

О принципе умеренно больших уклонений для m -зависимых величин с сублинейным матожиданием

Е.В. Ефремов, А.В. Логачев

ABSTRACT. In this paper, we obtain the moderate deviation principle for sums of m -dependent strictly stationary random variables in the space with sublinear expectation. Unlike known results, we will require random variables to satisfy a less restrictive Cramer-like condition.

Keywords: large deviations principle, moderate deviations principle, sublinear expectation, m -dependent random variables, stationary sequences.

1 Введение

Начиная с 90-ых годов прошлого века интенсивно развивается теория случайных величин заданных на пространстве с сублинейным математическим ожиданием. Это развитие вызвано двумя основными факторами: с одной стороны, сублинейное математическое ожидание сохраняет большинство свойств обычного математического ожидания, что дает возможность перенести, с некоторыми изменениями, основные результаты классической теории вероятностей; с другой стороны, подход связанный с рассмотрением пространств с заданным сублинейным математическим ожиданием позволяет делать статистические выводы в условиях, когда мало информации о предполагаемом распределении рассматриваемого случайного элемента, что дает возможность применять эту теорию при решении прикладных задач.

Прежде чем давать строгие определения и вводить обозначения, сделаем краткий исторический обзор известных результатов. По видимому, первой работой в этой области является статья [2], в ней рассмотрен частный случай сублинейного математического ожидания, и приведены примеры приложений. В работе [7] были введены аналоги независимости случайных элементов, нормального распределения и броуновского движения (G -нормальное распределение и G -броуновское движение), в ней же был определен аналог стохастического интеграла Ито и рассмотрены стохастические дифференциальные уравнения (как обычные, так и обратные), а также приведены приложения разработанной теории, связанные с задачами финансовой математики и теорией принятия решений. В статье [8] распространены результаты работы [7] на многомерный случай. Отметим также работы [9], [10], в них получены аналоги законов больших чисел и центральной предельной теоремы для случайных величин заданных на пространстве с сублинейным математическим ожиданием, а также доказаны

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-282.

аналоги основных вероятностных неравенств. Подробное изложение современных результатов в области теории сублинейных математических ожиданий можно найти в монографии [6].

Перейдем теперь к результатам непосредственно связанным с принципами больших уклонений (п.б.у.). Отметим, что п.б.у. и его частный случай принцип умеренно больших уклонений (п.у.б.у.) являются одним из доступных инструментов для оценки вероятностей редких событий. П.б.у. чаще всего связан с грубой экспоненциальной асимптотикой вероятностей редких событий для последовательностей случайных элементов. Подробную информацию о п.б.у. и п.у.б.у. в области классической теории вероятностей можно найти в монографиях [3], [4] и [5]. Одним из первых результатов связанных с п.б.у. для случайных величин заданных в пространстве с сублинейным математическим ожиданием является работа [12], в ней была получена верхняя оценка в теореме Крамера. В статье [13] был получен п.б.у. для последовательностей независимых одинаково распределенных случайных величин заданных в пространстве с сублинейным математическим ожиданием. В работе [14] была получена верхняя оценка в п.б.у. для последовательностей независимых одинаково распределенных d -мерных случайных величин заданных на пространстве с сублинейным математическим ожиданием. В работе [15] был получен п.б.у. для последовательностей негативно зависимых случайных величин заданных на пространстве с сублинейным математическим ожиданием. Там же была получена верхняя оценка для п.у.б.у. В работе [16] был получен п.б.у. для последовательностей d -мерных случайных величин заданных в пространстве с сублинейным математическим ожиданием, при этом от случайных величин не требовалась независимость и одинаковая распределенность. Статьи [17], [18] посвящены п.б.у. для последовательностей решений стохастических дифференциальных уравнений, в которых стохастический интеграл построен по G -броуновскому движению. В работе [19] был получен п.у.б.у. для последовательностей слабо независимых случайных величин заданных в пространстве с сублинейным математическим ожиданием, при этом не требовалась одинаковая распределенность случайных величин. В статье [20] был получен принцип умеренно больших уклонений для строго стационарных последовательностей m -зависимых случайных величин заданных в пространстве с сублинейным математическим ожиданием.

Настоящая работа посвящена п.у.б.у. для строго стационарной последовательности m -зависимых случайных величин с более слабым моментным условием чем в работах [19] и [20]. Таким образом, мы обобщаем результаты полученные в работах [19] и [20]. Отметим, что в случае, когда случайные величины независимы и рассматриваются на обычном вероятностном пространстве результат работы напрямую следует из [1], (см. также главу 5 монографии [3]).

Перейдем теперь к необходимым нам понятиям и определениям. Пусть пара (Ω, \mathfrak{F}) — пространство элементарных событий и σ -алгебра его подмножеств, соответственно. Обозначим через \mathcal{H} линейное пространство вещественнозначных функций (случайных величин) определенных на Ω и измеримых относительно \mathfrak{F} , такое, что:

- 1) $c \in \mathcal{H}$ для любой константы $c \in \mathbb{R}$;
- 2) если $|X| \in \mathcal{H}$ и $|Y| \leq |X|$, то $Y \in \mathcal{H}$.

Дадим теперь определение сублинейного математического ожидания заданного на пространстве \mathcal{H} .

Определение 1. Сублинейным математическим ожиданием на \mathcal{H} будем называть функционал $\mathbb{E} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$, который для любых $X, Y \in \mathcal{H}$ удовлетворяет условиям:

- (i) монотонность: если $X \geq Y$, то $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$;
- (ii) сохранение константы: $\mathbb{E}[c] = c, \forall c \in \mathbb{R}$;

(iii) субаддитивность: $\mathbb{E}[X + Y] \leq \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$;

(iv) положительная однородность: $\mathbb{E}[\lambda X] = \lambda \mathbb{E}[X]$, $\forall \lambda \geq 0$.

Тройку $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ будем называть пространством случайных величин с заданным сублинейным математическим ожиданием.

Замечание 1 (Peng [6]). Из свойств (ii) и (iii) для любых $X, Y \in \mathcal{H}$ можно получить

(v) $\mathbb{E}[X + c] = \mathbb{E}[X] + c$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

(vi) $\mathbb{E}[X - Y] \geq \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]$.

Определение 2. Пусть \mathbf{X}_1 и \mathbf{X}_2 n -мерные случайные векторы определенные соответственно в пространствах случайных величин с заданным сублинейным математическим ожиданием $(\Omega_1, \mathcal{H}_1, \mathbb{E}_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{H}_2, \mathbb{E}_2)$. Будем говорить, что \mathbf{X}_1 и \mathbf{X}_2 одинаково распределены, и писать $\mathbf{X}_1 \stackrel{d}{=} \mathbf{X}_2$, если

$$\mathbb{E}_1[\varphi(\mathbf{X}_1)] = \mathbb{E}_2[\varphi(\mathbf{X}_2)]$$

для любой борелевской функции φ на \mathbb{R}^n такой, что $\varphi(\mathbf{X}_1) \in \mathcal{H}$ и $\varphi(\mathbf{X}_2) \in \mathcal{H}$.

