{8}$$

В дальнейшем будем иногда применять термин *модули гладкости* как зонтичный для введенных выше конструкций.

Постановка задачи. Итак, условие (4) не только гарантирует непрерывность функции f в точке $x \in \Omega$ в случае достаточно «хорошей» характеристики $\omega(\cdot)$, но и явно выражает взаимосвязь между h-окрестностью прообраза $x \in \Omega$ и $\omega(x,h)$-окрестностью образа $f(x) \in \mathbb{R}$, допуская субметрию f как некоторый частный случай. Поставленная задача состоит в отыскании условий ограниченности гиперсингулярного интеграла (2) при отображении функций из $H^{\omega(\cdot)}(\Omega, w)$ в случае, когда вес является степенной функцией вида

$$w(x) = d^{\,r}(x,a), \quad a, x \in \Omega, \quad 0 < r \le 1. \tag{9}$$

Если D^{α} выражает дифференциальный оператор (как в случае $X = \mathbb{R}^n$), полученные далее теоремы о действии могут рассматриваться как достаточные условия весовой гладкости функции f.

Столь большое внимание свойству полуаддитивности обусловлено следующими свойствами локального модуля непрерывности, следующего из него напрямую:

Лемма 1. *Пусть $x \in \Omega$ – произвольно. При любом $k > 0$ имеет место следующая оценка:*

$$M(f,x,k\,h) \le (k+1)\,M(f,x,h), \quad h > 0. \tag{10}$$

Также справедлива оценка

$$\frac{M(f,x,h_1)}{h_1} \ge \frac{1}{2}\,\frac{M(f,x,h_2)}{h_2}, \quad 0 < h_1 \le h_2. \tag{11}$$

Доказательство. Доказательство леммы основано на определении локального модуля непрерывности как сужения на локально центрированный шар модуля непрерывности и свойстве полуаддитивности последнего. □

К числу результатов, используемых для оценки интегральных конструкций, принадлежат следующие леммы:

Лемма 2. *Пусть $L(x,t)$ – неотрицательная функция на $\Omega \times [0,l]$, $0 < l < \infty$, почти возрастающая по t равномерно по x и удовлетворяющая неравенству*

$$L(x,2\,t) \le c_0\,L(x,t), \quad c_0 > 0.$$

Для всякой неотрицательной ограниченной функции $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, справедлива оценка

$$\int\limits_{B(x,h)} \frac{L\,(x,d(x,\sigma))}{[d(x,\sigma)]^{\,\varphi(x)}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le \int\limits_0^h \frac{t^{\,\nu-1}L(x,t)}{t^{\,\varphi(x)}}\,\mathrm{d}\,t, \quad 0 < \; < \infty,$$

где $x \in \Omega$, $0 < h < l$, а произвольные постоянные c_0 и не зависят от x.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия Леммы 2. Тогда*

$$\int\limits_{\Omega \setminus B(x,h)} \frac{L\,(x,d(x,\sigma))}{[d(x,\sigma)]^{\,\varphi(x)}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le C \int\limits_h^l \frac{t^{\,\nu-1}L(x,t)}{t^{\,\varphi(x)}}\,\mathrm{d}\,t, \quad 0 < C < \infty,$$

где $0 < h < l\,/\,k$, $k > 1$, постоянная C не зависит от $x \in \Omega$.

Доказательство лемм содержится в работе [47]. Их роль для анализа на произвольных метрических, а также квазиметрических пространствах аналогична роли формулы Каталана для сферических интегралов, позволяющей проводить оценку многомерных интегралов одномерными. В работах [46, 47] Леммы 2 и 3 были использованы для доказательства ограниченности гиперсингулярного интеграла (2) переменного порядка $\alpha(\cdot)$ при отображении функций из $H^{\omega(\cdot)}(\Omega)$. Одна из этих теорем приведена далее с уточненной формулировкой, включающей условие Дини на характеристику пространства Гёльдера.

Оценка типа Зигмунда

Прибавив и вычтя под знаком интеграла в (2) произведение $w(\sigma)f(\sigma)$, получаем следующее представление, справедливое для произвольного веса w:

$$
\begin{aligned}
w(x)\int_\Omega \frac{f(\sigma)-f(x)}{d^{\,\nu+\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma = \int_\Omega \frac{f_w(\sigma)-f_w(x)}{d^{\,\nu+\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma + \\
+\int_\Omega \frac{w(x)-w(\sigma)}{w(\sigma)}\frac{f_w(\sigma)}{d^{\,\nu+\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где обозначено:

$$f_w(x) := w(x)f(x), \quad x\in\Omega.$$

Введем в рассмотрение интегральный оператор

$$\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(x) := \int_\Omega \frac{w(x)-w(\sigma)}{w(\sigma)}\frac{f_w(\sigma)-f_w(a)}{d^{\,\nu+\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma. \tag{13}$$

Если вес w является степенной функцией вида (9), то $f_w(a)=0$, и из общего представления (12) имеем

$$w(x)\,D^{\,\alpha} f(x) = D^{\,\alpha} f_w(x) + \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(x), \quad x\in\Omega. \tag{14}$$

Объектом интереса настоящего исследования является второе слагаемое в правой части приведенного равенства, относительно которого справедлив следующий результат:

Теорема 1. *Имеет место следующая оценка типа Зигмунда:*

$$
\begin{aligned}
|\,\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(x) - \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(y)\,| \le c \sum_{z\in\{a,x\}} \Bigg\{ \int\limits_0^h \frac{\omega_\Omega\,(f_w,z,t)}{t^{\,\mathrm{Re}\,\alpha+1}}\,\mathrm{d}\,t \,+ \\
+\, h^{\,r} \int\limits_h^l \frac{\omega_\Omega(f_w,z,t)}{t^{\,\mathrm{Re}\,\alpha+r+1}}\,\mathrm{d}\,t \Bigg\}, \quad y\in B(x,h), \quad 0<h<l, \quad 0<c<\infty.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Доказательство. Заметим, что в условии теоремы выполнено:

$$x,y\in\Omega: \quad d(x,y)\le k\,h, \quad k>1.$$

Имеет место следующая декомпозиция множества Ω:

$$\Omega = \Omega_1\cup\Omega_2\cup\left(\Omega_3\cap\Omega_4\right),$$

где введены подмножества [1]

$$
\begin{aligned}
&\Omega_{1\,|\,2} := \{\, \sigma \in \Omega :\ d(x\,|\,a,\sigma) \le k\,h \,\}\,, \\
&\Omega_{3\,|\,4} := \{\, \sigma \in \Omega :\ d(x\,|\,a,\sigma) \ge k\,h \,\}\,.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Тогда, в рамках (16) имеет место представление

$$
\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(x) - \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(y) = \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega_1\cup\Omega_2} f_w(x) - \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega_1\cup\Omega_2} f_w(y) +
$$

$$
+ \int\limits_{\Omega_3\cap\Omega_4} \frac{w(x) \pm w(y) - w(\sigma)}{w(\sigma)}\, \frac{f_w(\sigma) - f_w(a)}{d^{\,\nu+\alpha}(x,\sigma)}\, \mathrm{d}\,\sigma -
$$

$$
- \int\limits_{\Omega_3\cap\Omega_4} \frac{w(y) - w(\sigma)}{w(\sigma)}\, \frac{f_w(\sigma) - f_w(a)}{d^{\,\nu+\alpha}(y,\sigma)}\, \mathrm{d}\,\sigma,
$$

из которого следует оценка

$$
\begin{aligned}
&|\, \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(x) - \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(y) \,| \le \left|\, \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega_1\cup\Omega_2} f_w(x) \,\right| + \left|\, \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega_1\cup\Omega_2} f_w(y) \,\right| + \\
&\qquad\qquad + |\, w(x) - w(y) \,| \cdot |\, I \,| + |\, J \,|\,,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

где явно выделены следующие интегралы:

$$
I := \int\limits_{\Omega_3\cap\Omega_4} \frac{f_w(\sigma) - f_w(a)}{w(\sigma)\, d^{\,\nu+\alpha}(x,\sigma)}\, \mathrm{d}\,\sigma,
$$

$$
J := \int\limits_{\Omega_3\cap\Omega_4} \frac{w(y) - w(\sigma)}{w(\sigma)} \left(\frac{1}{d^{\,\nu+\alpha}(x,\sigma)} - \frac{1}{d^{\,\nu+\alpha}(y,\sigma)} \right) f_w(\sigma)\, \mathrm{d}\,\sigma.
$$

Будем последовательно оценивать слагаемые из правой части (17), конструируя мажоранты необходимого вида.

Оценка первого слагаемого. Прежде всего отметим неравенство

$$
|\, w(x) - w(\sigma) \,| = |\, d^{\,r}(x,a) - d^{\,r}(a,\sigma) \,| \le d^{\,r}(x,\sigma),
\tag{18}
$$

следующее из обратного неравенства треугольника, а также числового результата

$$
|\, r_1^{\gamma} - r_2^{\gamma} \,| \le |\, r_1 - r_2 \,|^{\,\gamma}\,, \quad r_1, r_2 \ge 0, \quad 0 < \gamma \le 1,
$$

известного, например, из работы [17, с. 27].

Множество $\Omega_1 \cup \Omega_2$ предполагает четыре взаимоисключающих варианта расположения точек x и a:

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_{1\,|\,2} = \Lambda_{1\,|\,2}(x) := \{\, \sigma \in \Omega :\ d\,(a\,|\,x,\sigma) \le d\,(x\,|\,a,\sigma) \le k\,h \,\}\,, \\
&\Theta_{1\,|\,2} = \Theta_{1\,|\,2}(x) := \{\, \sigma \in \Omega :\ d\,(a\,|\,x,\sigma) \le k\,h \le d\,(x\,|\,a,\sigma) \,\}\,,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

где принципиально важным является соотношение $d(a,\sigma)$ и $d(x,\sigma)$. Исходя из двух вариантов последнего, а именно:

$$
\Lambda_1(x) \cup \Theta_1(x) \quad \text{и} \quad \Lambda_2(x) \cup \Theta_2(x),
$$

составим мажоранту как сумму соответствующих интегралов.

[1] Здесь и далее запись вида «$a\,|\,b$» употребляется для обозначения выбора из двух вариантов.

Важную роль играет оценка, очевидно следующая из эквивалентности (8):

$$
\begin{aligned}
&|\, f_w(\sigma) - f_w(a)\,| \le \sup_{\sigma_1,\sigma_2\in B(a,d(a,\sigma))} |\, f_w(\sigma_1) - f_w(\sigma_2)\,| = \\
&\qquad = M\left(f_w, a, d(a,\sigma)\right) \le 2\,\omega_\Omega\left(f, a, d(a,\sigma)\right),
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Имея в виду оценку (20), применим Лемму 2 к первому интегральному слагаемому мажоранты:

$$
\begin{aligned}
&\left|\,\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\Lambda_1\cup\Theta_1} f_w(x)\,\right| \le \int\limits_{\Lambda_1\cup\Theta_1} \frac{|\, f_w(\sigma) - f_w(a)\,|}{d^{\,r}(a,\sigma) d^{\,\nu - r + \operatorname{Re}\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma \le \\
&\qquad \le c_1 \int\limits_{B(a,k\,h)} \frac{M\left(f_w, a, d(a,\sigma)\right)}{d^{\,\nu+\operatorname{Re}\alpha}(a,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma \le c_2 \int\limits_0^h \frac{\omega_\Omega\left(f_w, a, t\right)}{t^{\,\operatorname{Re}\alpha+1}}\,\mathrm{d}\,t,
\end{aligned}
\tag{21}
$$

где $0 < c_1, c_2 < \infty$ – некоторые постоянные, причем $c_2 = 2\,c_1\,(k+1)\,k^{-\operatorname{Re}\alpha}$, что очевидно в результате замены переменной вида $t \to k\,t$ и применения свойства (10) локального модуля непрерывности.

