S©MR ISSN 1813–3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 519.174.7
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 05C50

ТЕСТОВЫЕ ФРАГМЕНТЫ СОВЕРШЕННЫХ РАСКРАСОК ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ

М.А. ЛИСИЦЫНА, С.В. АВГУСТИНОВИЧ

Abstract. Let $G = (V, E)$ be a transitive graph. A subset T of the vertex set $V(G)$ is a k-test fragment if for every perfect k-coloring ϕ of the graph G there exists a position of this fragment, whose partial coloring allows to reconstruct the whole ϕ.

The objects of this study are k-test fragments of infinite circulant graphs. An infinite circulant graph with distances $d_1 < d_2 < \ldots < d_n$ is a graph, whose set of vertices is the set of integers, and two vertices i and j are adjacent if $|i-j| \in \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$. If $d_i = i$ for all i from 1 to n, then the graph is called an infinite circulant graph with a continuous set of distances.

Upper bounds for the cardinalities of minimal k-test fragments of infinite circulant graphs with a continuous set of distances are obtained for any n and k. A rough estimate is also obtained in the general case – for infinite circulant graphs with distances $d_1, d_2, \ldots, d_n$ and an arbitrary finite k.

Keywords: perfect coloring, infinite circulant graph, k-test fragment.

1. Введение

Пусть $G = (V, E)$ – произвольный транзитивный граф (конечный или бесконечный). *Совершенной раскраской графа G с матрицей параметров $M = (m_{ij})$* называется такая раскраска его вершин, что для каждой вершины цвета i число смежных с ней вершин цвета j равняется m_{ij}. Для совершенной раскраски G в k цветов будем также использовать термин *совершенная k-раскраска.*

Lisitsyna, M.A., Avgustinovich, S.V., Test fragments of perfect colorings of circulant graphs.

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0017).

Поступила 6 января 2023 г., опубликована 31 августа 2023 г.

Фрагмент T — произвольное множество вершин графа G. *Длина* T равна его мощности. Минимальность фрагмента с тем или иным свойством будем рассматривать относительно его длины.

Фрагмент T графа G будем называть *строго k-тестовым*, если для любой совершенной k-раскраски ϕ этого графа сужение ϕ на T позволяет однозначно эту раскраску восстановить. Другими словами, сужение двух различных k-раскрасок на T различны. Для транзитивных графов определим понятие k-тестового фрагмента T следующим образом. Если для любой k-раскраски найдется автоморфизм π такой, что сужение раскраски на $\pi(T)$ позволяет эту раскраску однозначно восстановить, то этот фрагмент будем называть просто *k-тестовым*. Понятно, что строго k-тестовый фрагмент является k-тестовым, но обратное верно не всегда. Данное определение оказывается полезным при машинном переборе всех совершенных раскрасок заданного графа. Перебрав все k-раскраски k-тестового фрагмента небольшой длины мы каждую из них либо однозначно продолжим до совершенной раскраски графа, либо придем к противоречию (к невозможности совершенного продолжения). Таким образом, получим все совершенные k-раскраски графа с точностью до эквивалентности (для получения всех раскрасок достаточно к описанным применить вышеупомянутые автоморфизмы). Аналогично определяется *k-пестрый* фрагмент графа G. Это фрагмент T, который для любой совершенной k-раскраски ϕ может быть переведен в такое положение (с помощью автоморфизма графа G), в котором он содержит вершины всех k цветов раскраски ϕ.

В [1] было показано, что тестовым фрагментом совершенного кода с расстоянием 3 в гиперкубе E_n является множество вершин такого гиперкуба веса $\frac{(n+1)}{2}$. Аналогичный результат для центрированных функций (т.е. функций, сумма значений которых в любом шаре радиуса 1 не зависит от выбора шара) получен в [2]. В [3] рассматривается класс действительнозначных функций, определенных на всех двоичных наборах длины n. Для этого класса восстановление функции происходит не только по части своих значений, но и по коэффициентам Фурье в остальных точках.

Объектами данного исследования являются k-тестовые фрагменты бесконечных циркулянтных графов. *Бесконечный циркулянтный граф с дистанциями* $d_1 < d_2 < \ldots < d_n$ – это граф, множество вершин которого совпадает с множеством целых чисел, причем вершины i и j соединены ребром, если $|i-j| \in \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$. Обозначается такой граф через $C_\infty(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Граф $C_\infty(1, 2, \ldots, n)$ называется *бесконечным циркулянтным графом со сплошным набором дистанций* (см. рис. 1).

