S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 517.55
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 32A05, 32A15, 32A17, 32A60

О ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОРНЯХ СИСТЕМ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.М.КЫТМАНОВ, О.В.ХОДОС

Abstract. The article is devoted to finding the number of real roots of systems of transcendental equations. It is shown that the number is related to the number of real roots of the resultant of the system. An example for a system of equations arising in chemical kinetics is given.

Keywords: system of transcendental equations, real root.

Работа посвящена нахождению числа вещественных корней систем трансцендентных уравнений.

Нахождение числа вещественных корней многочленов является классической задачей алгебры. Ей посвящены метод Эрмита квадратичных форм, метод Штурма, правило знаков Декарта, теорема Бюдана–Фурье (смотри, например, [1]). Дальнейшее развитие этих методов для многочленов можно найти в работах [2] и [3]. Для целых функций вопрос о локализации вещественных корней рассматривался в классических работах Н.Г. Чеботарёва [4] (с. 28–56), а также в работе [5] (мы ссылаемся на собрание сочинений Н.Г. Чеботарёва, поскольку оригинальные его работы малодоступны).

Для систем алгебраических уравнений число вещественных корней можно найти, используя понятие результанта системы [6]. Результаты статьи [6] основаны на результатах работы [7].

В монографиях [8, 9] рассмотрены алгебраические и трансцендентные системы уравнений. Системы трансцендентных уравнений возникают, например, при изучении уравнений химической кинетики [10]. Одна из возникающих там

Kytmanov, A.M., Khodos, O.V. On real rootes of a systems of transcendental equations.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876).

Поступила 25 июля 2022 г., опубликована .

задач — это задача о числе вещественных положительных корней системы уравнений.

Рассмотрим систему уравнений вида

$$\text{(1)}\qquad \begin{cases} f_1(z) = 0, \\ \dots \\ f_n(z) = 0, \end{cases}$$

где $f_1(z), \dots, f_n(z)$ — целые функции от комплексных переменных $z = (z_1, \dots, z_n)$ в $\mathbb{C}^n$.

В дальнейшем будем предполагать, что множество корней системы (1) дискретно. Поэтому оно не более чем счетно. Обозначим через $\mathcal{E}$ множество корней с ненулевыми координатами $w_{(\nu)} = \big(w_{1(\nu)}, \dots, w_{n(\nu)}\big)$, $\nu = 1, 2, \dots$, занумерованных в порядке возрастания модулей: $\big|w_{(1)}\big| \leqslant \big|w_{(2)}\big| \leqslant \dots \leqslant \big|w_{(\nu)}\big| \leqslant \dots$.

Рассмотрим степенные суммы корней S_α, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — неотрицательный мультииндекс (все компоненты неотрицательны и целые) и $\alpha_1 + \dots + \alpha_n > 0$, вида

$$S_\alpha = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{w_{1(\nu)}^{\alpha_1} \cdot w_{2(\nu)}^{\alpha_2} \cdots w_{n(\nu)}^{\alpha_n}}.$$

Будем считать, что все ряды S_α абсолютно сходятся для любых мультииндексов α.

Понятие степенных сумм для трансцендентных систем уравнений было рассмотрено в работах [11]–[15]. Результаты этих статей были основаны на вычислении степенных сумм через так называемые вычетные интегралы [16].

Лемма 1. *Ряды S_α абсолютно сходятся для любых мультииндексов α тогда и только тогда, когда ряды*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{w_{1(\nu)}}, \quad \dots, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{w_{n(\nu)}}$$

абсолютно сходятся.

Доказательство. Действительно, ряд

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{w_{1(\nu)}^{\alpha_1} \cdot w_{2(\nu)}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot w_{n(\nu)}^{\alpha_n}}\right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\left|w_{1(\nu)}^{\alpha_1} \cdot w_{2(\nu)}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot w_{n(\nu)}^{\alpha_n}\right|} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\left|w_{1(\nu)}\right|}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\left|w_{2(\nu)}\right|}\right)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\left|w_{n(\nu)}\right|}\right)^{\alpha_n}$$

— сходится как произведение сходящихся рядов.

