

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

Том 16, стр. 144–144 (2019)  
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx

УДК 519.174.7  
MSC 05C50

ТЕСТОВЫЕ ФРАГМЕНТЫ СОВЕРШЕННЫХ РАСКРАСОК  
ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ

М.А. ЛИСИЦЫНА, С.В. АВГУСТИНОВИЧ

ABSTRACT. Let  $G = (V, E)$  be a transitive graph. A subset  $T$  of the vertex set  $V(G)$  is a  $k$ -test fragment if for every perfect  $k$ -coloring  $\phi$  of the graph  $G$  there exists a position of this fragment, whose partial coloring allows to reconstruct the whole  $\phi$ .

The objects of this study are  $k$ -test fragments of infinite circulant graphs. An infinite circulant graph with distances  $d_1 < d_2 < \dots < d_n$  is a graph, whose set of vertices is the set of integers, and two vertices are adjacent if they are on the distance  $d_1, d_2, \dots$  or  $d_n$ . If  $d_i = i$  for all  $i$  from 1 to  $n$ , then the graph is called an infinite circulant graph with a continuous set of distances.

Upper bounds for the cardinalities of minimal  $k$ -test fragments of infinite circulant graphs with a continuous set of distances are obtained for any  $n$  and  $k$ . A rough estimate is also obtained in the general case – for infinite circulant graphs with distances  $d_1, d_2, \dots, d_n$  and an arbitrary finite  $k$ .

**Keywords:** perfect coloring, infinite circulant graph,  $k$ -test fragment.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $G = (V, E)$  – произвольный транзитивный граф (конечный или бесконечный). *Совершенной раскраской графа  $G$  с матрицей параметров  $M = (m_{ij})$*  называется такая раскраска его вершин, что для каждой вершины цвета  $i$  число смежных с ней вершин цвета  $j$  равняется  $m_{ij}$ . Для совершенной раскраски  $G$  в  $k$  цветов будем также использовать термин *совершенная  $k$ -раскраска*.

---

LISITSYNA, M.A., AVGUSTINOVICH, S.V., TEST FRAGMENTS OF PERFECT COLORINGS OF CIRCULANT GRAPHS.

© 2022 Лисицына М.А., Августинович С.В..

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0017).

Поступила 6 января 2023 г., опубликована 31 августа 2023 г.

*Фрагмент*  $T$  — произвольное множество вершин графа  $G$ . *Длина*  $T$  равна его мощности. Минимальность фрагмента с тем или иным свойством будем рассматривать относительно его длины. Фрагмент  $T$  назовем  *$k$ -тестовым* для графа  $G$ , если для любой совершенной  $k$ -раскраски  $\phi$  графа, найдется такое положение фрагмента  $T^*$ , что сужение  $\phi$  на  $T^*$  позволяет эту раскраску однозначно восстановить. Таким образом, свойство фрагмента  $T$  быть  $k$ -тестовым, равносильно тому, что любой вариант раскраски  $T$  в  $k$  цветов либо продолжается единственным образом до совершенной раскраски  $G$ , либо приводит к противоречию.  *$K$ -пестрый* фрагмент определяется аналогично: это фрагмент  $T$ , раскраска которого (с точностью до сдвига) содержит вершины всех  $k$  цветов раскраски  $\phi$ . Для перечисления совершенных раскрасок  $G$  естественно использовать компьютерную программу, перебирающую все варианты раскраски  $k$ -тестового фрагмента. Поэтому найти форму и длину такого минимального фрагмента — содержательная и интересная задача.

В [1] было показано, что тестовым фрагментом совершенного кода с расстоянием 3 является множество вершин этого кода веса  $\frac{(n+1)}{2}$ . Аналогичный результат для центрированных функций (т.е. функций, сумма значений которых в любом шаре радиуса 1 не зависит от выбора шара) получен в [2]. Рассмотрим класс действительных функций, определенных на всех двоичных наборах длины  $n$ . В [3] охарактеризованы тестовые фрагменты таких функций, являющиеся линейными подпространствами.