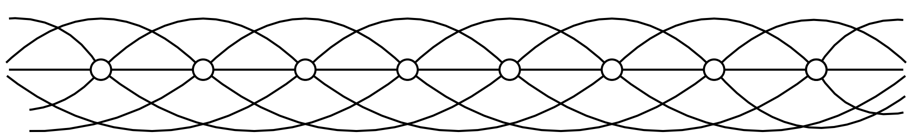

Рис. 1. Локальное строение графа $C_\infty(1, 2, 3)$

Ряд теорем для совершенных раскрасок циркулянтных графов в 2 цвета доказан Д. Б. Хорошиловой [4, 5]. Совершенные 2-раскраски графов $C_\infty(1, 2,$

$\ldots, n)$ и $C_\infty(1, 3, \ldots, 2n-1)$ охарактеризованы в [6] и [7]. Результаты для произвольного конечного числа цветов и графов $C_\infty = C_\infty(1)$ и $C_\infty(1, 2)$ получены в [8] и [9] соответственно. В [10] приведена бесконечная серия совершенных раскрасок графов $C_\infty(1, 2, \ldots, n)$ с периодами нового типа.

Везде в дальнейшем в качестве k-тестового и k-пестрого фрагментов графа $C_\infty(d_1, d_2, \ldots d_n)$ будем рассматривать целочисленные отрезки. Не ограничивая общности, считаем, что это отрезки вида $T = [1, N]$ для $N \in \mathbb{N}$. В леммах 1 и 2 доказаны свойства k-тестового и k-пестрого фрагментов бесконечного циркулянтного графа.

Лемма 1. *В любой совершенной k-раскраске графа $C_\infty(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ цвета вершин 1 и N минимального k-пестрого фрагмента $T = [1, N]$ различны и в фрагменте $T^{'} = [2, N-1]$ не встречаются.*

Доказательство. Докажем лемму 1 от противного. Не ограничивая общности, предположим, что в фрагменте $[2, N-1]$ есть вершина, соцветная с вершиной 1. Тогда фрагмент $T^{''} = [2, N]$ содержит вершины всех k цветов, т.е. является k-пестрым. Получаем противоречие с минимальностью T. □

Лемма 2. *Если $T = [1, N]$ – минимальный k-пестрый фрагмент графа $C_\infty(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, тогда фрагмент $T^{'} = [1-d_n, N+d_n]$ является его k-тестовым фрагментом.*

Доказательство. Зная раскраску фрагмента $T^{'}$ графа $C_\infty(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, можно или восстановить матрицу параметров M раскраски, или сразу сделать вывод о том, что такой совершенной раскраски не существует. В первом случае, продолжая окрашивать граф влево и вправо от $T^{'}$ согласно параметрам, либо однозначно восстановим совершенную раскраску в силу ее периодичности (доказана в [5]), либо получим противоречие (когда ее нет). □

Согласно лемме 2, для того чтобы получить верхнюю оценку на длину минимального k-тестового фрагмента бесконечного циркулянтного графа, достаточно оценить длину его минимального k-пестрого фрагмента.

2. Основные результаты

Для тестовых фрагментов бесконечных циркулянтных графов справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Длина минимального 2-тестового фрагмента графа $C_\infty(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ не превосходит $2d_n + 2$.*

Доказательство. Минимальный пестрый фрагмент совершенной 2-раскраски исследуемого графа состоит из двух соседних вершин, окрашенных цветами a и b. В силу леммы 2 длина минимального 2-тестового фрагмента для него не превосходит $2d_n + 2$ (см. рис. 2).

□

Из теоремы 1 следует, что длину минимального 2-тестового фрагмента бесконечного циркулянтного графа со сплошным набором n дистанций можно оценить сверху величиной $2n + 2$.

Теорема 2. *Длина минимального 3-тестового фрагмента графа $C_\infty(1, 2, \ldots, n)$ не превосходит $4n + 1$.*

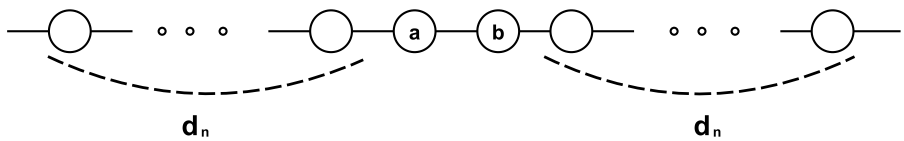

Рис. 2. 2-тестовый фрагмент графа $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$

Доказательство. Рассмотрим минимальный 3-пестрый фрагмент $[1, N]$ графа $C_\infty(1, 2, \dots, n)$. В силу леммы 1 положим, не ограничивая общности, что вершины с номерами 1 и N окрашены цветами a и b соответственно, а все вершины между ними — цветом c ($c \neq a, c \neq b$). Докажем, что длина фрагмента $[2, N-1]$ меньше $2n$. В противном случае, цветовые составы окружения вершин $n+1$ и $N-n$ цвета c не совпадают. Первая из них видит a, но не видит b, а вторая – видит b, но не видит a. Таким образом, длина минимального 3-тестового фрагмента графа $C_\infty(1, 2, \dots, n)$ не превосходит $4n+1$ согласно лемме 2 (см. рис. 3).