Очевидно, верно и обратное. □

Поэтому определена целая функция нулевого рода ([17], глава 7)

$$\text{(2)}\qquad R\left(z_1\right) = z_1^s \cdot \prod_{\eta=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z_1}{w_{1(\eta)}}\right),$$

где s — кратность нуля системы (1) в точке ноль, $s \geqslant 0$.

В формуле (2) бесконечное призведение абсолютно и равномерно сходится в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Функцию $R(z_1)$ будем называть *результантом* системы (1) по переменной z_1. Понятие результанта для систем трансцендентных уравнений не является общепринятым. Для случая двух уравнений оно было введено Н.Г. Чеботаревым [4] (с. 18–27). В последние годы это понятие было рассмотрено в работах [13], [14], [18], [19]. Результаты этих статей были основаны на вычислении степенных сумм через так называемые вычетные интегралы [16].

Введем функции $P_j^{(t)}(z_1)$

$$P_j^{(t)}(z_1) = -z_1^{s-1} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{w_{j(\nu)}^t} \cdot \prod_{\eta \neq \nu} \left(1 - \frac{z_1}{w_{1(\eta)}}\right), \quad t \geqslant 0, \quad s \geqslant 1. \tag{3}$$

Лемма 2. *Функции (3) являются целыми функциями от переменной z_1.*

Доказательство. Запишем $P_j^{(t)}(z_1)$ в виде:

$$P_j^{(t)}(z_1) = -z_1^{s-1} \cdot \prod_{\eta=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z_1}{w_{1(\eta)}}\right) \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{w_{j(\nu)}^t} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z_1}{w_{1(\nu)}}}.$$

Бесконечное произведение $\prod\limits_{\eta=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{z_1}{w_{1(\eta)}}\right)$ является целой функцией нулевого рода.

Докажем, что ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{w_{j(\nu)}^t} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z_1}{w_{1(\nu)}}}$$

абсолютно и равномерно сходится в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

По лемме 1 ряд $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{\left|w_{1(\nu)}\right|}$ сходится. Значит

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{\left|w_{1(\nu)}\right|} = 0.$$

И поэтому

$$\lim_{\nu \to \infty} \left(1 - \frac{z_1}{w_{1(\nu)}}\right) = 1.$$

Так как $1 - \dfrac{z_1}{w_{1(\nu)}}$ близко к единице, можно считать, что

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{w_{j(\nu)}^t} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z_1}{w_{1(\nu)}}} \right| \leqslant 2 \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\left|w_{j(\nu)}^t\right|}.$$

Откуда вытекает, что ряд $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{w_{j(\nu)}^t} \cdot \dfrac{1}{1 - \dfrac{z_1}{w_{1(\nu)}}}$ абсолютно и равномерно сходится в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Тем самым доказано, что функции $P_j^{(t)}(z_1)$ являются целыми функциями от переменной z_1. □

Теорема 1. *Пусть функция $R(z_1)$ имеет простые нули $w_{1(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \dots$. Тогда справедливо равенство*

$$\left.\frac{P_j^{(t)}(z_1)}{R'(z_1)}\right|_{z_1=w_{1(\mu)}} = \frac{1}{w_{j(\mu)}^t}.$$

Доказательство. Найдем производную по z_1 функции $R(z_1)$:

$$R'(z_1) = s \cdot z_1^{s-1} \cdot \prod_{\eta=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z_1}{w_{1(\eta)}}\right) - z_1^s \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{w_{1(\nu)}} \cdot \prod_{\eta\neq\nu}\left(1 - \frac{z_1}{w_{1(\eta)}}\right).$$

Первое слагаемое, вычисленное в точке $z_1 = w_{1(\mu)}$, равно 0, так как

$$\left.\prod_{\eta=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z_1}{w_{1(\eta)}}\right)\right|_{z_1=w_{1(\mu)}} = 0.$$

