

# СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 144–144 (2019)  
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx  
11A63

УДК 511.3  
MSC 11A55

## ОБ АНАЛОГЕ ЗАДАЧИ МАЛЕРА-ЭМИНЯНА ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЙ ОСТРОВСКОГО

А.В. ШУТОВ

**АБСТРАКТ.** Asymptotic formulas are obtained for the number of natural  $n$ , not exceeding  $X$  such that the sums of the digits of the Ostrowsky expansions of  $n$  and  $n + 1$  have a given parity.

**Keywords:** continued fractions, Ostrowsky expansions, sums of digits.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим двоичное разложение

$$n = \sum_{k=0}^{B(n)} b_k(n) 2^k$$

– двоичное разложение натурального числа  $N$ . Для  $i \in \{0, 1\}$  положим

$$\mathcal{N}_i^{Bin} = \{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{B(n)} b_k(n) \equiv i \pmod{2}\}.$$

Пусть также для  $i, j \in \{0, 1\}$

$$B_{ij}(X) = \{n \leq X : n \in \mathcal{N}_i^{Bin}, n + 1 \in \mathcal{N}_j^{Bin}\}.$$

Эминян показал [1], что

$$B_{ij}(X) = \frac{X}{6} + O(\log X)$$

SHUTOV, A.V., ON SOME ANALOGUE OF THE MAHLER-EMINYAN PROBLEM FOR OSTROWSKY EXPANSIONS.

© 2015 ШУТОВ А.В.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-11-00065, <https://rscf.ru/project/19-11-00065/>.

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

при  $i = j$ , и

$$B_{ij}(X) = \frac{X}{3} + O(\log X)$$

при  $i \neq j$ . На самом деле результат Эминяна в несколько строк выводится из полученной ранее Малером [2] асимптотики для суммы  $\sum_{l=0}^{r-1} \rho(l)\bar{\rho}(l+k)$ , где  $\rho(l) = \xi_q^{s_q(n)}$  и  $\xi_q$  – корень  $q$ -ой степени из 1 и  $s_q(n)$  – сумма цифр  $q$ -ичного разложения  $n$ .

В [3] был получен аналог данного результата для случая системы счисления Фибоначчи. Рассмотрим последовательность чисел Фибоначчи  $\{F_k\}$ :  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ ,  $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ . Тогда каждое натуральное число имеет единственное представление Цеккендорфа [4]

$$n = \sum_{k=2}^{Fib(n)} f_k(n)F_k,$$

где  $f_k(n) \in \{0, 1\}$  и  $f_k(n)f_{k+1}(n) = 0$ . Пусть для  $i \in \{0, 1\}$

$$\mathcal{N}_0^{Fib} = \{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{Fib(n)} f_k(n) \equiv i \pmod{2}\}.$$

Пусть также для  $i, j \in \{0, 1\}$

$$F_{ij}(X) = \{n \leq X : n \in \mathcal{N}_i^{Fib}, n+1 \in \mathcal{N}_j^{Fib}\}.$$

Тогда

$$F_{ij}(X) = \frac{\sqrt{5}}{10}X + O(\log X)$$

при  $i = j$ , и

$$F_{ij}(X) = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}X + O(\log X)$$

при  $i \neq j$ . Еще одно доказательство данного результата приведено в [5].

Отметим, что числа Фибоначчи можно рассматривать как знаменатели подходящих дробей к  $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . В случае произвольного иррационального  $\alpha$  существует аналог представления Цеккендорфа – разложение Островского [6]. Цель настоящей работы – получить аналог теоремы Эминяна для разложений Островского, связанных с произвольным иррациональным  $\alpha$ .

## 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть  $\alpha \in (0; 1)$  – иррационально. Пусть  $\{q_k\}$  – последовательность неполных частных разложения  $\alpha$  в цепную дробь,  $\{\frac{P_k}{Q_k}\}$  – последовательность подходящих дробей к  $\alpha$  и  $\eta_k = (-1)^k(Q_k\alpha - P_k)$ .