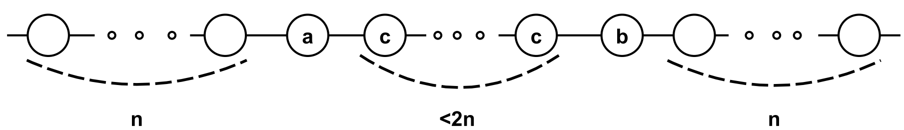

Рис. 3. 3-тестовый фрагмент графа $C_\infty(1, 2, \dots, n)$

□

Пусть $T = [1, N]$ – минимальный пестрый фрагмент бесконечного циркулянтного графа со сплошным набором n дистанций. Пусть длина T больше или равна $2n+1$. *Левыми* назовем вершины от 1 до $n+1$, *серединой* – от $n+2$ до $N-n-1$, а *правыми* – от $N-n$ до N. Цвета левых, средних и правых вершин фрагмента T будем также называть *левыми, средними* и *правыми.*

Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Если длина минимального k-пестрого фрагмента $T = [1, N]$ графа $C_\infty(1, 2, \dots, n)$ не меньше $2n+1$, то цвета вершин $n+1$ и $N-n$ различны в любой совершенной k-раскраске.*

Доказательство. Если $N \geq 2n+1$, то середина $T = [1, N]$ не пуста. Цвет вершины 1 обозначим через a, а вершины N — через b. Согласно лемме 1 цветами a и b в T окрашены только крайние вершины. Цвета вершин $n+1$ и $N-n$ различны, потому что в окружении первого из них есть цвет a, и нет b, а в окружении второго наоборот — есть цвет b, но нет a (см. рис. 4).

□

В следующей теореме получена верхняя оценка на длину минимального 4-тестового фрагмента циркулянтного графа со сплошным набором дистанций.

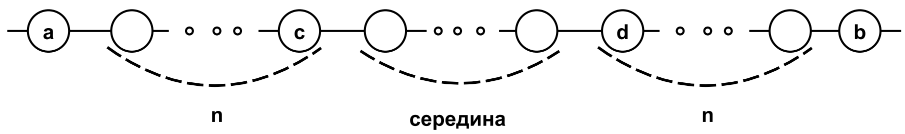

Рис. 4. Середина k-пестрого фрагмента графа $C_\infty(1, 2, \ldots, n)$

Теорема 3. *Длина минимального 4-тестового фрагмента графа* $C_\infty(1, 2, \ldots, n)$ *не превосходит* $4n + 2$.

Доказательство. Доказательство теоремы 3 начнем с того же, что и доказательство предыдущей теоремы. Рассмотрим минимальный 4-пестрый фрагмент $T = [1, N]$ графа $C_\infty(1, 2, \ldots, n)$, и положим, что вершины с номерами 1 и N окрашены цветами a и b соответственно.

Покажем, что $N < 2n+1$. Предположим противное: пусть $N \geq 2n+1$. Тогда у фрагмента T есть середина, и вершины $n+1$ и $N-n$ окрашены в c и d в силу лемм 1 и 3. В 1-окрестности середины нет вершин цветов a и b, значит, для раскраски ее вершин требуется пятый цвет. Получили противоречие. Значит, $N < 2n+1$, и длина 4-тестового фрагмента графа $C_\infty(1, 2, \ldots, n)$ не превосходит $4n + 2$. □

Перейдем к случаю $k > 4$. В силу леммы 2, для того чтобы найти верхнюю оценку длины минимального k-тестового фрагмента графа $C_\infty(1, 2, \ldots, n)$, достаточно оценить длину его минимального k-пестрого фрагмента $T = [1, N]$. Чтобы вычислить последнюю, рассмотрим два случая: $N \geq 3n+2$ и $N < 3n+2$.