Для интеграла по $\Lambda_2(x) \cup \Theta_2(x)$ рассуждения во многом аналогичны. Выше модуль субметрии вычислялся в точке a, поскольку $d(a,\sigma)$ полагалось минимальным. Теперь же оценим числитель подынтегрального выражения, ориентируясь на гладкостные свойства функции f_w в окрестности точки x:

$$
\begin{aligned}
&|\, f_w(\sigma) - f_w(a)\,| \le |\, f_w(\sigma) - f_w(x)\,| + |\, f_w(x) - f_w(a)\,| \le \\
&\qquad \le 4\,M\left(f_w, x, d(a,\sigma)\right), \quad d(x,\sigma) \le d(a,\sigma),
\end{aligned}
\tag{22}
$$

что можно показать, использовав для оценки первого слагаемого модуля факт вида (20) и неубывание локального модуля непрерывности:

$$
|\, f_w(\sigma) - f_w(x)\,| \le M\left(f_w, x, d(x,\sigma)\right) \le M\left(f_w, x, d(a,\sigma)\right), \quad d(x,\sigma) \le d(a,\sigma),
$$

а для оценки второго – заметив, что из неравенства

$$
d(x,a) \le d(x,\sigma) + d(a,\sigma) \le 2\,d(a,\sigma),
\tag{23}
$$

и свойства (10) локального модуля непрерывности следует оценка

$$
|\, f_w(x) - f_w(a)\,| \le M\left(f_w, x, d(x,a)\right) \le 3\,M\left(f_w, x, d(a,\sigma)\right).
\tag{24}
$$

Отметим далее, что в силу свойства (11) модуля непрерывности имеет место:

$$
\frac{M\left(f_w, x, d(a,\sigma)\right)}{d(a,\sigma)} \le 2\,\frac{M\left(f_w, x, d(x,\sigma)\right)}{d(x,\sigma)}, \quad d(x,\sigma) \le d(a,\sigma),
\tag{25}
$$

а значит, вновь применив Лемму 2, имеем:

$$
\begin{aligned}
&\left|\,\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\Lambda_2\,\cup\,\Theta_2} f_w(x)\,\right| \le 4 \int\limits_{\Lambda_2\,\cup\,\Theta_2} \frac{M\left(f_w, x, d(a,\sigma)\right)}{d^{\,r}(a,\sigma) d^{\,\nu - r + \operatorname{Re}\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma \le \\
&\qquad \le 8 \int\limits_{B(x,kh)} \frac{M\left(f_w, x, d(x,\sigma)\right)}{d^{\,\nu+\operatorname{Re}\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma \le c \int\limits_0^h \frac{\omega_\Omega\left(f_w, a, t\right)}{t^{\,\operatorname{Re}\alpha+1}}\,\mathrm{d}\,t.
\end{aligned}
$$

Следовательно, мажоранта первого слагаемого из генерального представления (17) имеет вид:

$$\left|\,\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\Omega_1\cup\Omega_2} f_w(x)\,\right| \le c \left\{ \int\limits_0^h \frac{\omega_\Omega(f_w,x,t)}{t^{\,\mathrm{Re}\,\alpha+1}}\,\mathrm{d}\,t + \int\limits_0^h \frac{\omega_\Omega(f_w,a,t)}{t^{\,\mathrm{Re}\,\alpha+1}}\,\mathrm{d}\,t \right\}, \tag{26}$$

где $0 < c < \infty$ – некоторая постоянная, вид которой продиктован исключительно Леммой 2.

Оценка второго слагаемого. Поскольку $d(x,y) \le k\,h$, в силу неравенства треугольника имеет место:

$$d(y,\sigma) \le d(x,y) + d(x,\sigma) \le (k+1)\,h, \quad \forall\sigma\in\Omega_1,$$

а значит

$$\Omega_1 \subseteq \{\,\sigma\in\Omega:\ d(y,\sigma) \le (k+1)\,h\,\} =: G, \quad G\cup\Omega_2 = \bigcup_{i=1}^{2} \Lambda_i(y)\cup\Theta_i(y),$$

где $\Lambda_i(y)$ и $\Theta_i(y)$ заданы выражением (19). Повторив рассуждения из предыдущего пункта, приходим к искомой оценке вида (26).

Оценка третьего слагаемого. Множество $\Omega_3\cap\Omega_4$ оставляет два равновозможных варианта расположения точек x и a относительно y:

$$\begin{gathered} H_{1\,|\,2} := \{\,\sigma\in\Omega:\ kh \le d(a\,|\,x,\sigma) \le d(x\,|\,a,\sigma)\,\}\,, \\ \Omega_3\cap\Omega_4 = H_1\cup H_2. \end{gathered} \tag{27}$$

В таком случае для интеграла I имеет место

$$|\,I\,| \le \int\limits_{H_1\cup H_2} \frac{|\,f_w(\sigma)-f_w(a)\,|}{d^{\,r}(a,\sigma)\,d^{\,\nu+\mathrm{Re}\,\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma = I_1 + I_2,$$

где правая часть представлена суммой интегралов с тем же подынтегральным выражением, но взятых по H_1 и H_2 соответственно.

Первый из них оценивается в тех же соображениях, что и $\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\Lambda_1\cup\Theta_1} f_w(x)$ в (21). Поскольку $d(a,\sigma)$ минимально на H_1, имеет место:

$$|\,I_1\,| \le \int\limits_{\Omega\setminus B(a,\,k\,h)} \frac{M\,(f_w,a,d(a,\sigma))}{d^{\,r+\nu+\mathrm{Re}\,\alpha}(a,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma \le c\int\limits_h^l \frac{\omega_\Omega(f_w,a,t)}{t^{\,r+\mathrm{Re}\,\alpha+1}}\,\mathrm{d}\,t, \quad 0<c<\infty.$$

Аналогично, оценка интеграла I_2 повторяет ход рассуждений в основе оценки $\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\Lambda_2\cup\Theta_2} f_w(x)$. Воспользуемся (22) и затем (25):

$$|\,I_2\,| \le 4\int\limits_{H_2} \frac{M\,(f_w,x,d(a,\sigma))}{d^{\,r}(a,\sigma)d^{\,\nu+\mathrm{Re}\,\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma \le 8 \int\limits_{\Omega\setminus B(x,kh)} \frac{M(f_w,x,d(x,\sigma))}{d^{\,\nu+r+\mathrm{Re}\,\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma,$$

где осталось лишь применить Лемму 3 и эквивалентность (8) модулей гладкости.