Объектами данного исследования являются  $k$ -тестовые фрагменты бесконечных циркулянтных графов. *Бесконечный циркулянтный граф с дистанциями*  $d_1 < d_2 < \dots < d_n$  — это граф, множество вершин которого совпадает с множеством целых чисел, а рёбрами соединены вершины, находящиеся на расстоянии  $d \in \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ . Обозначается такой граф через  $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$ . Граф  $C_\infty(1, 2, \dots, n)$  называется *бесконечным циркулянтным графом со сплошным набором дистанций* (см. рис. 1).

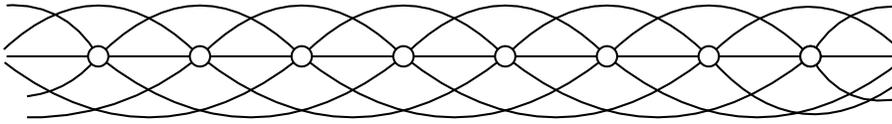


Рис. 1. Локальное строение графа  $C_\infty(1, 2, 3)$

Ряд теорем для совершенных раскрасок циркулянтных графов в 2 цвета доказан Д. Б. Хорошиловой [4, 5]. Совершенные 2-раскраски графов  $C_\infty(1, 2, \dots, n)$  и  $C_\infty(1, 3, \dots, 2n-1)$  охарактеризованы в [6] и [7]. Результаты для произвольного конечного числа цветов и графов  $C_\infty = C_\infty(1)$  и  $C_\infty(1, 2)$  получены в [8] и [9] соответственно. В [10] приведена бесконечная серия совершенных раскрасок графов  $C_\infty(1, 2, \dots, n)$  с новыми параметрами.

В качестве  $k$ -тестового и  $k$ -пестрого фрагментов графа  $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$  будем рассматривать целочисленные отрезки. Не ограничивая общности, считаем, что это отрезки вида  $T = [1, N]$  для  $N \in \mathbb{N}$ . В леммах 1 и 2 доказаны свойства  $k$ -тестового и  $k$ -пестрого фрагментов бесконечного циркулянтного графа.

**Лемма 1.** *Цвета вершин 1 и  $N$  минимального  $k$ -пестрого фрагмента  $T = [1, N]$  графа  $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$  различны и в фрагменте  $T' = [2, N - 1]$  не встречаются.*

*Доказательство.* Докажем лемму 1 от противного. Не ограничивая общности, предположим, что в фрагменте  $[2, N - 1]$  есть вершина, соцветная с вершиной 1. Тогда фрагмент  $T'' = [2, N]$  содержит вершины всех  $k$  цветов, т.е. является  $k$ -пестрым. Получаем противоречие с минимальностью  $T$ .  $\square$

**Лемма 2.** *Если  $T = [1, N]$  – минимальный  $k$ -пестрый фрагмент графа  $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$ , тогда фрагмент  $T' = [1 - d_n, N + d_n]$  является его  $k$ -тестовым фрагментом.*

*Доказательство.* Зная раскраску фрагмента  $T'$  графа  $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$ , можно или восстановить матрицу параметров  $M$  раскраски, или сразу сделать вывод о том, что такой совершенной раскраски не существует. В первом случае, продолжая окрашивать граф влево и вправо от  $T'$  согласно параметрам, либо однозначно восстановим совершенную раскраску в силу ее периодичности (доказана в [5]), либо получим противоречие (когда ее нет).  $\square$

Согласно лемме 2, для того чтобы получить верхнюю оценку на длину минимального  $k$ -тестового фрагмента бесконечного циркулянтного графа, достаточно оценить длину его минимального  $k$ -пестрого фрагмента.

## 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для тестовых фрагментов бесконечных циркулянтных графов справедливы следующие утверждения.

**Теорема 1.** *Длина минимального 2-тестового фрагмента графа  $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$  не превосходит  $2d_n + 2$ .*

*Доказательство.* Минимальный пестрый фрагмент совершенной 2-раскраски исследуемого графа состоит из двух соседних вершин, окрашенных цветами  $a$  и  $b$ . В силу леммы 2 длина минимального 2-тестового фрагмента для него не превосходит  $2d_n + 2$  (см. рис. 2).