Остановимся подробнее на первом случае. При таких N середина фрагмента T не пуста, более того, ее длина не меньше n. Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 4. *Пусть* $k > 4$. *Если длина минимального k-пестрого фрагмента* $T = [1, N]$ *графа* $C_\infty(1, 2, \ldots, n)$ *не меньше* $3n + 2$, *то множества левых, средних и правых цветов попарно не пересекаются ни в одной совершенной k-раскраске.*

Доказательство. Поскольку $N \geq 3n + 2 > 2n + 1$, вершины 1, N, $n + 1$ и $N - n$ можно покрасить различными цветами a, b, c и d соответственно (см. леммы 1 и 3). В окружении вершин середины нет цветов a и b, следовательно, множество средних цветов не пересекается ни с множеством левых цветов, ни с множеством правых.

Докажем теперь, что пересечение и этих множеств (левых и правых цветов) пусто. Пусть это не так, и цвет e является для них общим. Положим для определенности, что им окрашены некоторая левая вершина x и некоторая правая вершина y ($1 < x < n + 1$, $N - n < y < N$). В окружении x есть вершина цвета c, значит, и в окружении y должна быть вершина этого цвета. Фрагменту $[y - n, N - n - 1]$ она принадлежать не может, так как он является подмножеством середины. Другие элементы 1-окрестности y также не могут быть окрашены цветом c, так как они имеют в своем окружении вершину N цвета b. Противоречие. □

Для фиксированной совершенной раскраски и минимального k-пестрого фрагмента T *уникальными* будем называть цвета, которые встречаются в T ровно один раз.

Лемма 5. *Если длина минимального k-пестрого фрагмента $T = [1, N]$ графа $C_\infty(1, 2, \ldots, n)$ не меньше $3n + 2$, то каждый его средний цвет является уникальным в любой совершенной k-раскраске.*

Доказательство. Предположим противное: найдутся одинаково окрашенные вершины из середины – s и t. Рассмотрим такую пару с наименьшим s. Все соседи s слева окрашены либо левыми цветами, либо уникальными. Важно, что такие цвета точно не могут встречаться справа от нее. Цветовые составы 1-окрестностей вершин s и t должны совпадать в силу равенства их цветов, но это невозможно. Действительно, рассмотрим два случая. Если s видит хотя бы один левый цвет, то t видит меньшее число левых цветов в силу своего расположения и того факта, что справа от нее левых цветов быть не может. В случае же когда $s > 2n + 1$, вершина s видит цвет вершины $s - n$, который уникален и не виден вершине t. Подытожим: если минимальный k-пестрый фрагмент графа $C_\infty(1, 2, \ldots, n)$ имеет длину $N \geq 3n + 2$, то все его средние цвета уникальны. □

Сформулируем и докажем теорему о длине минимального k-тестового фрагмента бесконечного циркулянтного графа со сплошным набором дистанций для произвольного $k > 4$.

Теорема 4. *Длина минимального k-тестового фрагмента графа $C_\infty(1, 2, \ldots, n)$ не превосходит $\max\{4n + k - 2, 5n + 1\}$ для $k > 4$.*

Доказательство. Если $N < 3n + 2$, то по лемме 2 длина минимального k-тестового фрагмента исследуемого графа не превосходит $5n + 1$.

В противном случае, все вершины середины фрагмента T окрашены уникальными цветами согласно лемме 5. Отсюда следует, что длина середины не больше $k - 4$. Тогда длина минимального k-пестрого фрагмента не больше $2n + k - 2$.

Значит, длина минимального k-тестового фрагмента графа $C_\infty(1, 2, \ldots, n)$ не превосходит $\max\{4n + k - 2, 5n + 1\}$ для $k > 4$.

□

Следствие 1. *Если длина минимального k-пестрого фрагмента $T = [1, N]$ графа $C_\infty(1, 2, \ldots, n)$ не меньше $3n + 2$, то все его вершины окрашены уникально в любой совершенной k-раскраске.*

Доказательство. Итак, $N \geq 3n+2$. В силу леммы 4 множества левых, средних и правых цветов попарно не пересекаются. В лемме 5 доказана уникальность средних цветов для таких N. А цвет любой левой (правой) вершины уникален, так как однозначно определяется количеством средних вершин в ее окружении.

□

Чтобы получить оценку на длину k-тестового фрагмента графа $C_\infty(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ напомним некоторые определения и введем новые понятия.

Рассмотрим связный граф $G = (V, E)$. Эксцентриситетом вершины v называется величина $e(v)$ равная $\max\limits_{u \in V} d(u, v)$, где $d(u, v)$ – кратчайшее расстояние между вершинами u и v. Радиус графа $r(G)$ определяется как наименьший из эксцентриситетов его вершин. Множество вершин, удовлетворяющих свойству $e(v) = r(G)$, составляют центр графа G. Для связного графа G с n вершинами справедливо следующее соотношение:

$$r(G) \leq \left[\frac{n}{2}\right].$$

Доказательство этого факта можно найти, например, в [11].