Наконец, поскольку

$$|\,w(x)-w(y)\,| = |\,d(x,a)-d(y,a)\,| \le d^{\,r}(x,y) \le k^{\,r}\,h^{\,r},$$

в силу неравенства треугольника и (18) получаем для третьего слагаемого:

$$|\,w(x)-w(y)\,|\cdot|\,I\,|\le c\,h^{r}\left\{\int\limits_{h}^{l}\frac{\omega_\Omega(f_w,x,t)}{t^{\,r+\operatorname{Re}\alpha+1}}\,\mathrm{d}\,t+\int\limits_{h}^{l}\frac{\omega_\Omega(f_w,a,t)}{t^{\,r+\operatorname{Re}\alpha+1}}\,\mathrm{d}\,t\right\}.$$

Отметим, что значение константы c здесь может быть восстановлено до произвольной постоянной из оценки Леммы 3 и величины h.

Оценка четвертого слагаемого. Прежде всего, запишем:

$$|\,J\,|\le\int\limits_{\Omega_3\cap\Omega_4}\frac{|\,d^{\,r}(a,y)-d^{\,r}(a,\sigma)\,|}{d^{\,r}(a,\sigma)}\left|d^{\,-\nu-\operatorname{Re}\alpha}(x,\sigma)-d^{\,-\nu-\operatorname{Re}\alpha}(y,\sigma)\right|\cdot \tag{28}$$
$$\cdot\,|\,f_w(\sigma)-f_w(a)\,|\;\mathrm{d}\,\sigma.$$

Нам понадобится следующее неравенство, доказанное в [?] для $\gamma\in\mathbb{C}$:

$$\left|\,d^{\,-\gamma}(x_1,x_2)-d^{\,-\gamma}(x_2,x_3)\,\right|\le 2^{\,\operatorname{Re}\gamma+1}\;|\,\gamma\,|\;\frac{d(x_1,x_3)}{d(x_1,x_2)^{\,\operatorname{Re}\gamma+1}}, \tag{29}$$
$$x_k\in X,\quad k=\overline{1,3}.$$

Применив его к первому модулю под интегралом в правой части (28), обозначаемому в дальнейшем буквой κ, получаем:

$$\kappa:=|\,d^{\,r}(a,\sigma)-d^{\,r}(a,y)\,|\le c_0\,\frac{d(y,\sigma)}{d^{\,1-r}(a,\sigma)},\quad c_0=2^{\,1-r}\,r.$$

Исследуя второй модуль, обозначим для краткости:

$$d_1=d(x,\sigma),\quad d_2=d(y,\sigma),\quad \gamma=\alpha+\nu.$$

Результатом простых алгебраических преобразований имеем:

$$\left|\,d_1^{-\gamma}-d_2^{-\gamma}\pm d_1^{-\operatorname{Re}\gamma}\,d_2^{-i\,\operatorname{Im}\gamma}\,\right|\le\left|\,d_1^{-\operatorname{Re}\gamma}\,\right|\,\left|\,d_1^{-i\,\operatorname{Im}\gamma}-d_2^{-i\,\operatorname{Im}\gamma}\,\right|+$$
$$+\left|\,d_2^{-i\,\operatorname{Im}\gamma}\,\right|\,\left|\,d_1^{-\operatorname{Re}\gamma}-d_2^{-\operatorname{Re}\gamma}\,\right|=:\kappa_1+\kappa_2.$$

Модуль разности в слагаемом κ_1 оценим, вновь используя (29):

$$\left|\,d_1^{-i\,\operatorname{Im}\gamma}-d_2^{-i\,\operatorname{Im}\gamma}\,\right|=\left|\,d^{\,-i\,\operatorname{Im}\gamma}(x,\sigma)-d^{\,-i\,\operatorname{Im}\gamma}(y,\sigma)\,\right|\le\frac{d(x,y)}{d(x,\sigma)},$$

так что мажорантой κ_1 является отношение

$$\kappa_1\le\frac{d(x,y)}{d^{\,\operatorname{Re}\alpha+\nu+1}(x,\sigma)}.$$

Примем во внимание конструкцию множества интегрирования, а именно:

$$d(x,y)\le k\,h\le d(x,\sigma),\quad \sigma\in\Omega_3\cap\Omega_4, \tag{30}$$

в силу чего обеспечено:

$$\frac{d(y,\sigma)}{d(x,\sigma)}\le\frac{d(x,y)+d(x,\sigma)}{d(x,\sigma)}\le 1+\frac{d(x,y)}{d(x,\sigma)}\le 2.$$

Таким образом, имеет место оценка:

$$\frac{\kappa\,\kappa_1}{d^{\,r}(a,\sigma)}\le c_0\,\frac{d(y,\sigma)}{d(x,\sigma)}\,\frac{d(x,y)}{d(a,\sigma)\,d^{\,\operatorname{Re}\alpha+\nu}(x,\sigma)}\le\frac{c\,h}{d(a,\sigma)\,d^{\,\operatorname{Re}\alpha+\nu}(x,\sigma)}, \tag{31}$$

где, строго говоря, $c = 2\,c_0\,k$.