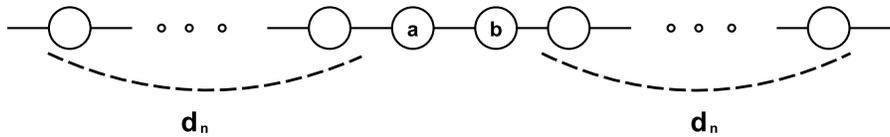


Рис. 2. 2-тестовый фрагмент графа  $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$

$\square$

Из теоремы 1 следует, что длину минимального 2-тестового фрагмента бесконечного циркулянтного графа со сплошным набором  $n$  дистанций можно оценить сверху величиной  $2n + 2$ .

**Теорема 2.** *Длина минимального 3-тестового фрагмента графа  $C_\infty(1, 2, \dots, n)$  не превосходит  $4n + 1$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим минимальный 3-пестрый фрагмент  $[1, N]$  графа  $C_\infty(1, 2, \dots, n)$ . В силу леммы 1 положим, не ограничивая общности, что вершины с номерами 1 и  $N$  окрашены цветами  $a$  и  $b$  соответственно, а все вершины между ними — цветом  $c$  ( $c \neq a, c \neq b$ ). Докажем, что длина фрагмента  $[2, N - 1]$  меньше  $2n$ . В противном случае, цветовые составы окружения вершин  $n + 1$  и  $N - n$  цвета  $c$  не совпадают. Первая из них видит  $a$ , но не видит  $b$ , а вторая — видит  $b$ , но не видит  $a$ . Таким образом, длина минимального 3-тестового фрагмента графа  $C_\infty(1, 2, \dots, n)$  не превосходит  $4n + 1$  согласно лемме 2 (см. рис. 3).

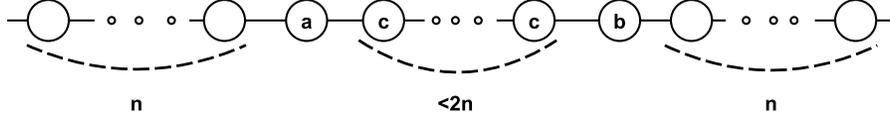


Рис. 3. 3-тестовый фрагмент графа  $C_\infty(1, 2, \dots, n)$

□

Пусть  $T = [1, N]$  — минимальный пестрый фрагмент бесконечного циркулянтного графа со сплошным набором  $n$  дистанций. Пусть длина  $T$  больше или равна  $2n + 1$ . *Левыми* назовем вершины от 1 до  $n + 1$ , *средней* — от  $n + 2$  до  $N - n - 1$ , а *правыми* — от  $N - n$  до  $N$ . Цвета левых, средних и правых вершин графа  $C_\infty(1, 2, \dots, n)$  будем также называть *левыми*, *средними* и *правыми*.

Докажем вспомогательное утверждение.

**Лемма 3.** *Если длина минимального  $k$ -пестрого фрагмента  $T = [1, N]$  графа  $C_\infty(1, 2, \dots, n)$  не меньше  $2n + 1$ , то цвета вершин  $n + 1$  и  $N - n$  различны.*

*Доказательство.* Если  $N \geq 2n + 1$ , то середина  $T = [1, N]$  не пуста. Цвет вершины 1 обозначим через  $a$ , а вершины  $N$  — через  $b$ . Согласно лемме 1 цветами  $a$  и  $b$  в  $T$  окрашены только крайние вершины. Цвета вершин  $n + 1$  и  $N - n$  различны, потому что в окружении первого из них есть цвет  $a$ , и нет  $b$ , а в окружении второго наоборот — есть цвет  $b$ , но нет  $a$  (см. рис. 4).



Рис. 4. Середина  $k$ -пестрого фрагмента графа  $C_\infty(1, 2, \dots, n)$

□

В следующей теореме получена верхняя оценка на длину минимального 4-тестового фрагмента циркулянтного графа со сплошным набором дистанций.