Вычислим второе слагаемое в точке $z_1 = w_{1(\mu)}$:

$$-w_{1(\mu)}^s \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{w_{1(\nu)}} \cdot \prod_{\eta\neq\nu}\left(1 - \frac{w_{1(\mu)}}{w_{1(\eta)}}\right) = -w_{1(\mu)}^s \cdot \frac{1}{w_{1(\mu)}} \cdot \prod_{\eta\neq\mu}\left(1 - \frac{w_{1(\mu)}}{w_{1(\eta)}}\right).$$

Таким образом,

$$\left.R'(z_1)\right|_{z_1=w_{1(\mu)}} = -w_{1(\mu)}^{s-1} \cdot \prod_{\eta\neq\mu}\left(1 - \frac{w_{1(\mu)}}{w_{1(\eta)}}\right).$$

Найдем значение $P_j^{(t)}(z_1)$ в точке $z_1 = w_{1(\mu)}$:

$$\begin{aligned} \left.P_j^{(t)}(z_1)\right|_{z_1=w_{1(\mu)}} &= -w_{1(\mu)}^{s-1} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{w_{j(\nu)}^t} \cdot \prod_{\eta\neq\nu}\left(1 - \frac{w_{1(\mu)}}{w_{1(\eta)}}\right) = \\ &= -w_{1(\mu)}^{s-1} \cdot \frac{1}{w_{j(\mu)}^t} \cdot \prod_{\eta\neq\nu}\left(1 - \frac{w_{1(\mu)}}{w_{1(\eta)}}\right). \end{aligned}$$

После подстановки найденных выражений в $\left.\dfrac{P_j^{(t)}(z_1)}{R'(z_1)}\right|_{z_1=w_{1(\mu)}}$ и сокращения получим утверждение теоремы. □

Таким образом мы получаем, что если известны первые координаты корней из $\mathcal{E}$, то для нахождения остальных координат корней не нужно находить результанты по другим переменным.

В качестве результанта системы (1) можно взять функцию вида

$$Q(z_1) = z_1^s \cdot e^{g(z_1)} \cdot \prod_{\eta=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z_1}{w_{1(\eta)}}\right). \tag{4}$$

где $g(z_1)$ — некоторая целая функция, s — кратность нуля системы (1) в нуле, $s \geqslant 0$.

Она имеет те же самые корни, что и результант $R(z_1)$.

Рассмотрим систему функций

$$V_j^{(t)}(z_1) = -z^{s-1} \cdot e^{g(z_1)} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{w_{j(\nu)}^t} \cdot \prod_{\eta \neq \nu} \left(1 - \frac{z_1}{w_{1(\eta)}}\right), \quad t \geqslant 1, \quad s \geqslant 1.$$

Следствие 1. *Пусть функция $Q(z_1)$ имеет простые нули $w_{1(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Тогда справедливо равенство*

$$\left.\frac{V_j^{(t)}(z_1)}{Q'(z_1)}\right|_{z_1 = w_{1(\mu)}} = \frac{1}{w_{j(\mu)}^t}.$$

Доказательство следствия 1 повторяет доказательство теоремы 1.

Запишем разложение в ряд Тейлора по переменной z_1 в окрестности нуля функции $P_j^{(t)}(z_1)$ и функции $R(z_1)$:

$$P_j^{(t)}(z_1) = -z_1^{s-1} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} a_{jm}^{(t)} \cdot z_1^m, \qquad a_{j0}^{(t)} = 1,$$

$$R(z_1) = z_1^s \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cdot z_1^m, \qquad b_0 = 1,$$

Теорема 2. *Если система (1) с вещественными коэффициентами такова, что все нули $R(z_1)$ простые кроме точки $z_1 = 0$, то число вещественных корней системы (1) в $\mathcal{E}$ совпадает с числом вещественных корней результанта $R(z_1)$.*

Доказательство. Если система (1) имеет вещественные коэффициенты, то все степенные суммы корней S_α — вещественные.