Рассмотрим оценку композиции со слагаемым κ_2. Напомним еще одно неравенство, приводившееся, например, в книге С. Л. Соболева [65, с. 251]:

$$\left|\,\frac{1}{d_1^{\gamma}} - \frac{1}{d_2^{\gamma}}\,\right| \le c\,\frac{|\,d_1 - d_2\,|\;(d_1 + d_2)^{\,\gamma-1}}{(d_1\,d_2)^{\,\gamma}},\quad d_1, d_2 > 0,\quad \gamma \in \mathbb{R},\quad c > 0. \tag{32}$$

Воспользуемся им для оценки κ_2:

$$\left|\,d_1^{-\operatorname{Re}\gamma} - d_2^{-\operatorname{Re}\gamma}\,\right| \le c_1\,d(x,y)\,\frac{(d(x,\sigma) + d(y,\sigma))^{\,\nu+\operatorname{Re}\alpha-1}}{(d(x,\sigma)\,d(y,\sigma))^{\,\nu+\operatorname{Re}\alpha}},\quad c_1 > 0,$$

где нашло применение также неравенство треугольника. Вновь отметим (30), которое влечет оценку

$$\frac{d(x,\sigma)}{d(y,\sigma)} \le \frac{d(x,y) + d(y,\sigma)}{d(y,\sigma)} \le 1 + \frac{k\,h}{d(y,\sigma)}.$$

Поскольку также

$$d(y,\sigma) \ge d(x,\sigma) - d(x,y) \ge (k-1)\,h,\quad \sigma \in \Omega_3 \cap \Omega_4,$$

имеет место следующее неравенство с уточненной константой в правой части:

$$\frac{d(x,\sigma)}{d(y,\sigma)} \le 1 + \frac{k}{k-1},\quad k > 1.$$

Следовательно, вынося в числителе $d(y,\sigma)$, имеем:

$$\frac{\kappa\,\kappa_2}{d^{\,r}(a,\sigma)} \le \frac{c\,h}{d(a,\sigma)\,d^{\,\nu+\operatorname{Re}\alpha}(x,\sigma)},\quad c = c_0\,c_1\,\frac{k\,(2\,k-1)}{k-1}. \tag{33}$$

Наконец, оценив правую часть неравенства (28) суммой интегралов с κ_1 и κ_2 в составе соответствующих подынтегральных выражений, имеем на основании оценок (31) и (33):

$$|\,J\,| \le c\,h\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{H_k}\frac{|\,f_w(\sigma) - f_w(a)\,|}{d(a,\sigma)\,d^{\,\nu+\operatorname{Re}\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma =: c\,h\,(J_1 + J_2),$$

где множества H_k, $k = 1, 2$, определены выше выражением (27), а в качестве c может быть выбрана максимальная из констант в (31) и (33).

На H_1 выполняется $d(a,\sigma) \le d(x,\sigma)$, так что для J_1 имеем в силу (20) и Леммы 3:

$$J_1 \le 2\int\limits_{\Omega\setminus B(a,kh)}\frac{\omega_\Omega(f_w, a, d(a,\sigma))}{d^{\,\nu+\operatorname{Re}\alpha+1}(a,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma \le c\int\limits_h^l\frac{\omega_\Omega(f_w, a, t)}{t^{\,\operatorname{Re}\alpha+2}}\,\mathrm{d}\,t.$$

Для H_2 воспользуемся (22), (25), свойством эквивалентности модулей гладкости и Леммой 3:

$$J_2 \le 8\int\limits_{\Omega\setminus B(x,kh)}\frac{M\,(f_w, x, d(x,\sigma))}{d^{\,\nu+\operatorname{Re}\alpha+1}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma \le c\int\limits_h^l\frac{\omega_\Omega\,(f_w, x, d(x,\sigma))}{d^{\,\operatorname{Re}\alpha+2}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma.$$

В заключение отметим, что

$$\frac{h}{t^{\,\operatorname{Re}\alpha+2}} \le \frac{h^{\,r}}{t^{\,r+\operatorname{Re}\alpha+1}},\quad t \ge h,\quad r \le 1. \tag{34}$$

Действительно, представим

$$t = \tau\, h, \quad \tau \geq 1.$$

Тогда (34) является следствием невозрастания функции

$$\varphi(\tau) = \tau^{\,-\gamma}, \quad \gamma \in [r, 1].$$

Таким образом, имеем для последнего слагаемого из представления (17)

$$|\,J\,| \leq c\,h^{r}\left\{\int\limits_{h}^{l}\frac{\omega_{\Omega}(f_w, x, t)}{t^{\,r+\operatorname{Re}\alpha+1}}\,\mathrm{d}\,t + \int\limits_{h}^{l}\frac{\omega_{\Omega}(f_w, a, t)}{t^{\,r+\operatorname{Re}\alpha+1}}\,\mathrm{d}\,t\right\}.$$

Завершающие выводы. Объединив полученные выше оценки, получаем утверждение доказываемой теоремы. □

Теорема о действии

Чтобы сформулировать условия на характеристику $\omega(x,h)$, обеспечивающие ограниченность оператора $D^{\,\alpha}$ при отображении элемента $H^{\,\omega(\cdot)}\,(\Omega)$, сперва рассмотрим следующий класс функций:

Определение 6. *Пусть $T_l := \Omega \times [0,l]$, $l > 0$. Отнесем всякую функцию $\omega : T_l \to [0,\,\infty)$ к классу $W(T_l)$, если обеспечено следующее:*

- *$\forall x \in \Omega$ функция $\omega(x,t)$ непрерывна по $t \in [0,l]$;*
- *$\inf\limits_{x\in\Omega}\omega(x,t) > 0$ при $t > 0$ и $\forall x \in \Omega \quad \lim\limits_{t\to+0}\omega(x,t) = 0$;*
- *$\omega(x,t)$ почти возрастает по t для всех $x \in \Omega$.*

Спецификацией класса W является класс Зигмунда–Бари–Стечкина, достаточно широкий для построения теории обобщенных пространств Гёльдера:

Определение 7. *Функция $\omega \in W(T_l)$ принадлежит классу Зигмунда–Бари–Стечкина $\Phi^{\,\delta}_{\,\beta} = \Phi^{\,\delta}_{\,\beta}(T_l)$, где $0 \leq \delta < \beta$, $x \in \Omega$, если одновременно выполнены следующие условия:*

$$\int\limits_{0}^{h}\left(\frac{h}{t}\right)^{\delta}\frac{\omega(x,t)}{t}\,\mathrm{d}\,t \leq c\,\omega(x,h), \quad \int\limits_{h}^{l}\left(\frac{h}{t}\right)^{\beta}\frac{\omega(x,t)}{t}\,\mathrm{d}\,t \leq c\,\omega(x,h), \tag{35}$$

где $0 < h < \dfrac{l}{2}$, и постоянная $c > 0$ не зависит ни от h, ни от x.