Определение 3. Пусть $\{X_i\}_{i=1}^n$ набор случайных величин в пространстве случайных величин с заданным сублинейным математическим ожиданием $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$. Будем говорить, что X_n не зависит от X_1, \dots, X_{n-1} , если для любого набора неотрицательных борелевских функций φ_i на \mathbb{R} таких, что $\varphi_i(X_i) \in \mathcal{H}$, выполнено

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n \varphi_i(X_i) \right] = \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^{n-1} \varphi_i(X_i) \right] \mathbb{E}[\varphi_n(X_n)].$$

Определение 4. Последовательность $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ будем называть последовательностью m -зависимых случайных величин, если существует $m \geq 1$ такое, что для любого $n \geq 1$, любого $j \geq m + 1$ и любых неотрицательных борелевских функций φ_1 и φ_2 таких, что $\varphi_1(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{H}$ и $\varphi_2(X_{n+m+1}, \dots, X_{n+j}) \in \mathcal{H}$, выполнено

$$\mathbb{E}[\varphi_1(X_1, \dots, X_n) \varphi_2(X_{n+m+1}, \dots, X_{n+j})] = \mathbb{E}[\varphi_1(X_1, \dots, X_n)] \mathbb{E}[\varphi_2(X_{n+m+1}, \dots, X_{n+j})].$$

Определение 5. Последовательность случайных величин $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ в $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ будем называть строго стационарной, если для любых $n \geq 1$ и $k \geq 1$ и для любой борелевской функции φ на \mathbb{R}^n такой, что $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathcal{H}$ и $\varphi(X_{1+k}, X_{2+k}, \dots, X_{n+k}) \in \mathcal{H}$, выполнено

$$\mathbb{E}[\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)] = \mathbb{E}[\varphi(X_{1+k}, X_{2+k}, \dots, X_{n+k})].$$

Определение 6. Определим верхнюю вероятность \mathbb{V} следующим образом

$$\mathbb{V}(A) := \mathbb{E}[\mathbf{I}(A)], \quad A \in \mathfrak{F}.$$

Определение 7. Будем говорить, что последовательность случайных величин s_n в $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ удовлетворяет п.б.у. в \mathbb{R} с функционалом уклонений (ф.у.) I и нормирующей функцией (н.ф.) $\psi(n) : \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = \infty$, если для любого множества $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ выполнены неравенства

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbb{V}(s_n \in B) \leq - \inf_{y \in [B]} I(y), \quad (1)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbb{V}(s_n \in B) \geq - \inf_{y \in (B)} I(y), \quad (2)$$

где $[B]$ — замыкание множества B , а (B) его внутренность. Предполагается, что $I(\emptyset) = \infty$.

Определение 8. Будем говорить, что последовательность случайных величин s_n в $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ удовлетворяет п.у.б.у., если последовательность s_n удовлетворяет п.б.у., который имеет те же параметры, что и п.б.у. для последовательности независимых и одинаково распределенных гауссовских случайных величин с нулевым математическим ожиданием в классической теории вероятностей.

Рассмотрим строго стационарную последовательность m -зависимых случайных величин $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ в пространстве с сублинейным математическим ожиданием $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$. Будем предполагать, что

$$\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[-X_i] = 0, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n X_i \right]^2 = \sigma^2 < \infty. \quad (4)$$

Также мы будем требовать, чтобы было выполнено следующее моментное условие. Для некоторых $q > 0, \alpha \in (0, 1], M > 0$

$$\mathbb{E}[e^{q|X_1|^\alpha}] < M. \quad (5)$$

Зафиксируем положительную последовательность $x = x(n)$ такую, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(n)}{\sqrt{n}} = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2-\alpha}(n)}{n} = 0. \quad (6)$$

Обозначим

$$S_k := \sum_{i=1}^k X_i, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Следующая теорема является основным результатом работы.

Теорема 1 (п.у.б.у. для сумм m -зависимых с.в.). Пусть выполнены условия (3 – 6). Тогда последовательность с.в.

$$s_n = \frac{S_n}{x(n)}$$

удовлетворяет п.б.у. в \mathbb{R} с н.ф. $\psi(n) := \frac{x^2(n)}{n}$ и ф.у. $I(y) := \frac{y^2}{2\sigma^2}$, $y \in \mathbb{R}$

Приведем пример последовательности m -зависимых случайных величин, для которых верна теорема 1.

Пример. Пусть (Ω, \mathfrak{F}) некоторое фиксированное измеримое пространство, и пусть \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 вероятностные меры заданные на этом пространстве. Обозначим \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 соответствующие \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 математические ожидания. Обозначим \mathcal{H} линейное пространство всех измеримых относительно \mathfrak{F} вещественнозначных функций X определенных на Ω таких, что

$$\max_{i \in \{1,2\}} \mathbf{E}_i |X| < \infty.$$

Определим

$$\mathbb{E}[X] = \max_{i \in \{1,2\}} \mathbf{E}_i X,$$

для $X \in \mathcal{H}$. Тройка $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ является пространством случайных величин с заданным сублинейным математическим ожиданием.

Пусть $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ последовательность независимых случайных величин таких, что каждая случайная величина подпоследовательности $\{X_{2i+1}\}_{i=0}^\infty$ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью

$$f_X(x) = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{|x|}{\theta} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{|x|}{\theta}\right)^\beta}$$

на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}_1)$, где

$$\theta = \sqrt{\frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right)}},$$

и $\beta \in (0, 1]$, и распределение Радемахера (равновероятно принимает значения -1 и 1) на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}_2)$, а каждая случайная величина подпоследовательности $\{X_{2i}\}_{i=1}^\infty$ имеет распределение Радемахера на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}_1)$, и абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f_X(x)$ в $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}_2)$. Таким образом для всех случайных величин последовательности $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ выполнено $\mathbf{E}_1 X_i = \mathbf{E}_2 X_i = 0$ и $\mathbf{E}_1 X_i^2 = \mathbf{E}_2 X_i^2 = 1$.

Определим последовательность случайных величин Y_n на $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ следующим образом $Y_n = X_n + X_{n+1}$.

В силу замечания 1 имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_n] &= \mathbb{E}[X_n + X_{n+1}] \leq \mathbb{E}[X_n] + \mathbb{E}[X_{n+1}] = 0, \\ \mathbb{E}[Y_n] &= \mathbb{E}[X_n - (-X_{n+1})] \geq \mathbb{E}[X_n] - \mathbb{E}[-X_{n+1}] = 0, \end{aligned}$$

откуда имеем

$$\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[-Y_n] = 0,$$

для любого n .

В силу независимости $\{X_i\}_{i=1}^\infty$, для фиксированного n имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_j[Y_1 + \dots + Y_n]^2 &= \mathbf{E}_j[X_1 + 2X_2 + \dots + 2X_n + X_{n+1}]^2 \\ &= \mathbf{E}_j[X_1^2] + \mathbf{E}_j[X_{n+1}^2] + 4 \sum_{i=2}^n \mathbf{E}_j[X_i^2] = 2 + 4(n-1), \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

из чего следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n Y_i \right]^2 = 4.$$

Легко видеть что $\{Y_i\}_{i=1}^\infty$ является последовательностью m -зависимых случайных величин, где $m = 1$.

Пусть φ борелевская функция на \mathbb{R}^n такая, что $\varphi(Y_1, \dots, Y_n) \in \mathcal{H}$. Легко видеть, что для любого k

$$\max_{i \in \{1, 2\}} \mathbf{E}_i \varphi(Y_1, \dots, Y_n) = \max_{i \in \{1, 2\}} \mathbf{E}_i \varphi(Y_{1+k}, \dots, Y_{n+k}).$$

Таким образом имеет место строгая стационарность последовательности $\{Y_i\}_{i=1}^\infty$.

На вероятностных пространствах $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}_1)$ и $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}_2)$ каждая из случайных величин последовательности $\{Y_i\}_{i=1}^\infty$ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью

$$f_Y(x) = \frac{1}{2} \left(f_X(x-1) + f_X(x+1) \right),$$

в силу чего для любого $q > 0$ и $\alpha < \beta$ имеем

$$\mathbb{E}[e^{q|Y_n|^\alpha}] \leq C, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом теорема 1 применима к последовательности $\{Y_i\}_{i=1}^\infty$ с функционалом уклонений

$$I(y) = \frac{y^2}{8}.$$

Оставшаяся часть работы состоит из двух разделов 2 и 3. В разделе 2 доказана теорема 1, раздел 3 содержит формулировки и доказательства вспомогательных результатов.