Действительно, пусть система (1) имеет вещественный корень w, то есть $f_j(w) = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда $\overline{f_j(w)} = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Так как система (1) имеет вещественные коэффициенты, то $f_j(\overline{w}) = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Следовательно, $\overline{w}$ тоже корень.То есть комплексные корни парные. А значит в степенной сумме S_α каждому невещественному (комплексному) слагаемому соответствует комплексно сопряженное слагаемое. И поэтому сумма этих чисел — вещественное число.

Докажем, что результант $R(z_1) = z_1^s \cdot \sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m \cdot z_1^m$ имеет вещественные коэффициенты, то есть что b_m — вещественные, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Для этого рассмотрим бесконечное произведение

$$\prod_{\eta=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z_1}{w_{1(\eta)}}\right) = 1 + z_1 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-1}{w_{1(j)}} + z_1^2 \cdot \sum_{j_1 < j_2} \frac{1}{w_{1(j_1)} \cdot w_{1(j_2)}} +$$

$$+ z_1^3 \cdot \sum_{j_1 < j_2 < j_3} \frac{-1}{w_{1(j_1)} \cdot w_{1(j_2)} \cdot w_{1(j_3)}} + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cdot z_1^m \cdot \sum_{j_1 < j_2 < \ldots < j_m} \frac{1}{w_{1(j_1)} \cdot w_{1(j_2)} \cdot \ldots \cdot w_{1(j_m)}}.$$

Коэффициенты при z_1^m равны:

$$(5)\qquad b_0 = 1,$$

$$(6)\qquad b_m = (-1)^m \cdot \sum_{j_1<j_2<\ldots<j_m} \frac{1}{w_{1(j_1)} \cdot w_{1(j_2)} \cdot \ldots \cdot w_{1(j_m)}}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Из вида (5) очевидно следует, что b_m являются симметрическими функциями чисел $\dfrac{1}{w_{1(1)}}$, $\dfrac{1}{w_{1(2)}}$, $\dfrac{1}{w_{1(3)}}$, ..., а значит b_m вещественные.

Представим $P_j^{(t)}(z_1)$ в более удобном виде.

Для этого рассмотрим вспомогательную систему функций

$$\varphi_j^{(t)}(\lambda) = -\lambda^{s-1} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{w_{j(\nu)}^t} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\lambda}{w_{1(\nu)}}} \cdot \prod_{\eta=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{w_{1(\eta)}}\right), \quad s \geqslant 1.$$

Или после сокращения:

$$\varphi_j^{(t)}(\lambda) = -\lambda^{s-1} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{w_{j(\nu)}^t} \cdot \prod_{\eta\neq\nu} \left(1 - \frac{\lambda}{w_{1(\eta)}}\right) = -\lambda^{s-1} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} a_{jm}^{(t)} \cdot \lambda^m, \qquad a_{j0}^{(t)} = 1.$$

Используя формулу геометрической прогрессии при достаточно малых $|\lambda|$:

$$\varphi_j^{(t)}(\lambda) = -\lambda^{s-1} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{w_{j(\nu)}^t} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{w_{1(\nu)}}\right)^m \cdot \prod_{\eta=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{w_{1(\eta)}}\right) =$$

$$= -\lambda^{s-1} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{w_{1(\nu)}^m \cdot w_{j(\nu)}^t}\right) \cdot \prod_{\eta=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{w_{1(\eta)}}\right) =$$

$$= -\lambda^{s-1} \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} S_{me_1+te_j} \cdot \lambda^m\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot \lambda^k\right) =$$

$$= -\lambda^{s-1} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^s \cdot \left(\sum_{m+k=l} S_{me_1+te_j} \cdot b_k\right),$$

где $S_{me_1+te_j} = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{w_{1(\nu)}^m \cdot w_{j(\nu)}^t}$ — степенные суммы для мультииндекса $me_1 + te_j = (m, 0, \ldots, 0, t, 0, \ldots, 0)$, первая компонента мультииндекса равна 1, j-ая компонента равна t, а остальные компоненты — нули.

Так как коэффициенты системы (1) вещественные, то и $\displaystyle\sum_{m+k=l}^{\infty} S_{m+k=l} \cdot b_k$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ вещественные.