Известно [6], что любое натуральное  $n$  имеет разложение по знаменателям подходящих дробей к  $\alpha$ :

$$n = \sum_{i=0}^{k(\alpha, n)} z_k(\alpha, n)Q_k(\alpha),$$

где  $z_0(\alpha, n) \leq q_1(\alpha) - 1$ ,  $z_k(\alpha, n) \leq q_{k+1}(\alpha)$  при  $k \geq 1$ , причем из того, что  $z_k(\alpha, n) = q_{k+1}(\alpha)$  следует, что  $z_{k-1}(\alpha, n) = 0$ . Данное разложение может быть

построено по жадному алгоритму и называется разложением Островского натурального числа  $n$ . Отметим, что условия на коэффициенты  $z_k(\alpha, n)$  гарантируют единственность разложения. Мы будем использовать обозначение  $z(\alpha, n)$  для набора коэффициентов  $(z_{k(\alpha, n)}(\alpha, n), \dots, z_0(\alpha, n))$  разложения Островского.

Приведем ряд вспомогательных результатов о разложениях Островского.

Набор  $z = (z_{l-1}, \dots, z_0)$  будем называть  $\alpha$ -допустимым, если существует натуральное число  $n$ , разложение Островского которого заканчивается на  $z$ , то есть  $z_{l-1}(\alpha, n) = z_l, \dots, z_0(\alpha, n) = z_0$ .

Пусть  $z$  –  $\alpha$ -допустимый набор и  $\mathbb{N}(z)$  – множество натуральных чисел, разложение Островского которых заканчивается на  $z$ .

**Теорема 1.** Пусть  $z = (z_{l-1}, \dots, z_1, z_0)$  –  $\alpha$ -допустимый набор, причем в случае  $\alpha \in (\frac{1}{2}; 1)$  дополнительно предполагается, что  $l > 1$ . Тогда существует эффективно вычисляемый отрезок  $I(z)$  вида  $I(z) = [\{a_z \alpha\}, \{b_z \alpha\}]$ ,  $a_z, b_z \in \mathbb{Z}$  такой, что  $n \in \mathbb{N}(z)$  тогда и только тогда, когда  $\{(n+1)\alpha\} \in I(z)$ . Длина этого отрезка равна  $\eta_{l-1}(\alpha)$ , если  $z_l \neq 0$  и равна  $\eta_{l-1}(\alpha) + \eta_l(\alpha)$ , если  $z_l = 0$ .

Данный результат независимо и разными методами получен в [7], [8].

Теорема 1 позволяет сводить изучение множеств  $\mathbb{N}(z)$  к изучению распределения дробных долей  $\{n\alpha\}$ . Гекке [9] показал, что если длина отрезка  $I$  принадлежит множеству  $\alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ , то

$$\#\{n \leq X : \{n\alpha\} \in I\} = |I|X + O(1).$$

Подобные множества называются множествами ограниченного остатка.

Очевидно, что построенные в теореме 1 отрезки  $I(z)$  удовлетворяют условию Гекке и, тем самым, являются множествами ограниченного остатка. Однако, для них можно получить существенно более сильный результат.

**Теорема 2.** Существует абсолютная постоянная  $K$  такая, что для любого иррационального  $\alpha \in (0; 1)$  и любого  $\alpha$ -допустимого набора  $z$

$$|\#\{n \leq X : \{n\alpha\} \in I(z)\} - |I(z)||X| \leq K.$$

Доказательство можно найти, например, в [8].

Из теорем 1 и 2 немедленно вытекает следующий результат.

**Следствие 1.** Существует абсолютная постоянная  $K$  такая, что для любого иррационального  $\alpha \in (0; 1)$  и любого  $\alpha$ -допустимого набора  $z = (z_{l-1}, \dots, z_1, z_0)$

$$|\#\{n \leq X : n \in \mathbb{N}(z)\} - \nu(z)X| \leq K,$$

где  $\nu(z) = \eta_{l-1}(\alpha)$ , если  $z_l \neq 0$  и  $\nu(z) = \eta_{l-1}(\alpha) + \eta_l(\alpha)$ , если  $z_l = 0$ .