2 Доказательство теоремы 1

В этом разделе мы докажем основной результат работы. Доказательство будем проводить в два шага: сначала докажем неравенство (1), затем докажем неравенство (2) (см. определение 7).

Шаг 1. Пусть F — замкнутое множество. Если $F = \emptyset$, то результат очевиден. Будем далее считать, что $F \neq \emptyset$. Обозначим

$$y_- := \sup\{y \in F : y < 0\} \leq 0, \quad y_+ := \inf\{y \in F : y \geq 0\} \geq 0.$$

Легко видеть, что $F \subseteq (-\infty, y_-] \cup [y_+, +\infty)$. Будем предполагать, что $y_- = -\infty$, если $F \cap (-\infty, 0] = \emptyset$ и $y_+ = +\infty$, если $F \cap [0, +\infty) = \emptyset$. Легко видеть, что если $F \neq \emptyset$, то по крайней мере одно из значений y_- или y_+ конечно. Имеем

$$\begin{aligned} \ln \mathbb{V}(s_n \in F) &= \ln \mathbb{E}[\mathbf{I}(s_n \in F)] \\ &\leq \ln \left(\mathbb{E}[\mathbf{I}(s_n \in (-\infty, y_-])] + \mathbb{E}[\mathbf{I}(s_n \in [y_+, +\infty))] \right) \\ &\leq \ln \left(2 \max \left(\mathbb{E}[\mathbf{I}(s_n \in (-\infty, y_-])], \mathbb{E}[\mathbf{I}(s_n \in [y_+, +\infty))] \right) \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Положим

$$A_n := \left\{ \omega : \max_{1 \leq i \leq n} |X_i| \leq x(n) \right\}.$$

Оценим сверху $\mathbb{E}[\mathbf{I}(s_n \in (-\infty, y_-])]$. Используя неравенство Чебышева (см. лемма 1, (ii)) с функцией $f(x) = x$ при $x > 0$, для любого $\lambda > 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{I}(s_n \in (-\infty, y_-])] &\leq \mathbb{E}[\mathbf{I}(s_n \in (-\infty, y_-])\mathbf{I}(A_n)] + \mathbb{E}[\mathbf{I}(\bar{A}_n)] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\mathbf{I} \left(-\lambda \frac{x(n)}{n} S_n \geq -\lambda \frac{x^2(n)}{n} y_- \right) \mathbf{I}(A_n) \right] + \mathbb{E}[\mathbf{I}(\bar{A}_n)] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbf{I} \left(e^{-\lambda \frac{x(n)}{n} S_n} \mathbf{I}(A_n) \geq e^{-\lambda \frac{x^2(n)}{n} y_-} \right) \mathbf{I}(A_n) \right] + \mathbb{E}[\mathbf{I}(\bar{A}_n)] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\mathbf{I} \left(e^{-\lambda \frac{x(n)}{n} S_n} \mathbf{I}(A_n) \geq e^{-\lambda \frac{x^2(n)}{n} y_-} \right) \right] + \mathbb{E}[\mathbf{I}(\bar{A}_n)] \\ &\leq \frac{\mathbb{E} \left[e^{-\lambda \frac{x(n)}{n} S_n} \mathbf{I}(A_n) \right]}{e^{-\lambda \frac{x^2(n)}{n} y_-}} + n \mathbb{E}[\mathbf{I}(|X_1| > x(n))]. \end{aligned}$$

Используя неравенство Чебышева (см. лемма 1, (ii)) с функцией $f(x) = e^{qx^\alpha}$ и моментное условие (5), получим

$$n\mathbb{E}[\mathbf{I}(|X_1| > x(n))] \leq n \frac{\mathbb{E}[e^{q|X_1|^\alpha}]}{e^{qx(n)^\alpha}} \leq Mne^{-qx(n)^\alpha}. \quad (8)$$

Утверждению леммы 3 эквивалентно равенство при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbb{E} \left[e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n} \mathbf{I}(A_n) \right] = e^{\frac{x^2(n)}{n} \left(\frac{\lambda^2}{2} \sigma^2 + o(1) \right)}. \quad (9)$$

Из (8) и (9) получаем

$$\mathbb{E}[\mathbf{I}(s_n \in (-\infty, y_-])] \leq e^{\frac{x^2(n)}{n} \left(\frac{\lambda^2}{2} \sigma^2 + \lambda y_- + o(1) \right)} + Mne^{-qx(n)^\alpha}.$$

Выбирая $\lambda = -\frac{y_-}{\sigma^2}$, получим

$$\mathbb{E}[\mathbf{I}(s_n \in (-\infty, y_-])] \leq e^{-\frac{x^2(n)}{n} \left(\frac{y_-^2}{2\sigma^2} + o(1) \right)} + Mne^{-qx(n)^\alpha}. \quad (10)$$

Похожим способом можно получить неравенство

$$\mathbb{E}[\mathbf{I}(s_n \in [y_+, +\infty))] \leq e^{-\frac{x^2(n)}{n} \left(\frac{y_+^2}{2\sigma^2} + o(1) \right)} + Mne^{-qx(n)^\alpha}. \quad (11)$$

Максимум правых частей неравенств (10) и (11) определяется минимумом из y_-^2 и y_+^2 . Предположим, что $y_-^2 \leq y_+^2$.

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \left(e^{-\frac{x^2(n)}{n} \left(\frac{y_-^2}{2\sigma^2} + o(1) \right)} + Mne^{-qx(n)^\alpha} \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \left(\left(e^{-\frac{x^2(n)}{n} \left(\frac{y_-^2}{2\sigma^2} + o(1) \right)} \right) \left(1 + e^{\ln(Mn) - qx(n)^\alpha + \frac{x^2(n)}{n} \left(\frac{y_-^2}{2\sigma^2} + o(1) \right)} \right) \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(- \left(\frac{y_-^2}{2\sigma^2} + o(1) \right) + \frac{n}{x^2(n)} \ln \left(1 + e^{\ln(Mn) - qx(n)^\alpha + \frac{x^2(n)}{n} \left(\frac{y_-^2}{2\sigma^2} + o(1) \right)} \right) \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(- \left(\frac{y_-^2}{2\sigma^2} + o(1) \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{n}{x^2(n)} \ln \left(1 + e^{-qx(n)^\alpha \left(1 - \frac{\ln(Mn)}{qx(n)^\alpha} - \frac{x^{2-\alpha}(n)}{qn} \left(\frac{y_-^2}{2\sigma^2} + o(1) \right) \right)} \right) \right) \\ &= -\frac{y_-^2}{2\sigma^2}. \end{aligned}$$

Аналогично при $y_+^2 \leq y_-^2$ получим

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \left(e^{-\frac{x^2(n)}{n} \left(\frac{y_+^2}{2\sigma^2} + o(1) \right)} + Mne^{-qx(n)^\alpha} \right) = -\frac{y_+^2}{2\sigma^2}.$$

Таким образом получаем

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln (\mathbb{V}(s_n \in F)) \leq - \min \left(\frac{y_-^2}{2\sigma^2}, \frac{y_+^2}{2\sigma^2} \right).$$

Осталось заметить, что

$$\inf_{y \in F} I(y) = \min(I(y_-), I(y_+)) = \min \left(\frac{y_-^2}{2\sigma^2}, \frac{y_+^2}{2\sigma^2} \right).$$

Шаг 2. Пусть теперь G открытое множество. Если $G = \emptyset$, то результат очевиден. Будем предполагать, что $G \neq \emptyset$. Легко видеть, что для любого $l \geq 0$ множество

$$K_l := \{y : I(y) \leq l\}$$

является компактом. Так как $G \neq \emptyset$, существует $l_G > 0$ такое, что $G \cap K_{l_G} \neq \emptyset$.