Получили соотношения для вычисления $a_{jl}^{(t)}$:

$$a_{jl}^{(t)} = \sum_{m+k=l} S_{me_1+te_j} \cdot b_k,$$

где $l = 0, 1, 2, \ldots$, $b_0 = 1$, $s \geqslant 1$, $t \geqslant 0$, $m \geqslant 0$, $k \geqslant 0$. То есть коэффициенты $a_{jl}^{(t)}$ — вещественные.

Таким образом, если одна координата корня системы (1) вещественная, то все остальные координаты этого корня тоже вещественные. Откуда следует утверждение теоремы. □

Следствие 2. *Если система (1) с вещественными коэффициентами такова, что все нули $Q(z_1)$ (то есть $R(z_1)$) простые кроме точки $z_1 = 0$ и функция $g(z_1)$ из (4) имеет вещественные коэффициенты, то число вещественных корней системы (1) в $\mathcal{E}$ совпадает с числом вещественных корней функции $Q(z_1)$.*

Доказательство следствия 2 повторяет доказательство теоремы 2.

Рассмотрим модель Зельдовича–Семенова реактора идеального смешения [10] (глава 2, уравнение (2.2.1))

$$\begin{cases} (1-x)e^{\frac{y}{1+\beta y}} - \frac{x}{Da} = \frac{dx}{d\tau}, \\ (1-x)e^{\frac{y}{1+\beta y}} - \frac{y}{Se} = \gamma\frac{dy}{d\tau}, \end{cases}$$

где β, D, S, e — положительные параметры.

Обозначим $Da = a$, $Se = b$. Стационарные состояния системы удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} (1-x)e^{\frac{y}{1+\beta y}} - \frac{x}{a} = 0, \\ (1-x)e^{\frac{y}{1+\beta y}} - \frac{y}{b} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Система (7), очевидно, не имеет корней с нулевыми координатами.

Из системы (7) получаем $x = \dfrac{a}{b}\, y$.

Для решения системы (7) сделаем замену $t = \dfrac{y}{1+\beta y}$. Получим

$$\begin{cases} \left(\frac{t}{b(1-\beta t)} - \frac{1}{a}\right) e^t + \frac{t}{ab(1-\beta t)} = 0, \\ x = 1 - \frac{t}{b(1-\beta t)}\, e^{-t}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$(at - b(1-\beta t))\, e^t + t = 0. \tag{8}$$

Обозначим

$$\psi(t) = (at - b(1-\beta t))\, e^t + t.$$

Можно считать, что функция $\psi(t)$ является результантом по переменному t системы (7). Она является целой функцией первого порядка роста экспоненциального типа.

Покажем, что она не имеет кратных корней.

Рассмотрим производную

$$\psi' = (at - b(1-\beta t))\, e^t + 1 + e^t(a + b\beta) = 0,$$

Кратные корни функции $\psi(t)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \psi(t) = 0, \\ \psi'(t) = 0. \end{cases}$$

Из первого и второго уравнения системы получаем

$$-t + 1 + e^t(a + b\beta) = 0.$$

То есть

$$e^t = \frac{t-1}{a+b\beta}.$$

Подставляем в первое уравнение

$$t^2 + \frac{b}{a+\beta b}(1-t) = 0.$$

Несложные выкладки показывают, что при почти всех значениях параметров функции ψ и ψ' не имеют общих корней, поэтому функция $\psi(t)$ не имеет кратных корней при почти всех значениях параметров.

В работе [20] получены условия когда функция $\psi(t)$ имеет один или три вещественных корня. Следствие 2 тогда показывает, что при этих же условиях первоначальная система (7) имеет также один или три вещественных корня.

Кроме того, в работе [20] показано, что система (7) имеет бесконечно много комплексных корней.

References

[1] F.R.Gantmakher, *Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company, New York, N. Y. 1959.