**Теорема 3.** *Длина минимального 4-тестового фрагмента графа  $C_\infty(1, 2, \dots, n)$  не превосходит  $4n + 2$ .*

*Доказательство.* Доказательство теоремы 3 начнем с того же, что и доказательство предыдущей теоремы. Рассмотрим минимальный 4-пестрый фрагмент  $T = [1, N]$  графа  $C_\infty(1, 2, \dots, n)$ , и положим, что вершины с номерами 1 и  $N$  окрашены цветами  $a$  и  $b$  соответственно.

Покажем, что  $N < 2n + 1$ . Предположим противное: пусть  $N \geq 2n + 1$ . Тогда у фрагмента  $T$  есть середина, и вершины  $n + 1$  и  $N - n$  окрашены в  $c$  и  $d$  в силу лемм 1 и 3. В 1-окрестности середины нет вершин цветов  $a$  и  $b$ , значит, для раскраски ее вершин требуется пятый цвет. Получили противоречие. Значит,  $N < 2n + 1$ , и длина 4-тестового фрагмента графа  $C_\infty(1, 2, \dots, n)$  не превосходит  $4n + 2$ .  $\square$

Перейдем к случаю  $k > 4$ . В силу леммы 2, для того чтобы найти верхнюю оценку длины минимального  $k$ -тестового фрагмента графа  $C_\infty(1, 2, \dots, n)$ , достаточно оценить длину его минимального  $k$ -пестрого фрагмента  $T = [1, N]$ . Чтобы вычислить последнюю, рассмотрим два случая:  $N \geq 3n + 2$  и  $N < 3n + 2$ .

Остановимся подробнее на первом случае. При таких  $N$  середина фрагмента  $T$  не пуста, более того, ее длина не меньше  $n$ . Докажем несколько вспомогательных утверждений.

**Лемма 4.** *Если длина минимального  $k$ -пестрого фрагмента  $T = [1, N]$  графа  $C_\infty(1, 2, \dots, n)$  не меньше  $3n + 2$ , то множества левых, средних и правых цветов попарно не пересекаются.*

*Доказательство.* Поскольку  $N \geq 3n + 2 > 2n + 1$ , вершины 1,  $N$ ,  $n + 1$  и  $N - n$  можно покрасить цветами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  соответственно (см. леммы 1 и 3). В окружении вершин середины нет цветов  $a$  и  $b$ , следовательно, множество средних цветов не пересекается ни с множеством левых цветов, ни с множеством правых.

Докажем теперь, что пересечение и этих множеств (левых и правых цветов) пусто. Пусть это не так, и цвет  $e$  является для них общим. Положим для определенности, что им окрашены некоторая левая вершина  $x$  и некоторая правая вершина  $y$  ( $1 < x < n + 1$ ,  $N - n < y < N$ ). В окружении  $x$  есть вершина цвета  $c$ , значит, и в окружении  $y$  должна быть вершина этого цвета. Фрагменту  $[y - n, N - n - 1]$  она принадлежать не может, так как он является подмножеством середины. Другие элементы 1-окрестности  $y$  также не могут быть окрашены цветом  $c$ , так как они имеют в своем окружении вершину  $N$  цвета  $b$ . Противоречие.  $\square$

Уникальными будем называть цвета, которые встречаются в  $T$  ровно один раз.

**Лемма 5.** *Если длина минимального  $k$ -пестрого фрагмента  $T = [1, N]$  графа  $C_\infty(1, 2, \dots, n)$  не меньше  $3n + 2$ , то каждый его средний цвет является уникальным.*

*Доказательство.* Предположим противное: найдутся одинаково окрашенные вершины из середины —  $s$  и  $t$ . Рассмотрим такую пару с наименьшим  $s$ . Все