Так как G открытое множество и $\inf_{y \in G \cap K_{l_G}} I(y) = \inf_{y \in G} I(y)$, для любого $\varepsilon > 0$ существует $y \in G \cap K_{l_G}$ такое, что

$$\inf_{x \in G} I(x) \geq I(y) - \varepsilon. \quad (12)$$

Для $\delta > 0$ обозначим

$$y^{(\delta)} := (y - \delta, y + \delta).$$

Так как множество G открытое, то при достаточно малом δ будем иметь

$$\mathbb{V}(s_n \in G) \geq \mathbb{E} [\mathbf{I}(s_n \in G) \mathbf{I}(A_n)] \geq \mathbb{E} [\mathbf{I}(s_n \in y^{(\delta)}) \mathbf{I}(A_n)]. \quad (13)$$

Для $\lambda \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ введем обозначение

$$A(\lambda, n) := \ln \mathbb{E} \left[e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n} \mathbf{I}(A_n) \right].$$

Пользуясь определением $y^{(\delta)}$, получим следующее неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(s_n \in y^{(\delta)}) \mathbf{I}(A_n) e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n} &= \mathbf{I}(s_n \in y^{(\delta)}) \mathbf{I}(A_n) e^{\lambda \frac{x^2(n)}{n} s_n} \\ &\leq \mathbf{I}(s_n \in y^{(\delta)}) \mathbf{I}(A_n) e^{\frac{x^2(n)}{n} (\lambda y + |\lambda| \delta)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Используя замечание 1 и неравенство (14), для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\delta > 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} &\ln \mathbb{E} [\mathbf{I}(s_n \in y^{(\delta)}) \mathbf{I}(A_n)] \\ &\geq \ln \mathbb{E} \left[\mathbf{I}(s_n \in y^{(\delta)}) \mathbf{I}(A_n) e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n - A(\lambda, n)} e^{-\lambda \frac{x^2(n)}{n} y + A(\lambda, n)} e^{-|\lambda| \frac{x^2(n)}{n} \delta} \right] \\ &= -\lambda \frac{x^2(n)}{n} y + A(\lambda, n) - |\lambda| \frac{x^2(n)}{n} \delta \\ &\quad + \ln \mathbb{E} \left[(1 - \mathbf{I}(s_n \notin y^{(\delta)})) \mathbf{I}(A_n) e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n - A(\lambda, n)} \right] \\ &\geq -\lambda \frac{x^2(n)}{n} y + A(\lambda, n) - |\lambda| \frac{x^2(n)}{n} \delta \end{aligned}$$

$$+ \ln \left(1 - \mathbb{E} \left[\mathbf{I}(s_n \notin y^{(\delta)}) \mathbf{I}(A_n) e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n - A(\lambda, n)} \right] \right). \quad (15)$$

Для любого $r > 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\mathbf{I}(s_n \notin y^{(\delta)}) \mathbf{I}(A_n) e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n - A(\lambda, n)} \right] \\ & \leq \mathbb{E} \left[\mathbf{I}(s_n \geq y + \delta) \mathbf{I}(A_n) e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n - A(\lambda, n)} \right] + \mathbb{E} \left[\mathbf{I}(s_n \leq y - \delta) \mathbf{I}(A_n) e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n - A(\lambda, n)} \right] \\ & \leq \mathbb{E} \left[\frac{e^{\frac{rx^2(n)}{n\sigma^2}(s_n - (y + \delta))} \mathbf{I}(A_n) e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n}}{e^{A(\lambda, n)}} \right] + \mathbb{E} \left[\frac{e^{\frac{rx^2(n)}{n\sigma^2}((y - \delta) - s_n)} \mathbf{I}(A_n) e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n}}{e^{A(\lambda, n)}} \right] \\ & = \frac{\mathbb{E} \left[e^{\frac{rx(n)}{n\sigma^2} S_n} \mathbf{I}(A_n) e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n} \right]}{e^{\frac{rx^2(n)}{n\sigma^2}(y + \delta)} e^{A(\lambda, n)}} + \frac{\mathbb{E} \left[e^{-\frac{rx(n)}{n\sigma^2} S_n} \mathbf{I}(A_n) e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n} \right]}{e^{\frac{rx^2(n)}{n\sigma^2}(\delta - y)} e^{A(\lambda, n)}} \\ & = \frac{\mathbb{E} \left[e^{\left(\frac{r}{\sigma^2} + \lambda\right) \frac{x(n)}{n} S_n} \mathbf{I}(A_n) \right]}{e^{\frac{rx^2(n)}{n\sigma^2}(y + \delta)} e^{A(\lambda, n)}} + \frac{\mathbb{E} \left[e^{\left(\lambda - \frac{r}{\sigma^2}\right) \frac{x(n)}{n} S_n} \mathbf{I}(A_n) \right]}{e^{\frac{rx^2(n)}{n\sigma^2}(\delta - y)} e^{A(\lambda, n)}} \\ & = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Оценим сверху I_1 . Из (9) следует

$$I_1 \leq \frac{e^{\frac{x^2(n)}{n} \left(\frac{(r/\sigma^2 + \lambda)^2 \sigma^2 + o(1)}{2} \right)}}{e^{\frac{x^2(n)}{n} \left(\frac{r}{\sigma^2} (y + \delta) + \frac{\lambda^2 \sigma^2}{2} \right)}} = \exp \left\{ \frac{x^2(n)}{n} \left(\frac{r^2}{2\sigma^2} - \frac{r\delta}{\sigma^2} + r \left(\lambda - \frac{y}{\sigma^2} \right) + o(1) \right) \right\},$$

при $n \rightarrow \infty$. Если выбрать $r = \delta$, то

$$I_1 \leq \exp \left\{ \frac{x^2(n)}{n} \left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2} + \delta \left(\lambda - \frac{y}{\sigma^2} \right) + o(1) \right) \right\},$$

при $n \rightarrow \infty$. Так же получаем

$$I_2 \leq \exp \left\{ \frac{x^2(n)}{n} \left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2} + \delta \left(\frac{y}{\sigma^2} - \lambda \right) + o(1) \right) \right\},$$

при $n \rightarrow \infty$. Таким образом имеем

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\mathbf{I}(s_n \notin y^{(\delta)}) \mathbf{I}(A_n) e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n - A(\lambda, n)} \right] \\ & \leq 2 \exp \left\{ \frac{x^2(n)}{n} \left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2} + \delta \left| \frac{y}{\sigma^2} - \lambda \right| + o(1) \right) \right\}, \quad (16) \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$.

Выберем $\lambda = \frac{y}{\sigma^2}$. Таким образом во первых получим с помощью (9) следующее

$$\frac{n}{x^2(n)} A \left(\frac{y}{\sigma^2}, n \right) = \frac{n}{x^2(n)} \ln e^{\frac{x^2(n)}{n} \left(\frac{y^2}{2\sigma^2} + o(1) \right)} = \frac{y^2}{2\sigma^2} + o(1), \quad (17)$$

при $n \rightarrow \infty$. Во вторых

$$\mathbb{E} \left[\mathbf{I}(s_n \notin y^{(\delta)}) \mathbf{I}(A_n) e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n - A(\lambda, n)} \right] \leq 2 \exp \left\{ \frac{x^2(n)}{n} \left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2} + o(1) \right) \right\}, \quad (18)$$

при $n \rightarrow \infty$. Используя (15), (17) и (18), получим

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} [\mathbf{I}(s_n \in y^{(\delta)}) \mathbf{I}(A_n)] &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^2(n)} \left(-\frac{x^2(n)}{n\sigma^2} y^2 + A\left(\frac{y}{\sigma^2}, n\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{|y| x^2(n)}{\sigma^2 n} \delta + \ln \left(1 - 2e^{-\frac{x^2(n)}{n} \left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2} + o(1) \right)} \right) \right) \\ &= -\frac{y^2}{2\sigma^2} - \frac{|y|}{\sigma^2} \delta. \end{aligned}$$

То есть

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{V}(s_n \in G) \geq -\frac{y^2}{2\sigma^2} - \frac{|y|}{\sigma^2} \delta.$$

Так как левая часть неравенства не зависит от δ , устремив $\delta \rightarrow 0$, получаем

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{V}(s_n \in G) \geq -\frac{y^2}{2\sigma^2}.$$

Используя (12), запишем

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{V}(s_n \in G) \geq -\frac{y^2}{2\sigma^2} = -I(y) \geq -\inf_{x \in G} I(x) - \varepsilon.$$

Заметим что левая часть неравенства не зависит от ε . Предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$ завершает доказательство. \square

3 Вспомогательные результаты

В этом разделе будут сформулированы вспомогательные результаты (леммы 1-3). Леммы 1 и 2 доказаны в работах предшественников. Для леммы 3 будет приведено доказательство.