Естественной нормой в пространстве $H^{\,\omega(\cdot)}\,(\Omega)$ является

$$\|f\|_{H^{\,\omega(\cdot)}(\Omega)} = \|f\|_{C(\Omega)} + \sup_{\substack{x\in\Omega,\\ h>0}}\frac{\omega_{\Omega}(f,x,h)}{\omega(x,h)}, \tag{36}$$

где символом $C(\Omega)$ обозначено пространство равномерно непрерывных на Ω функций. Последнее, в силу эквивалентности модулей гладкости, можно определить условием вида

$$C(\Omega) := \left\{f : \lim_{h\to+0}\omega_{\Omega}(f,x,h) = 0, \quad \forall x \in \Omega\right\},$$

следовательно, условие (4) обобщенной гёльдеровости с характеристикой из класса W влечет равномерную непрерывность функции f.

Теорема 2. *Пусть гёльдеровская характеристика*

$$\omega \in \Phi^{\operatorname{Re}\alpha}_{1+\operatorname{Re}\alpha}, \quad 0 < \operatorname{Re}\alpha < 1, \tag{37}$$

а также удовлетворяет условию типа Дини:

$$\begin{gathered} c_1\, \omega\,(y, d(x,y)) \le \omega\,(x, d(x,y)) \le c_2\, \omega\,(x, d(x,y))\,, \\ x, y \in \Omega, \quad 0 < c_1, c_2 < \infty. \end{gathered} \tag{38}$$

Тогда оператор $D^{\,\alpha}$ *ограничен из* $H^{\,\omega(\cdot)}(\Omega)$ *в* $H^{\,\omega_{\,-\alpha}(\cdot)}(\Omega)$ *с характеристикой*

$$\omega_{-\alpha}(x,h) := h^{\,-\operatorname{Re}\alpha}\,\omega(x,h), \quad 0 < h < l < \infty. \tag{39}$$

Доказательство Теоремы 2 приводилось в работе [47]. Наконец, имеет место результирующая

Теорема 3. *Пусть характеристика* $\omega(x,h)$ *удовлетворяет условиям* (37) *и* (38)*, а также достигает минимума в точке* $x = a \in \Omega$*. Тогда оператор* $D^{\,\alpha}$ *ограничен из* $H^{\,\omega(\cdot)}\,(\Omega, w)$ *в* $H^{\,\omega_{\,-\alpha}(\cdot)}\,(\Omega, w)$ *с характеристикой* (39) *и степенным весом*

$$w(x) = d^{\,r}(x,a), \quad 0 < r \le 1.$$

Доказательство. Воспользуемся аддитивным представлением (14). Ограниченность первого слагаемого в правой его части утверждается Теоремой 2. Ограниченность же оператора $\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega}$ на функции f_w следует из оценки типа Зигмунда, постулированной Теоремой 1.

Действительно, продолжив неравенство (15), имеем:

$$\frac{|\,\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(x) - \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(y)\,|}{h^{\,-\operatorname{Re}\alpha}\,\omega(x,h)} \le \frac{c_1}{\omega(x,h)} \sum_{z\in\{a,x\}} \left\{ \int\limits_0^h \left(\frac{h}{t}\right)^{\operatorname{Re}\alpha} \frac{\omega_\Omega(w\,f, z, t)}{t}\,\mathrm{d}\,t + \right.$$
$$\left. + \int\limits_h^l \left(\frac{h}{t}\right)^{r+\operatorname{Re}\alpha} \frac{\omega_\Omega(w\,f, z, t)}{t}\,\mathrm{d}\,t \right\},$$

где $0 < c_1 < \infty$ – некоторая постоянная. Имея в виду условия теоремы, заметим, что

$$\omega(a,t) \le c_2\, \omega(x,t), \quad 0 < c_2 < \infty,$$

и для оценки слагаемых с $z = x$ достаточно воспользоваться определением класса Зигмунда–Бари–Стечкина. Наконец, перейдя в неравенстве к супремуму, имеем ограниченность оператора D^α в терминах нормы (36). □

References

[1] S. G. Samko, A. A. Marichev, O. I. Kilbas, *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Philadelphia, PA, 1993.

[2] S. G. Samko, *On spaces of Riesz potentials*, Izv. Math., **10**:5 (1976), 1089–1117.

[3] S. G. Samko, *Generalized Riesz potentials and hypersingular integrals, their symbols and inversion*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **232**:3 (1977), 528–531.

[4] S. G. Samko, *Spherical potentials, spherical Riesz differentiation, and their applications*, Russian Math. (Iz. VUZ), **21**:2 (1977), 106–110.

[5] S. G. Samko, *Generalized Riesz potentials and hypersingular integrals with homogeneous characteristics; their symbols and inversion*, Proc. Steklov Inst. Math., **156** (1980), 173–243.

[6] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag (2001)

[7] S. G. Samko, *Singular integrals over a sphere and the construction of the characteristic from the symbol*, Russian Math. (Iz. VUZ), **27**:4 (1983), 35–52.

[8] B. G. Vakulov, *An operator of potential type on a sphere in generalized Hölder classes*, Russian Math. (Iz. VUZ), **30**:11 (1986), 90–94.

[9] A. S. Dzhafarov, *Konstruktivnoe opisanie obobshhennyh klassov Besova na mnogomernoj sfere*, DAN SSSR, **285**: 3 (1985), 542–546.

[10] A. D. Gadzhiev, H. P. Rustamov, *Jekvivalentnaja normirovka v prostranstvah Besova na sfere i svojstva simvola mnogomernogo singuljarnogo integrala*, Izv. vuzov, Matemat., **9** (1984), 69–71.

[11] I. V. Petrova, *Teorema Dzheksona i prostranstva Besova na sfere*, DAN SSSR, Vol. 276, 3 (1984), 544–549.

[12] S. M. Nikolsky, Lizorkin P. I. *Priblizhenie spericheskimi polinomami*, Tr. MIAN SSSR, Moscow, 166, 1984, 186–200.