соседи  $s$  слева окрашены либо левыми цветами, либо уникальными. Важно, что такие цвета точно не могут встречаться справа от нее. Цветовые составы 1-окрестностей вершин  $s$  и  $t$  должны совпадать в силу равенства их цветов, но это невозможно. Действительно, рассмотрим два случая. Если  $s$  видит хотя бы один левый цвет, то  $t$  видит меньшее число левых цветов в силу своего расположения и того факта, что справа от нее левых цветов быть не может. В случае же когда  $s > 2n + 1$ , вершина  $s$  видит цвет вершины  $s - n$ , который уникален и не виден вершине  $t$ . Подытожим: если минимальный  $k$ -пестрый фрагмент графа  $C_\infty(1, 2, \dots, n)$  имеет длину  $N \geq 3n + 2$ , то все его средние цвета уникальны.  $\square$

Сформулируем и докажем теорему о длине минимального  $k$ -тестового фрагмента бесконечного циркулянтного графа со сплошным набором дистанций для произвольного  $k > 4$ .

**Теорема 4.** *Длина минимального  $k$ -тестового фрагмента графа  $C_\infty(1, 2, \dots, n)$  не превосходит  $\max\{4n + k - 2, 5n + 2\}$  для  $k > 4$ .*

*Доказательство.* Если  $N < 3n + 2$ , то по лемме 2 длина минимального  $k$ -тестового фрагмента исследуемого графа не превосходит  $5n + 1$ .

В противном случае, все вершины середины фрагмента  $T$  окрашены уникальными цветами согласно лемме 5. Отсюда следует, что длина середины не больше  $k - 4$ . Тогда длина минимального  $k$ -пестрого фрагмента не больше  $2n + k - 2$ .

Значит, длина минимального  $k$ -тестового фрагмента графа  $C_\infty(1, 2, \dots, n)$  не превосходит  $\max\{4n + k - 2, 5n + 1\}$  для  $k > 4$ .  $\square$

**Следствие 1.** *Если длина минимального  $k$ -пестрого фрагмента  $T = [1, N]$  графа  $C_\infty(1, 2, \dots, n)$  не меньше  $3n + 2$ , то все его вершины окрашены уникально.*

*Доказательство.* Итак,  $N \geq 3n + 2$ . В силу леммы 4 множества левых, средних и правых цветов попарно не пересекаются. В лемме 5 доказана уникальность средних цветов для таких  $N$ . А цвет любой левой (правой) вершины уникален, так как однозначно определяется количеством средних вершин в ее окружении.  $\square$

Чтобы получить оценку на длину  $k$ -тестового фрагмента графа  $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$  напомним некоторые определения и введем новые понятия.

Рассмотрим совершенную  $k$ -раскраску связного графа  $G = (V, E)$  с матрицей параметров  $M$ . Эксцентриситетом вершины  $v$  называется величина  $e(v)$  равная  $\max_{u \in V} d(u, v)$ , где  $d(u, v)$  – кратчайшее расстояние между вершинами  $u$  и  $v$ . Радиус графа  $r(G)$  определяется как наименьший из эксцентриситетов его вершин. Множество вершин, удовлетворяющих свойству  $e(v) = r(G)$ , составляют центр графа  $G$ . Справедлива следующая лемма.

**Лемма 6.** *Радиус связного графа  $G = (V, E)$  с  $|V| = n$  не превосходит  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ .*

*Доказательство.* Построим  $S$  – остовное дерево графа  $G$ . Эксцентриситет всякой вершины  $v$  в  $S$  не меньше её эксцентриситета в  $G$ . Максимальный радиус  $r(S)$  соответствует случаю, когда  $S$  – простая цепь на  $n$  вершинах, и равен  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ . Откуда следует:  $r(G) \leq r(S) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ .  $\square$

*Характеристическим графом*  $G_\chi(M)$  матрицы параметров  $M$  называется граф с множеством вершин  $1, 2, \dots, k$ , вершины  $i$  и  $j$  соединены в  $G_\chi(M)$  ребром, если  $m_{ij} \neq 0$  и  $m_{ji} \neq 0$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.** *Длина минимального  $k$ -тестового фрагмента графа  $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$  не превосходит  $d_n(k + 2) + 1$  для  $k \geq 3$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим совершенную  $k$ -раскраску  $\phi$  графа  $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$  с матрицей параметров  $M$ . Построим характеристический граф  $G_\chi(M)$  матрицы параметров  $M$ . Так как в нем  $k$  вершин, то его радиус не превосходит  $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ .

Выберем из центра графа  $G_\chi(M)$  одну произвольную вершину. Пусть цвет, ей соответствующий –  $c$ . Расстояние от вершины цвета  $c$  до вершины любого другого цвета в раскраске  $\phi$  графа  $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$  не превосходит  $d_n \cdot \lceil \frac{k}{2} \rceil$  в силу леммы 6. Значит, длина ее минимального  $k$ -тестового фрагмента не превосходит величины  $d_n k + 1$ . Отсюда по лемме 2 следует, что длина  $k$ -тестового фрагмента графа  $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$  не превосходит  $d_n(k + 2) + 1$  (см. рис. 5).

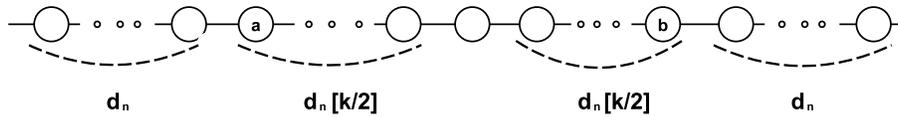


Рис. 5.  $k$ -тестовый фрагмент графа  $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$

□

Таким образом, получены верхние оценки на длины минимальных  $k$ -тестовых фрагментов графов  $C_\infty(1, 2, \dots, n)$  и  $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$  для произвольных натуральных  $k$  и  $n$ .

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получено несколько больше, чем анонсировалось. Найдены не только верхние оценки на длины минимальных  $k$ -тестовых фрагментов исследуемых циркулянтных графов, но и в значительной степени описана структура этих фрагментов. Понимание этой структуры позволяет существенно сократить перебор при отыскании всех совершенных  $k$ -раскрасок графов  $C_\infty(1, 2, \dots, n)$  и  $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$  с помощью компьютера.

### REFERENCES

- [1] S. V. Avgustinovich, *On a property of perfect binary codes*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **2**:1 (1995), 4–6.
- [2] S. V. Avgustinovich, A. Yu. Vasil'eva, *Computation of a centered function from its values on the middle layers of the Boolean cube*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1, **10**:2 (2003), 3–16.
- [3] A. Yu. Vasil'eva, *On reconstructive sets of vertices in the Boolean cube*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **19**:1 (2012), 3–16.
- [4] D. B. Khoroshilova, *On the parameters of perfect 2-colorings of circulant graphs*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **18**:6 (2011), 82–89.

- [5] D. B. Khoroshilova, *On two-color perfect colorings of circular graphs*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **16**:1 (2009), 80–92.
- [6] O. G. Parshina, *Perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of distances*, J. Appl. Industr. Math., **8**:3 (2014), 357–361.
- [7] O. G. Parshina, M. A. Lisitsyna, *The perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of odd distances*, Sib. Electron. Math. Rep., **17** (2020), 590–603.
- [8] M. A. Lisitsyna, S. V. Avgustinovich, *Perfect colorings of prism graph*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 1116–1128.
- [9] M. A. Lisitsyna, O. G. Parshina, *Perfect colorings of the infinite circulant graph with distances 1 and 2*, J. Appl. Industr. Math., **11**:3 (2017), 381–388.
- [10] V. D. Plaksina, P. A. Shcherbina, *New perfect colorings of infinite circulant graphs with continuous sets of distances*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **18**:1 (2021), 530–533.

MARIYA ALEKSANDROVNA LISITSYNA  
BUDYONNY MILITARY ACADEMY OF THE SIGNAL CORPS,  
PR. TIKHORETSKY, 3,  
194064, ST PETERSBURG, RUSSIA  
*Email address:* lisitsyna.mariya.mathematician@gmail.com

SERGEY VLADIMIROVICH AVGUSTINOVICH  
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,  
PR. KOPTYUGA, 4,  
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
*Email address:* avgust@math.nsc.ru