Рассмотрим совершенную k-раскраску графа G с матрицей параметров M. *Характеристическим графом* $G_\chi(M)$ матрицы параметров M называется граф с множеством вершин $1, 2, \ldots, k$, вершины i и j соединены в $G_\chi(M)$ ребром, если $m_{ij} \neq 0$ и $m_{ji} \neq 0$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Длина минимального k-тестового фрагмента графа $C_\infty(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ не превосходит $d_n(k+2)+1$ для $k \geq 3$.*

Доказательство. Рассмотрим совершенную k-раскраску ϕ графа $C_\infty(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ с матрицей параметров M. Построим характеристический граф $G_\chi(M)$ матрицы параметров M. Так как в нем k вершин, то его радиус не превосходит $[\frac{k}{2}]$.

Выберем из центра графа $G_\chi(M)$ одну произвольную вершину. Пусть цвет, ей соответствующий – c. Расстояние от вершины цвета c до вершины любого другого цвета в раскраске ϕ графа $C_\infty(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ не превосходит $d_n \cdot [\frac{k}{2}]$. Значит, длина минимального k-пестрого фрагмента не превосходит величины $d_n k + 1$. Отсюда по лемме 2 следует, что длина k-тестового фрагмента графа $C_\infty(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ не превосходит $d_n(k+2)+1$ (см. рис. 5).

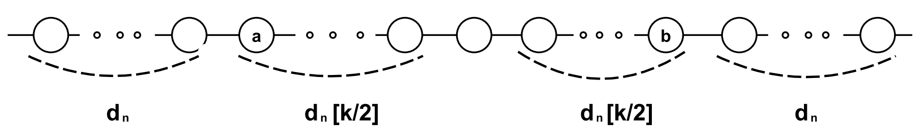

Рис. 5. K-тестовый фрагмент графа $C_\infty(d_1, d_2, \ldots, d_n)$

□

Таким образом, получены верхние оценки на длины минимальных k-тестовых фрагментов графов $C_\infty(1, 2, \ldots, n)$ и $C_\infty(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ для произвольных натуральных k и n.

3. Заключение

В работе получено несколько больше, чем анонсировалось. Найдены не только верхние оценки на длины минимальных k-тестовых фрагментов исследуемых циркулянтных графов, но и в значительной степени описана структура этих фрагментов. Понимание этой структуры позволяет существенно сократить перебор при отыскании всех совершенных k-раскрасок графов $C_\infty(1, 2, \ldots, n)$ и $C_\infty(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ с помощью компьютера.

References

[1] S. V. Avgustinovich, *On a property of perfect binary codes*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **2**:1 (1995), 4–6.

[2] S. V. Avgustinovich, A. Yu. Vasil'eva, *Computation of a centered function from its values on the middle layers of the Boolean cube*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1, **10**:2 (2003), 3–16.

[3] A. Yu. Vasil'eva, *On reconstructive sets of vertices in the Boolean cube*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **19**:1 (2012), 3–16.

[4] D. B. Khoroshilova, *On the parameters of perfect 2-colorings of circulant graphs*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **18**:6 (2011), 82–89.

[5] D. B. Khoroshilova, *On two-color perfect colorings of circular graphs*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **16**:1 (2009), 80–92.

[6] O. G. Parshina, *Perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of distances*, J. Appl. Industr. Math., **8**:3 (2014), 357–361.

[7] O. G. Parshina, M. A. Lisitsyna, The perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of odd distances, Sib. Electron. Math. Rep., **17** (2020), 590–603.

[8] M. A. Lisitsyna, S. V. Avgustinovich, *Perfect colorings of prism graph*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 1116–1128.

[9] M. A. Lisitsyna, O. G. Parshina, *Perfect colorings of the infinite circulant graph with distances 1 and 2*, J. Appl. Industr. Math., **11**:3 (2017), 381–388.

[10] V. D. Plaksina, P. A. Shcherbina, *New perfect colorings of infinite circulant graphs with continuous sets of distanses*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **18**:1 (2021), 530–533.

[11] V. G. Vizing, *On the number of edges in a graph with a given radius*, Doklady Akademii Nauk SSSR, **173**:6 (1967), 1245–1246.

Mariya Aleksandrovna Lisitsyna
Budyonny Military Academy of the Signal Corps,
pr. Tikhoretsky, 3,
194064, St Petersburg, Russia
Email address: `lisitsyna.mariya.mathematician@gmail.com`

Sergey Vladimirovich Avgustinovich
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: `avgust@math.nsc.ru`