Пусть теперь

$$\epsilon(n) = (-1)^{\sum_{k=0}^{k(\alpha, n)} z_k(\alpha, n)}.$$

Нам потребуется следующая оценка.

**Теорема 3.** Пусть

$$S(X) = \sum_{n < X} \epsilon(n).$$

Тогда

$$S(X) = O(\log X).$$

Доказательство можно найти в [10].

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть  $\alpha \in (0; 1)$  – иррационально.

Для  $i \in \{0, 1\}$  положим

$$\mathcal{N}_i^{Ostr} = \{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{k(\alpha, n)} z_k(\alpha, n) \equiv i \pmod{2}\}.$$

Пусть также для  $i, j \in \{0, 1\}$

$$Z_{ij}(X) = \{n \leq X : n \in \mathcal{N}_i^{Ostr}, n+1 \in \mathcal{N}_j^{Ostr}\}.$$

Наша цель состоит в том, чтобы найти асимптотики для  $Z_{ij}(X)$ .

Определим последовательность  $\{n_k\} = \{n_k(\alpha)\}$  следующим образом. Для  $\alpha \in (0; \frac{1}{2})$  положим  $n_1(\alpha) = q_1(\alpha) - 1$  и  $n_k(\alpha) = q_k(\alpha)$  при  $k \geq 2$ . Для  $\alpha \in (\frac{1}{2}; 1)$  положим  $n_k(\alpha) = n_k(1 - \alpha)$  для всех  $k \geq 1$ .

Также положим  $r_0 = 1$  и

$$r_k = \begin{cases} 1 + n_k(\alpha) + n_{k-2}(\alpha) + \dots + n_2(\alpha), & k \equiv 0 \pmod{2} \\ 1 + n_k(\alpha) + n_{k-2}(\alpha) + \dots + n_1(\alpha), & k \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

при  $k \geq 1$ .

**Теорема 4.** *Существуют эффективно вычисляемые константы  $C_{ij}$ ,  $i, j \in \{0, 1\}$  такие, что*

$$(1) \quad Z_{i,j}(X) = C_{ij}X + O(\log X).$$

Более того,  $C_{00} = C_{11} = \frac{1+c_\alpha}{4}$  и  $C_{01} = C_{10} = \frac{1-c_\alpha}{4}$ , где

$$c_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{r_k} n_{k+1}(\alpha) \eta_k(\alpha_0),$$

где  $\alpha_0 = \min\{\alpha, 1 - \alpha\}$ .

*Доказательство.* Так как разложения Островского для  $\alpha$  и  $1 - \alpha$  отличаются наличием или отсутствием заключительного нуля, множества  $\mathcal{N}_i^{Ostr}$  для  $\alpha$  и  $1 - \alpha$  совпадают и теорему 4 достаточно доказать в случае  $\alpha \in (0; \frac{1}{2})$ . В этом случае  $\alpha_0 = \alpha$ .

Легко видеть, что

$$Z_{i,j}(X) = \sum_{n \leq X} \frac{(-1)^i \epsilon(n) + 1}{2} \frac{(-1)^j \epsilon(n+1) + 1}{2}.$$

С учетом теоремы 3, отсюда вытекает, что (1) эквивалентно асимптотике

$$(2) \quad S_2(X) = c_\alpha X + O(\log X),$$

где

$$S_2(X) = \sum_{k=0}^{X-1} \epsilon(k) \epsilon(k+1).$$

Докажем (2).