[13] B. G. Vakulov, S. G. Samko, *Equivalent normings in spaces of functions of fractional smoothness on the sphere, of type* $C^{\lambda}(\mathbb{S}_{n-1})$, $H^{\lambda}(\mathbb{S}_{n-1})$, Russian Math. (Iz. VUZ), **31**: 12 (1987), 90–95.

[14] S. G. Samko, B. G. Vakulov, *On equivalent norms in fractional order function spaces of continuous functions on the unit sphere*, Fract. Calc. Appl. Anal., **3**: 4 (2000), 401–433.

[15] B. G. Vakulov, *Ob ekvivalentnyh normirovkah v prostranstvah funkcij kompleksnoj gladkosti na sfere*, Proceedings of the Institute of Mathematics, **9** (2001), 41–44.

[16] A. S. Dzhafarov, *Nailuchshee priblizhenie konechnymi sfericheskimi summami i nekotorye differencial'nye svojstva garmonicheskih v share funkcij*, Teoremy vlozheniya i ih prilozheniya. Trudy simpoziuma po teoremam vlozheniya. Baku, 1966 god, Nauka, 1970, 75–81.

[17] A. I. Gusejnov, H. Sh. Muhtarov, *Vvedenie v teoriyu nelinejnyh singulyarnyh integral'nyh uravnenij*, Nauka, Moscow, 1980.

[18] H. P. Rustamov, *O tochnosti gladkostnyh svojstv simvola mnogomernogo singuljarnogo operatora s nepreryvnoj harakteristikoj*, Deponirovanie v VINITI, Baku, 1981, №5014-81 DEP.

[19] L. D. Shankishvili *Operatory tipa sfericheskogo potenciala kompleksnogo porjadka v obobshhjonnyh prostranstvah Gjol'dera*, Deponirovanie v VINITI 23.03.98, №860-B98.

[20] B. G. Vakulov, *Sfericheskie operatory tipa potenciala v obobshchennyh prostranstvah Gel'dera s vesom na sfere*, Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Severo-Kavkazskij region. Seriya: estestvennye nauki, **4** (1999), 5–10.

[21] B. G. Vakulov, N. K. Karapetians, L. D. Shankisdvili, *Spherical hypersingular operators of imaginary order and their multipliers*, Fractional Calculus and Applied Analysis, **4** : 1 (2001), 101.

[22] B. G. Vakulov, N. K. Karapetjanc, L. D. Shankishvili, *Spherical convolution operators with a power-logarithmic kernel in generalized Hl̈der spaces*, Russian Math. (Iz. VUZ), **47**:2 (2003), 1–12.

[23] B. G. Vakulov, G. S. Kostetskaya, Yu. E. Drobotov, *Riesz potentials in generalized Hölder spaces*, Fractal Approaches for Modeling Financial Assets and Predicting Crises, IGI Global, 249–273.

[24] B. G. Vakulov, Yu. E. Drobotov, *Riesz potential with logarithmic kernel in generalized Hölder spaces*, Recent Applications of Financial Risk Modelling and Portfolio Management, IGI Global, 275–296.

[25] B. G. Vakulov, Yu. E. Drobotov, *The Riesz potential type operator with a power-logarithmic kernel in the generalized Hölder spaces on a sphere*, Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications, Springer International Publishing, Cham, 147–159.

[26] Yu. E. Drobotov, B. G. Vakulov, *Smoothness properties of a Riesz potential type operator with logarithmic characteristic* , University News. North-Caucasus Region. Natural Sciences Series, **1** (2022), 4–11.

[27] S. G. Samko, B. Ross, *Integration and differentiation to a variable fractional order*, Integral Transform. Spec. Funct, 1 (1993), 277–300.

[28] S. G. Samko, *Fractional integration and differentiation of variable order*, Anal. Math., **21** (1995), 213–236.

[29] B. G. Vakulov, E. S. Kochurov, *Operatory drobnogo integrirovanija i differencirovanija peremennogo porjadka v prostranstvah Gjol'dera* $H^{\omega(x,t)}$, Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal, **12**: 4 (2010), 3–11.

[30] B. G. Vakulov, E. S. Kochurov, *Ocenki tipa Zigmunda dlja operatorov drobnogo integrirovanija i differencirovanija peremennogo porjadka*, Izv. vuzov. Sev. Kavk. region. Estestv. nauki. Specvypusk (2011), 15–17.

[31] B. G. Vakulov, E. S. Kochurov, N. G. Samko, *Zygmund-type estimates for fractional integration and differentiation operators of variable order*, Russian Mathematics, **55**: 6 (2011), 20–28.

[32] S. G. Samko, *Differentiation and integration of variable order and the spaces* $L^{p(x)}$, Contemporary Mathematics, **212** (1998), 203–219.

[33] B. G. Vakulov, S. G. Samko, *A weighted Sobolev theorem for spatial and spherical potentials in Lebesgue spaces with variable exponents*, Doklady Mathematics, **72** : 1 (2005), 487–490.

[34] S. Samko, E. Shargorodsky, B. Vakulov, *Weighted Sobolev theorem with variable exponent for spatial and spherical potential operators, II*, Journal of Mathematical Analysis and Applicationsthis, **325**: 1 (2007), 745–751.

[35] N. G. Samko, S. G. Samko, B. G. Vakulov, *Weighted Sobolev theorem in Lebesgue spaces with variable exponent*, Journal of Mathematical Analysis and Applicationsthis, **335**: 1 (2007), 560–583.

[36] A. I. Ginsburg, N. K. Karapetyants, *Drobnoe integrodifferencirovanie v gel'derovskih klassah peremennogo porjadka*, Doklady RAN, **339**: 4 (1994), 439–441.

[37] B. Ross, S. G. Samko, *Fractional integration operator of a variable order in the Hölder spaces* $H^{\lambda(x)}$, Internat. J. Math. Math. Sci., **18** (1995), 777–788.

[38] B. G. Vakulov, *Sfericheskie operatory tipa potenciala v vesovyh prostranstvah Gjol'dera peremennogo porjadka*, Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal, **7**: 2 (2005), 26–40.