Лемма 1. Пусть $X, Y \in \mathcal{H}$. Тогда верны следующие утверждения

- (i) *Неравенство Гельдера:* Пусть $|XY| \in \mathcal{H}$, $|X|^p \in \mathcal{H}$ и $|Y|^q \in \mathcal{H}$. Пусть $p, q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq (\mathbb{E}[|X|^p])^{\frac{1}{p}} \cdot (\mathbb{E}[|Y|^q])^{\frac{1}{q}}.$$

Если $p = q = 2$, то имеет место неравенство Коши–Буняковского.

- (ii) *Неравенство Чебышева:* Пусть $f(x)$ неубывающая неотрицательная функция на \mathbb{R} и $f(X) \in \mathcal{H}$. Тогда для любого $x > 0$

$$\mathbb{V}(X \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}[f(X)]}{f(x)}.$$

Доказательство леммы 1 приведено в работе [10].

Лемма 2. Пусть X_1, \dots, X_n набор случайных величин заданных на $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ и $\zeta \in [0, 1]$, $1 \leq i \leq n$ такие числа, что $\sum_{i=1}^n \zeta_i = 1$. Тогда

$$\ln \mathbb{E} \left[e^{\sum_{i=1}^n \zeta_i X_i} \right] \leq \sum_{i=1}^n \zeta_i \ln \mathbb{E} [e^{X_i}].$$

Доказательство леммы 2 приведено в работе [11].

Лемма 3. Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n} \mathbf{I}(A_n) \right] = \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2}.$$

Доказательство. Зафиксируем $K \geq m + 1$, $n \geq K + m$. Обозначим $l = \lfloor \frac{n}{K+m} \rfloor$. Определим последовательности

$$\xi_t = \sum_{i=1}^K X_{t(K+m)+i}, \quad \eta_t = \sum_{i=1}^m X_{t(K+m)+K+i}, \quad t = 0, 1, \dots, l-1.$$

Из m -зависимости последовательности $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ следует независимость ξ_t от ξ_1, \dots, ξ_{t-1} , $1 \leq t \leq l-1$, и независимость η_t от $\eta_1, \dots, \eta_{t-1}$, $1 \leq t \leq l-1$.

По определению S_n можно представить следующим образом

$$S_n = \sum_{t=0}^{l-1} \xi_t + \sum_{t=0}^{l-1} \eta_t + \sum_{i=l(K+m)+1}^n X_i = I_1 + I_2 + I_3.$$

Дальнейшее доказательство леммы 3 основано на следующих трех утверждениях, которые мы формулируем и доказываем ниже.

Утверждение 1. Для любых фиксированных $y \in \mathbb{R}$, $K \geq m + 1$ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} I_1} \mathbf{I}(A_n) \right] = \frac{1}{K+m} \frac{y^2 \sigma_0^2}{2},$$

где $\sigma_0^2 = \mathbb{E}[\xi_0^2]$.

Доказательство утверждения 1. Положим

$$\Delta_t = \{i \in \mathbb{N} : 1 + t(K+m) \leq i \leq K + t(K+m)\},$$

$$\tilde{\Delta}_n = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\} \setminus \left(\bigcup_{t=1}^{l-1} \Delta_t \right),$$

$$B_t = \left\{ \omega : \max_{i \in \Delta_t} |X_i| \leq x(n) \right\},$$

$$C_n = \left\{ \omega : \max_{i \in \tilde{\Delta}_n} |X_i| \leq x(n) \right\}.$$

Используя тот факт, что ξ_t не зависит от ξ_1, \dots, ξ_{t-1} , $1 \leq t \leq l-1$, и строгую стационарность $\{X_i\}_{i=1}^\infty$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} I_1} \mathbf{I}(A_n) \right] &= \mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} I_1} \mathbf{I}(C_n) \prod_{t=1}^{l-1} \mathbf{I}(B_t) \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} I_1} \prod_{t=1}^{l-1} \mathbf{I}(B_t) \right] = \mathbb{E} \left[\prod_{t=1}^{l-1} e^{y \frac{x(n)}{n} \xi_t} \mathbf{I}(B_t) \right] \end{aligned}$$

$$= \prod_{t=1}^{l-1} \mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} \xi_t} \mathbf{I}(B_t) \right] = \left(\mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} \xi_0} \mathbf{I}(B_0) \right] \right)^l. \quad (19)$$

Используя дополнительно замечание 1, также получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} I_1} \mathbf{I}(A_n) \right] &= \mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} I_1} \mathbf{I}(C_n) \prod_{t=1}^{l-1} \mathbf{I}(B_t) \right] \\ &\geq \mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} I_1} \prod_{t=1}^{l-1} \mathbf{I}(B_t) \right] - \mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} I_1} \mathbf{I}(\overline{C}_n) \prod_{t=1}^{l-1} \mathbf{I}(B_t) \right] \\ &= \left(\mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} \xi_0} \mathbf{I}(B_0) \right] \right)^l - \mathbb{E} \left[\mathbf{I}(\overline{C}_n) \prod_{t=1}^{l-1} e^{y \frac{x(n)}{n} \xi_t} \mathbf{I}(B_t) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Покажем, что для любого $y \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} \xi_0} \mathbf{I}(B_0) \right] = \exp \left\{ \frac{x^2(n)}{n^2} \left(\frac{\sigma_0^2 y^2}{2} + o(1) \right) \right\}, \quad (21)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Оценим

$$\mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} \xi_0} \mathbf{I}(B_0) \right]$$

сверху. Используя разложение функции e^x в ряд Тейлора, получаем оценку

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} \xi_0} \mathbf{I}(B_0) \right] &= \mathbb{E} \left[\left(1 + y \frac{x(n)}{n} \xi_0 + y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \xi_0^2 + \sum_{r=3}^{+\infty} y^r \frac{x^r(n)}{r!n^r} \xi_0^r \right) \mathbf{I}(B_0) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbf{I}(B_0) + y \frac{x(n)}{n} \xi_0 - y \frac{x(n)}{n} \xi_0 \mathbf{I}(\overline{B}_0) + y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \xi_0^2 \mathbf{I}(B_0) + \sum_{r=3}^{+\infty} y^r \frac{x^r(n)}{r!n^r} \xi_0^r \mathbf{I}(B_0) \right] \\ &\leq 1 + \mathbb{E} \left[\left| y \frac{x(n)}{n} \right| \xi_0 \mathbf{I}(\overline{B}_0) \right] + \mathbb{E} \left[y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \xi_0^2 \mathbf{I}(B_0) \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\sum_{r=3}^{+\infty} \frac{|y \xi_0|^r x^r(n)}{r!n^r} \mathbf{I}(B_0) \right] \\ &= 1 + \mathbb{E}_1 + \mathbb{E} \left[y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \xi_0^2 \mathbf{I}(B_0) \right] + \mathbb{E}_2. \end{aligned}$$