Пусть

$$U_k = \{(u_1, u_0) : 0 \leq u_0 < n_{k+1}, 0 \leq u_1 < n_{k+2}\}.$$

Для  $u = (u_1, u_0) \in U_k$  определим набор  $z_{k,u}$  следующим образом:

$$z_{k,u} = \begin{cases} (u_1, u_0, n_k, 0, n_{k-2}, 0, \dots, n_4, 0, n_2, 0), & k \equiv 0 \pmod{2} \\ (u_1, u_0, n_k, 0, n_{k-2}, 0, \dots, n_3, 0, n_1), & k \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}.$$

Введенные наборы  $z_{k,u}$  являются  $\alpha$ -допустимыми и обладают следующими свойствами:

1) Ни один из наборов  $z_{k,u}$  не заканчивается на другой набор.

2) Для любого натурального  $n$  набор  $z(\alpha, n)$  (или же набор, полученный из  $z(\alpha, n)$  дописыванием слева некоторого числа нулей) заканчивается на одно из слов вида  $z_{k,u}$ .

Таким образом, имеет место представление множества натуральных чисел в виде непересекающегося объединения

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{k \geq 0} \bigsqcup_{u \in U_k} \mathbb{N}(z_{k,u}).$$

Пусть  $n \in \mathbb{N}(z_{k,u})$ . Тогда легко видеть, что  $n+1 \in \mathbb{N}(z'_{k,u})$ , где  $z'_{k,u} = (u_1, u_0 + \underbrace{1, 0, \dots, 0}_k)$ . Элементы разложений  $z(\alpha, n)$  и  $z(\alpha, n+1)$ , стоящие перед  $u_1$  одинаковы для  $n$  и  $n+1$ . Отсюда получаем, что

$$\epsilon(n)\epsilon(n+1) = (-1)^{r_k}.$$

Следовательно,

$$S_2(X) = \sum_{k \geq 0} \sum_{u \in U_k} (-1)^{r_k} N_{z_{k,u}}(X).$$

Пусть  $l(\alpha, X) = \min\{k : Q_k > X\}$ . Индукцией по  $k$  легко показать, что для любого  $\alpha$   $Q_k \geq F_k$ . С учетом известной асимптотики для чисел Фибоначчи, получаем отсюда, что

$$(3) \quad l(\alpha, X) = O(\log X).$$

Положим  $l = l(\alpha, X)$  и заметим, что длины наборов  $z_{k,u}$ ,  $k \geq l$  больше, чем длина набора  $z(\alpha, N)$  и  $X$  не может попадать в соответствующие множества  $\mathbb{N}(z_{k,u})$ . Поэтому

$$S_2(X) = \sum_{k=1}^{l-1} \sum_{u \in U_k} (-1)^{r_k} N_{z_{k,u}}(X).$$

Тогда из следствия 1, с учетом оценки (3) следует, что

$$S_2(X) = \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{u \in U_k} (-1)^{r_k} \nu(z_{k,u})X + O(\log X).$$

Положим

$$c(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{u \in U_k} (-1)^{r_k} \nu(z_{k,u}).$$

Данный ряд сходится, так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{u \in U_k} \nu(z_{k,u}) = 1.$$

Пусть

$$\Sigma_k = \sum_{u \in U_k} \nu(z_{k,u}).$$

Тогда

$$\Sigma_k = \sum_{u_1=0}^{n_{k+2}-1} \sum_{u_0=0}^{n_{k+1}-1} \nu(z_{k,u}).$$

Меняя порядок суммирования, с учетом следствия 1 получаем (так как длина набора  $z_{k,u}$  равна  $k+2$ )

$$\Sigma_k = \sum_{u_0=0}^{n_{k+1}-1} (\eta_{k+2} + \eta_{k+1} + (n_{k+2} - 1)\eta_{k+1}) = n_{k+1}\eta_k.$$

Таким образом, формула для  $c(\alpha)$  совпадает с формулой из условия теоремы 4 и для завершения доказательства остается проверить, что

$$\delta(X) = |c_\alpha - \sum_{k=0}^{l-1} \Sigma_k|X = O(\log X).$$

Так как  $X < Q_l$ , имеем

$$\delta(X) < Q_l \left| \sum_{k=l}^{\infty} (-1)^{r_k} \Sigma_k \right| \leq Q_l \sum_{k=l}^{\infty} n_{k+1} \eta_k < Q_l \eta_{l-1} < 1,$$