[39] B. G. Vakulov, *Spherical potentials in weighted Hölder spaces of variable order*, Doklady Mathematics, **71**: 1 (2005), 1–14.

[40] B. G. Vakulov, *Spherical potentials of complex order in the variable order Hölder spaces*, Integral Transforms and Special Functions, **16**: 5-6 (2005), 489–497.

[41] B. G. Vakulov, *Spherical convolution operators in spaces of variable Hölder order*, Mathematical Notes, **80**: 5–6 (2006), 645–657.

[42] B. G. Vakulov, Yu. E. Drobotov, *Riesz potential with integrable density in Hölder-variable spaces*, Mathematical Notes, **108**:5 (2020), 669–678.

[43] B. G. Vakulov, *Spherical potentials of complex order in generalized Hölder spaces of variable order*, Doklady Akademii Nauk, **407**:1 (2006), 12–15.

[44] N. Samko, B. Vakulov, *Spherical fractional and hypersingular integrals of variable order in generalized Hölder spaces with variable characteristic*, Mathematische Nachrichten, **284**: 2–3 (2011), 355–369.

[45] B. G. Vakulov, Yu. E. Drobotov, *Variable order Riesz potential over* $\dot{\mathbb{R}}^n$ *on weighted generalized variable Hölder spaces*, Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya, **14** (2017), 647–656.

[46] B. G. Vakulov, N. G. Samko, S. G. Samko, *Operatory tipa potenciala i gipersingulyarnye integraly v prostranstvah Gyol'dera peremennogo poryadka na odnorodnyh prostranstvah*, Izv. vuzov. Sev. Kavk. region. Estestv. nauki. Specvypusk, (2009), 40–45.

[47] N. Samko, S. Samko, B. Vakulov, *Fractional integrals and hypersingular integrals in variable order Hölder spaces on homogeneous spaces*, Journal of Function Spaces and Applications, **8**:3 (2010), 215–244.

[48] S. G. Samko, *Potential operators in generalized Hölder spaces on sets in quasi-metric measure spaces without the cancellation property*, Nonlinear Analysis, **78** (2013), 130–140.

[49] M. L. Gol'dman, E. G. Bakhtigareeva, *Application of general approach to the theory of Morrey-type spaces*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, **43**:16 (2020), 9435–9447.

[50] S. G. Samko, S. M. Umarkhadzhiev, *Grand Morrey type spaces*, Vladikavkaz Mathematical Journal, **22**:4 (2020), 104–118.

[51] V. I. Burenkov, M. A. Senouci, *Boundedness of the generalized Riesz potential in local Morrey type spaces*, Eurasian Mathematical Journal, **12**:4 (2021), 92–98.

[52] V. I. Burenkov, E. D. Nursultanov, *Interpolation theorems for nonlinear operators in general Morrey-type spaces and their applications*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematicsthis link is disabled, **312**:1 (2021), 124–149.

[53] I. Ekincioglu,, S. M. Umarkhadzhiev, *Oscillatory integrals with variable Calderon-Zygmund kernel on generalized weighted Morrey spaces*, Transactions Issue Mathematics, Azerbaijan National Academy of Sciences, **42**:1 (2022), 99–110.

[54] S. M. Umarkhadzhiev, *Generalization of a notion of grand Lebesgue space*, Russian Math. (Iz. VUZ), **58**:4 (2014), 35–43.

[55] S. M. Umarkhadzhiev, Yu. E. Drobotov, *Riesz potential in generalized grand Lebesgue space*, Bulletin of the Academy of Sciences of the Chechen Republic, **4**(29) (2015), 26–29.

[56] Yu. E. Drobotov, S. M. Umarkhadzhiev, *Riesz potential with homogeneous kernel in grand Lebesgue spaces on semi-axis*, Bulletin of the Academy of Sciences of the Chechen Republic, **1**(38) (2018), 18–25.

[57] S. M. Umarkhadzhiev, *On elliptic homogeneous differential operators in grand spaces*, Russian Mathematics, **64**:3 (2020), 57–65.

[58] S. M. Umarkhadzhiev, *Unilateral ball potentials in grand Lebesgue spaces*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, **357** (2021), 569–576.

[59] S. G. Samko, S. M. Umarkhadzhiev, *Local grand Lebesgue spaces*, Vladikavkaz Mathematical Journal, **23**:4 (2021), 96–108.

[60] S. G. Samko, S. M. Umarkhadzhiev, *Weighted Hardy operators in grand Lebesgue spaces on* $\mathbb{R}^n$, J Math Sci (2022)

[61] H. Rafeiro, S. Samko, S. Umarkhadzhiev, *Grand Lebesgue space for* $p = \infty$ *and its application to Sobolev–Adams embedding theorems in borderline cases*, Mathematische Nachrichten, **295**: 5 (2022), 991–1007.

[62] H. Rafeiro, S. Samko, S. Umarkhadzhiev, *Local grand Lebesgue spaces on quasi-metric measure spaces and some applications*, Positivity, **26**: 3 (2022), 53.

[63] S. M. Umarkhadzhiev, *Embedding of grand central Morrey-type spaces into local grand weighted Lebesgue spaces*, J Math Sci (2022)

[64] V. N. Berestovskii, *Submetries of space-forms of negative curvature*, Siberian Mathematical Journal, **28** (1987), 552–562.

[65] S. L. Sobolev, *Vvedenie v teoriyu kubaturnyh formul*, Nauka, Moscow, 1974.

Yuri Evgenievich Drobotov
Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich,
ul. Milchakova, 8a,
344090, Rostov-on-Don, Russia
North-Caucasus Center for Mathematical Research of the Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences,
ul. Vil'yamsa, 1,
363110, RSO-Alaniya, Prigorodnyj rajon, s.Mihajlovskoe, Russia
DBI LLC,
ul. Trolleibusnaia, d. 24/2 V, of.704
344065, Rostov-on-Don, Russia
Email address: yu.e.drobotov@yandex.ru

Boris Grigorievich Vakulov
Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich,
Milchakova str., 8a,
344090, Rostov-on-Don, Russia
Email address: bvak1961@bk.ru