Оценим \mathbb{E}_1 сверху. Сначала, воспользуемся неравенством Коши–Буняковского (см. лемма 1, (i)), получим

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| y \frac{x(n)}{n} \right| \xi_0 \mathbf{I}(\overline{B}_0) \right] &\leq \left(\mathbb{E} \left[y^2 \frac{x^2(n)}{n^2} \xi_0^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{V}(\overline{B}_0) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |y| \frac{x(n)}{n} (\sigma_0^2)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{V}(\overline{B}_0) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |y| \frac{x(n)}{n} (\sigma_0^2)^{\frac{1}{2}} \left(K \mathbb{V}(|X_1| > x(n)) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Продолжим оценку, воспользовавшись неравенством Чебышева (см. лемма 1, (ii)) с функцией $f(x) = e^{qx^\alpha}$, свойством (4) и моментным условием (5), получим

$$\begin{aligned} |y| \frac{x(n)}{n} (\sigma_0^2)^{\frac{1}{2}} \left(K \mathbb{V}(|X_1| > x(n)) \right)^{\frac{1}{2}} &\leq |y| \frac{x(n)}{n} (\sigma_0^2)^{\frac{1}{2}} \frac{K^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E} [e^{q|X_1|^\alpha}] \right)^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{q}{2}x^\alpha(n)}} \\ &\leq |y| \frac{x(n) K^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{n e^{\frac{q}{2}x^\alpha(n)}} (\sigma_0^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом получена оценка

$$\mathbb{E}_1 \leq |y| \frac{x(n) K^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{n e^{\frac{q}{2}x^\alpha(n)}} (\sigma_0^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (23)$$

Оценим \mathbb{E}_2 сверху.

$$\begin{aligned} \sum_{r=3}^{+\infty} \frac{|y \xi_0|^r x^r(n)}{r! n^r} \mathbf{I}(B_0) &\leq \frac{|y \xi_0|^3 x^3(n)}{3! n^3} \exp \left\{ \frac{|y \xi_0| x(n)}{n} \right\} \mathbf{I}(B_0) \\ &\leq \frac{|y|^3 (|X_1| + \dots + |X_K|)^3 x^3(n)}{3! n^3} \exp \left\{ \frac{x(n) |y| (|X_1| + \dots + |X_K|)}{n} \right\} \mathbf{I}(B_0) \\ &\leq \frac{|y|^3 K^3 \max_{1 \leq r \leq K} |X_r|^3 x^3(n)}{3! n^3} \exp \left\{ \frac{x(n) |y| K \max_{1 \leq r \leq K} |X_r|}{n} \right\} \mathbf{I}(B_0) \\ &\leq \sum_{r=1}^K \frac{|y|^3 K^3 |X_r|^3 x^3(n)}{3! n^3} \exp \left\{ \frac{x(n) |y| K |X_r|}{n} \right\} \mathbf{I}(B_0). \end{aligned}$$

Найдется $C > 0$ такое, что для всех $u > C$ выполнено

$$|u|^3 \leq e^{\frac{q}{2}|u|^\alpha}. \quad (24)$$

Пользуясь этим фактом, продолжим оценку.

$$\begin{aligned} \sum_{r=3}^{+\infty} \frac{|y \xi_0|^r x^r(n)}{r! n^r} \mathbf{I}(B_0) &\leq \sum_{r=1}^K \frac{|y|^3 K^3 C^3 x^3(n)}{3! n^3} \exp \left\{ \frac{q}{2} |X_r|^\alpha \right\} \exp \left\{ \frac{x(n) |y| K |X_r|}{n} \right\} \mathbf{I}(B_0) \\ &= \sum_{r=1}^K \frac{|y|^3 K^3 C^3 x^3(n)}{3! n^3} \exp \left\{ |X_r|^\alpha \left(\frac{q}{2} + \frac{x^{2-\alpha}(n) |y| K}{n} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Из условия (6) следует, что для достаточно больших n верно

$$\frac{q}{2} + \frac{x^{2-\alpha}(n) |y| K}{n} \leq q.$$

Используя этот факт, моментное условие (5) и строгую стационарность последовательности $\{X_i\}_{i=1}^\infty$, получим оценку

$$\mathbb{E}_2 \leq \frac{|y|^3 K^4 C^3 x^3(n)}{3! n^3} M. \quad (25)$$

Используя полученные оценки (23) и (25), получаем следующую оценку

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} \xi_0} \mathbf{I}(B_0) \right] &\leq 1 + |y| \frac{x(n) K^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{n e^{\frac{y}{2} x(n)}} (\sigma_0^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \mathbb{E} \left[y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \xi_0^2 \mathbf{I}(B_0) \right] + \frac{|y|^3 K^4 C^3 x^3(n)}{3! n^3} M \\ &\leq 1 + y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \sigma_0^2 + o\left(\frac{x^2(n)}{n^2}\right), \end{aligned} \quad (26)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Теперь получим оценку для

$$\mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} \xi_0} \mathbf{I}(B_0) \right]$$

снизу. Используя (25) и замечание 1, можно получить оценку

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} \xi_0} \mathbf{I}(B_0) \right] \\ &\geq \mathbb{E} \left[\left(1 + y \frac{x(n)}{n} \xi_0 + y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \xi_0^2 - \sum_{r=3}^{+\infty} \frac{|y \xi_0|^r x^r(n)}{r! n^r} \right) \mathbf{I}(B_0) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \xi_0^2 \mathbf{I}(B_0) - \left(-1 + y \frac{x(n)}{n} (-\xi_0) + \sum_{r=3}^{+\infty} \frac{|y \xi_0|^r x^r(n)}{r! n^r} \right) \mathbf{I}(B_0) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \xi_0^2 \mathbf{I}(B_0) \right. \\ &\quad \left. - \left(y \frac{x(n)}{n} (-\xi_0) \mathbf{I}(B_0) - 1 + \mathbf{I}(\bar{B}_0) + \sum_{r=3}^{+\infty} \frac{|y \xi_0|^r x^r(n)}{r! n^r} \mathbf{I}(B_0) \right) \right] \\ &\geq \mathbb{E} \left[y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \xi_0^2 \mathbf{I}(B_0) \right] \\ &\quad - \mathbb{E} \left[\left(y \frac{x(n)}{n} (-\xi_0) \mathbf{I}(B_0) + \mathbf{I}(\bar{B}_0) \right) + \left(\sum_{r=3}^{+\infty} \frac{|y \xi_0|^r x^r(n)}{r! n^r} \mathbf{I}(B_0) + (-1) \right) \right] \\ &\geq \mathbb{E} \left[y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \xi_0^2 \mathbf{I}(B_0) \right] \\ &\quad - \mathbb{E} \left[y \frac{x(n)}{n} (-\xi_0) \mathbf{I}(B_0) + \mathbf{I}(\bar{B}_0) \right] - \mathbb{E} \left[\sum_{r=3}^{+\infty} \frac{|y \xi_0|^r x^r(n)}{r! n^r} \mathbf{I}(B_0) \right] + 1 \\ &\geq \mathbb{E}_3 - \mathbb{E}_4 - \frac{|y|^3 K^4 C^3 x^3(n)}{3! n^3} M + 1. \end{aligned}$$

Оценим \mathbb{E}_3 снизу, используя замечание 1, моментное условие (5), неравенство Коши–Буняковского и неравенство Чебышева с функцией $f(x) = e^{qx}$ (см. лемма 1, (i) и (ii) соответственно).