[2] M.G.Krein, M.A.Naimark, *The Method of Symmetric and Hermitian Forms in the Theory of the Separation of the Roots of Algebraic Equation,* Linear Multilin. Algebra, 1981, **10**:4 (1981), 265–308.

[3] E.I.Jury, *Inners and stability of dynamic system*, Wiley, New York-London-Sydney-Toronto, 1974.

[4] N.G.Chebotarev, *Collected works*, Vol.2, Moscow–Leningrad, Academy of Sciences of the USSR, 1949.

[5] A.M.Kytmanov, O.V.Khodos, *On localization of the zeros of an entire function of finite order of growth*, Journal Complex Analysis and Operator Theory, **11**:2(2017), 393–416.

[6] A.M.Kytmanov, *On the number of real roots of systems of equations*, Soviet Math. (Iz. VUZ), 35:6 (1991), 19–22.

[7] L.A.Aizenberg, V..A.Bolotov, A.K.Tsikh, *On solving systems of nonlinear algebraic equations using multidimensional logarithmic residue. On solvability in radicals*, Doklady Academy of Sciences of the USSR, **252** (1980), 11-14.

[8] V.I.Bykov, A.M.Kytmanov, M.Z.Lazman, *Elimination Methods in Polynomial Computer Algebra,* Springer Science+Business Media Dordrecht Originally published by Kluwer Academic Publishers in 1998 Springer Science+Business Media Dordrecht. Originally published by Kluwer Academic Publishers in 1998, 237 pp.

[9] A.M.Kytmanov, *Algebraic and transcendental systems of equations*, Kranoyarsk, Siberian Federal University, 2019, 357 pp. (in Russian)

[10] V.I.Bykov, S.B.Tsybenova, *Nonlinear models of chemical kinetics*, Moscow, KRASAND, 2011. 400 pp. (in Russian)

[11] A.M.Kytmanov, E.K.Myshkina, *Evaluation of power sums of roots for systems of non-algebraic equations in* $\mathbb{C}^n$*,* Russian Math. (Iz. VUZ), **57**:12 (2013), 31–43.

[12] A.M.Kytmanov, E.K.Myshkina, *On calculation of power sums of roots for one class of systems of non-algebraic equations*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 190–209.

[13] A.M.Kytmanov, E.K.Myshkina, *Residue integrals and Waring formulas for algebraical and transcendental systems of equations*, Russian Math. (Iz. VUZ), 63:5 (2019), 36–50.

[14] A.A.Kytmanov, A.M.Kytmanov, E.K.Myshkina, *Residue Integrals and Waring's Formulas for Class of Systems of Transcendental Equations in* $\mathbb{C}^n$, Journal of Complex variables and Elliptic Equations, 2019. **64**:1 (2019), 93–111.

[15] V.R.Kulikov, V.A.Stepanenko, *On solutions and Waring's formulae for the system of* n *algebraic equations with* n *unknowns*, St. Petersburg Math. J., 26:5(2015), 839–848.

[16] M.Passare, A.Tsikh, *Residue integrals and their Melin transforms*, Can. J. Math., **47**:5 (1995), 515–529.

[17] A.I.Markushevich, *Theory of Functions of a Complex Variable*, Second Edition (AMS Chelsea Publishing), 2001, 1138 pp.

[18] A.M.Kytmanov, Ya.M.Naprienko, *One approach to finding the resultant of two entire function*, Complex variables and elliptic equations, **62**:2 (2017) 269–286.

[19] A.M.Kytmanov, O.V.Khodos, *An Approach to the Determination of the Resultant of Two Entire Functions*, Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), 2018, **62**:4 (2018) 42–51.

[20] O.V.Khodos, *On Some System of Non-algebraic Equation in* $\mathbb{C}^n$, Journal SFU. Mathematics and Physics, **7**:4 (2014), 455–465.

Allexander Mechislavovich Kytmanov
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
660041, Krasnoyarsk, Russia
E-mail address: akytmanov@sfu-kras.ru

Olga Veniaminovna Khodos
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
660041, Krasnoyarsk, Russia
E-mail address: khodos_olga@mail.ru