что и требовалось.  $\square$

В качестве примера рассмотрим  $\alpha = \tau^{-1}$ , где  $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  – золотое сечение. В этом случае  $\alpha_0 = \tau^{-2}$ ,  $n_k = 1$  и  $\eta_k = \tau^{-k-2}$  для всех  $k \geq 0$ . Кроме того,  $r_{2l} = r_{2l-1} = l+1$ . Разбивая сумму для  $c_\alpha$  на две суммы (по четным  $k = 2l$ ,  $l \geq 0$  и нечетным  $k = 2l-1$ ,  $l \geq 1$  соответственно), находим

$$c_{\tau^{-1}} = \sum_{l \geq 0} (-1)^{l+1} \tau^{-2l-2} + \sum_{l \geq 1} (-1)^{l+1} \tau^{-2l-1}.$$

Каждая из двух полученных сумм есть сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем  $-\tau^{-2}$ . Так как  $\tau^{-2} < 1$ , получаем

$$c_{\tau^{-1}} = \frac{-\tau^{-2}}{1 + \tau^{-2}} + \frac{\tau^{-3}}{1 + \tau^{-2}} = \frac{2\sqrt{5} - 5}{5}.$$

Поэтому

$$C_{00} = C_{11} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

и

$$C_{01} = C_{10} = \frac{5 - \sqrt{5}}{10},$$

что совпадает с основным результатом из [3].

Заметим, что подобная техника позволяет вычислить константы  $C_{ij}$  в конечном виде для любой конкретной квадратичной иррациональности  $\alpha \in (0; 1)$ . Интересно было бы получить формулы выражающие  $C_{ij}$  в терминах разложения  $\alpha$  в цепную дробь, не содержащие бесконечных сумм и пригодные для произвольной квадратичной иррациональности.

## REFERENCES

- [1] K.M.Eminyan, *A binary problem*, Math. Notes, **60**:4 (1996), 478–481.
- [2] K.Mahler, *The Spectrum of an Array and its Application to the Study of the Translation Properties of a Simple Class of Arithmetical Functions: Part Two On the Translation Properties of a Simple Class of Arithmetical Functions*, J. Math. and Physics, **6** (1927), 158–163.
- [3] A.Shutov, *On the sum of digits of the Zeckendorf representations of two consecutive numbers*, Fibonacci Quarterly, **58**:3 (2020), 203–207.
- [4] E.Zeckendorf, *Representation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas*, Bull. Soc. R. Sci. Liege, **41** (1972), 179–182.
- [5] A.V.Shutov, *On one sum associated with Fibonacci numeration system*, Dal'nevost. Mat. Zh., **20**:2 (2020), 271–275.
- [6] A.Ostrowsky. *Bemerkungen zur Theorie der diophantischen Approximationen*, Hamb. Abh., **1** (1921), 77–98.
- [7] A.A.Zhukova, A.V.Shutov, *Geometrization of numeration systems*, Chebyshevskii Sb., **18**:4 (2017), 222–245.
- [8] A.Haynes, *Equivalence classes of codimension one cut-and-project nets // Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **36**:3 (2016), 816–831.
- [9] E.Hecke, *Über Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins*, Math.Sem.Hamburg Univ., **5** (1921), 54–76.
- [10] A.A.Zhukova, A.V.Shutov, *On Gelfond-type problem for generalized Zeckendorf representations*, Chebyshevskii Sb., **22**:2 (2021), 104–120.

ANTON VLADIMIROVICH SHUTOV  
Khabarovsk Division of the Institute for Applied Mathematics,  
Seryshev st., 60,  
680038, Khabarovsk, Russia  
Email address: a1981@mail.ru