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \xi_0^2 \mathbf{I}(B_0) \right] &\geq \mathbb{E} \left[y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \xi_0^2 \right] - \mathbb{E} \left[y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \xi_0^2 \mathbf{I}(\bar{B}_0) \right] \\ &\geq y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \sigma_0^2 - y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} (\mathbb{E}[\xi_0^4])^{\frac{1}{2}} (\mathbb{V}(\bar{B}_0))^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\geq y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \sigma_0^2 - y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} (\mathbb{E}[\xi_0^4])^{\frac{1}{2}} \left(\frac{K \mathbb{E}[e^{q|X_1|^\alpha}]}{e^{qx(n)^\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (27)$$

Теперь получим верхнюю оценку для \mathbb{E}_4 , воспользовавшись моментным условием (5), неравенством Коши–Буняковского и неравенством Чебышева с функцией $f(x) = e^{qx^\alpha}$ (см. лемма 1, (i) и (ii) соответственно).

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[y \frac{x(n)}{n} (-\xi_0) \mathbf{I}(B_0) + \mathbf{I}(\bar{B}_0) \right] &= \mathbb{E} \left[y \frac{x(n)}{n} (-\xi_0) + y \frac{x(n)}{n} \xi_0 \mathbf{I}(\bar{B}_0) + \mathbf{I}(\bar{B}_0) \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\left| y \frac{x(n)}{n} \right| \xi_0 \mathbf{I}(\bar{B}_0) \right] + \mathbb{V}(\bar{B}_0) \\ &\leq \left(\mathbb{E} \left[y^2 \frac{x^2(n)}{n^2} \xi_0^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{K \mathbb{E}[e^{q|X_1|^\alpha}]}{e^{qx(n)^\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{K \mathbb{E}[e^{q|X_1|^\alpha}]}{e^{qx(n)^\alpha}} \\ &= \left(y^2 \frac{x^2(n)}{n^2} K M \sigma_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{K M}{e^{qx(n)^\alpha}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Используя полученные оценки (27) и (28), запишем нижнюю оценку

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} \xi_0} \mathbf{I}(B_0) \right] &\geq y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \sigma_0^2 - y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} (\mathbb{E}[\xi_0^4])^{\frac{1}{2}} \left(\frac{K \mathbb{E}[e^{q|X_1|^\alpha}]}{e^{qx(n)^\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - \left(y^2 \frac{x^2(n)}{n^2} K M \sigma_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{K M}{e^{qx(n)^\alpha}} - \frac{|y|^3 K^4 C^3 x^3(n)}{3! n^3} M + 1 \\ &= 1 + y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \sigma_0^2 + o\left(\frac{x^2(n)}{n^2}\right), \end{aligned} \quad (29)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Используя неравенства (26) и (29), получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} \xi_0} \mathbf{I}(B_0) \right] &= 1 + y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \sigma_0^2 + o\left(\frac{x^2(n)}{n^2}\right) \\ &= \exp \left\{ \ln \left(1 + y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \sigma_0^2 + o\left(\frac{x^2(n)}{n^2}\right) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Используя тот факт, что $\ln(1+u) = u + o(u)$ при $u \rightarrow 0$, из (30) получаем

$$\mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} \xi_0} \mathbf{I}(B_0) \right] = \exp \left\{ \frac{x^2(n)}{n^2} \left(\frac{\sigma_0^2 y^2}{2} + o(1) \right) \right\},$$

при $n \rightarrow \infty$, что и требовалось.

Получим оценку сверху для

$$\mathbb{E} \left[\mathbf{I}(\bar{C}_n) \prod_{t=0}^{l-1} e^{y \frac{x(n)}{n} \xi_t} \mathbf{I}(B_t) \right].$$

Используя неравенство Коши–Буняковского (см. лемма 1, (i)), независимость ξ_t от ξ_1, \dots, ξ_{t-1} , $1 \leq t \leq l-1$, стационарность последовательности $\{X_i\}_{i=1}^\infty$, равенство (21) и тот факт, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l}{n} = \frac{1}{K+m}$, получаем при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\mathbf{I}(\bar{C}_n) \prod_{t=0}^{l-1} e^{y \frac{x(n)}{n} \xi_t} \mathbf{I}(B_t) \right] &\leq (\mathbb{E}[\mathbf{I}(\bar{C}_n)])^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E} \left[\prod_{t=0}^{l-1} e^{2y \frac{x(n)}{n} \xi_t} \mathbf{I}(B_t) \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{V}(|X_i| > x(n)) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E} \left[e^{2y \frac{x(n)}{n} \xi_0} \mathbf{I}(B_0) \right] \right)^{\frac{l}{2}} \\
&\leq (n \mathbb{V}(|X_1| > x(n)))^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ l \frac{x^2(n)}{n^2} (\sigma_0^2 y^2 + o(1)) \right\} \\
&\leq (n \mathbb{V}(|X_1| > x(n)))^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{x^2(n)}{n} \left(\frac{\sigma_0^2}{K+m} y^2 + o(1) \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Используя неравенство Чебышева с функцией $f(x) = e^{qx^\alpha(n)}$ (см. лемма 1, (ii)) и моментное условие (5), получаем

$$(n \mathbb{V}(|X_1| > x(n)))^{\frac{1}{2}} \leq n^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{q}{2} x^\alpha(n)}. \tag{32}$$

Комбинируя неравенства (31) и (32), получаем оценку

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\mathbf{I}(\bar{C}_n) \prod_{t=0}^{l-1} e^{y \frac{x(n)}{n} \xi_t} \mathbf{I}(B_t) \right] \\
\leq n^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{x^2(n)}{n} \left(\frac{\sigma_0^2}{K+m} y^2 + o(1) \right) - \frac{q}{2} x^\alpha(n) \right\}.
\end{aligned} \tag{33}$$

Используя неравенства (19), (21) и тот факт, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l}{n} = \frac{1}{K+m}$, получаем

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} I_1} \mathbf{I}(A_n) \right] &\leq \left(\mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} \xi_0} \mathbf{I}(B_0) \right] \right)^l \\
&= \exp \left\{ \frac{x^2(n)}{n^2} l \left(\frac{\sigma_0^2 y^2}{2} + o(1) \right) \right\} \\
&= \exp \left\{ \frac{x^2(n)}{n} \frac{1}{K+m} \left(\frac{\sigma_0^2 y^2}{2} + o(1) \right) \right\},
\end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. Из полученного неравенства получаем

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} I_1} \mathbf{I}(A_n) \right] \leq \frac{1}{K+m} \frac{\sigma_0^2 y^2}{2}. \tag{34}$$

Используя неравенства (20), (21) и (33), получаем

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} I_1} \mathbf{I}(A_n) \right] &\geq \exp \left\{ \frac{x^2(n)}{n} \frac{1}{K+m} \left(\frac{\sigma_0^2 y^2}{2} + o(1) \right) \right\} \\
&\quad - n^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{x^2(n)}{n} \left(\frac{\sigma_0^2}{K+m} y^2 + o(1) \right) - \frac{q}{2} x^\alpha(n) \right\}.
\end{aligned} \tag{35}$$

Из неравенства (35) имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} I_1} \mathbf{I}(A_n) \right] \geq \\
& \frac{n}{x^2(n)} \ln \left(e^{\frac{x^2(n)}{n} \frac{1}{K+m} \left(\frac{\sigma_0^2 y^2}{2} + o(1) \right)} - e^{\frac{\ln n M}{2} + \frac{x^2(n)}{n} \left(\frac{\sigma_0^2}{K+m} y^2 + o(1) \right) - \frac{q}{2} x^\alpha(n)} \right) \\
& = \frac{1}{K+m} \left(\frac{\sigma_0^2 y^2}{2} + o(1) \right) \\
& + \frac{n}{x^2(n)} \ln \left(1 - e^{\frac{\ln n M}{2} + \frac{x^2(n)}{n} \left(\frac{\sigma_0^2}{K+m} y^2 + o(1) \right) - \frac{x^2(n)}{n} \frac{1}{K+m} \left(\frac{\sigma_0^2 y^2}{2} + o(1) \right) - \frac{q}{2} x^\alpha(n)} \right) \\
& = \frac{1}{K+m} \left(\frac{\sigma_0^2 y^2}{2} + o(1) \right) \\
& + \frac{n}{x^2(n)} \ln \left(1 - e^{-x^\alpha(n) \left(-\frac{\ln n M}{2x^\alpha(n)} - \frac{x^{2-\alpha}}{n} \left(-\frac{\sigma_0^2}{K+m} y^2 + o(1) \right) + \frac{x^{2-\alpha}(n)}{n} \frac{1}{K+m} \left(\frac{\sigma_0^2 y^2}{2} + o(1) \right) + \frac{q}{2} \right)} \right),
\end{aligned}$$

из чего следует

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} I_1} \mathbf{I}(A_n) \right] \geq \frac{1}{K+m} \frac{\sigma_0^2 y^2}{2}. \quad (36)$$

Из неравенств (34) и (36) следует утверждение 1.

Утверждение 2. Для любых фиксированных $y \in \mathbb{R}$, $K \geq m+1$ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} I_2} \mathbf{I}(A_n) \right] \leq \frac{1}{K+m} \frac{y^2 \tilde{\sigma}_0^2}{2},$$

где $\tilde{\sigma}_0^2 = \mathbb{E}[\eta_0^2]$.

Доказательство утверждения 2. Доказательство полностью повторяет соответствующие выкладки из доказательства утверждения 1, поэтому мы его опускаем.

Утверждение 3. Для любых фиксированных $y \in \mathbb{R}$, $K \geq m+1$ справедливо равенство

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} I_3} \mathbf{I}(A_n) \right] \leq 0.$$

Доказательство утверждения 3. Пользуясь леммой 2 и строгой стационарностью $\{X_i\}_{i=1}^\infty$, запишем оценку

$$\frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} I_3} \mathbf{I}(A_n) \right]$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[\exp \left\{ |y| \frac{x(n)}{n} \sum_{i=l(K+m)+1}^n |X_i| \right\} \prod_{i=l(K+m)+1}^n \mathbf{I}(|X_i| \leq x(n)) \right] \\
&= \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[\exp \left\{ |y| \frac{x(n)}{n} \sum_{i=1}^{n-l(K+m)} |X_i| \right\} \prod_{i=1}^{n-l(K+m)} \mathbf{I}(|X_i| \leq x(n)) \right] \\
&\leq \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[\exp \left\{ |y| \frac{x(n)}{n} \sum_{i=1}^{n-l(K+m)} |X_i| \mathbf{I}(|X_i| \leq x(n)) \right\} \right] \\
&\leq \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[\exp \left\{ |y| \frac{x(n)}{n} (K+m) \sum_{i=1}^{K+m} \frac{|X_i| \mathbf{I}(|X_i| \leq x(n))}{K+m} \right\} \right] \\
&\leq \frac{n}{x^2(n)} \sum_{i=1}^{K+m} \left(\frac{1}{K+m} \ln \mathbb{E} \left[\exp \left\{ |y| \frac{x(n)}{n} (K+m) |X_i| \mathbf{I}(|X_i| \leq x(n)) \right\} \right] \right) \\
&= \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[\exp \left\{ |y| \frac{x(n)}{n} (K+m) |X_1| \mathbf{I}(|X_1| \leq x(n)) \right\} \right] \\
&= \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[\exp \left\{ |y| \frac{x(n)^{2-\alpha}}{n} (K+m) |X_1|^\alpha \mathbf{I}(|X_1| \leq x(n)) \right\} \right] \\
&\leq \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[\exp \left\{ |y| \frac{x(n)^{2-\alpha}}{n} (K+m) |X_1|^\alpha \right\} \right].
\end{aligned}$$

Так как, в силу условия (6), для достаточно больших n

$$|y| \frac{x(n)^{2-\alpha}}{n} (K+m) \leq q,$$

то, учитывая моментное условие (5), для достаточно больших n имеем

$$\frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} I_3} \mathbf{I}(A_n) \right] \leq \frac{n}{x^2(n)} \ln M,$$

из чего получаем

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{y \frac{x(n)}{n} I_3} \mathbf{I}(A_n) \right] \leq 0. \quad (37)$$

Утверждение 3 доказано.

Продолжим теперь доказательство леммы 3. Зафиксируем $p_1 > 1, p_2 > 1, q_1 > 1, q_2 > 1$ такие, что $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1, \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = 1$. Используя неравенством Гельдера (см. лемма 1, (i)) для любого фиксированного $\lambda \in \mathbb{R}$, получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n} \mathbf{I}(A_n) \right] \\
&\leq \frac{1}{q_1} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{\lambda q_1 \frac{x(n)}{n} I_3} \mathbf{I}(A_n) \right] + \frac{1}{p_1} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{\lambda p_1 \frac{x(n)}{n} (I_1 + I_2)} \mathbf{I}(A_n) \right] \\
&\leq \frac{1}{q_1} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{\lambda q_1 \frac{x(n)}{n} I_3} \mathbf{I}(A_n) \right] + \frac{1}{p_1 p_2} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{\lambda p_1 p_2 \frac{x(n)}{n} I_1} \mathbf{I}(A_n) \right] \\
&\quad + \frac{1}{p_1 q_2} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{\lambda p_1 q_2 \frac{x(n)}{n} I_2} \mathbf{I}(A_n) \right]. \quad (38)
\end{aligned}$$

Используя утверждения 1–3 и неравенство (38), получаем

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n} \mathbf{I}(A_n) \right] &\leq p_1 p_2 \frac{1}{K+m} \frac{\sigma_0^2 \lambda^2}{2} + \frac{p_1 q_2}{K+m} \frac{\tilde{\sigma}_0^2 \lambda^2}{2} \\ &= p_1 p_2 \frac{K}{K+m} \frac{\lambda^2}{2} \frac{1}{K} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^K X_i \right]^2 + \frac{p_1 q_2}{K+m} \frac{\lambda^2}{2} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^m X_i \right]^2. \end{aligned}$$

Так как левая часть неравенства не зависит от K , то устремив $K \rightarrow \infty$, получаем

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n} \mathbf{I}(A_n) \right] \leq p_1 p_2 \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2}.$$

Так как левая часть полученного неравенства не зависит от p_1 , p_1 , q_1 и q_2 , то устремив $p_1 \rightarrow 1$ и $p_2 \rightarrow 1$, получим

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n} \mathbf{I}(A_n) \right] \leq \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2}. \quad (39)$$

Теперь получим оценку для

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n} \mathbf{I}(A_n) \right]$$

снизу. Пользуясь неравенством Гельдера (см. лемма 1, (i)), имеем

$$\begin{aligned} \ln \mathbb{E} \left[e^{\lambda \frac{x(n)}{p_1 p_2^n} I_1} \mathbf{I}(A_n) \right] &= \ln \mathbb{E} \left[e^{\lambda \frac{x(n)}{p_1 p_2^n} (I_1 + I_2 - I_2)} \mathbf{I}(A_n) \right] \\ &\leq \frac{1}{p_1} \ln \mathbb{E} \left[e^{\lambda \frac{x(n)}{p_2^n} (I_1 + I_2)} \mathbf{I}(A_n) \right] + \frac{1}{q_1} \ln \mathbb{E} \left[e^{-\lambda \frac{q_1 x(n)}{p_1 p_2^n} I_2} \mathbf{I}(A_n) \right] \\ &\leq \frac{1}{p_1} \ln \mathbb{E} \left[e^{\lambda \frac{x(n)}{p_2^n} (I_1 + I_2 + I_3 - I_3)} \mathbf{I}(A_n) \right] + \frac{1}{q_1} \ln \mathbb{E} \left[e^{-\lambda \frac{q_1 x(n)}{p_1 p_2^n} I_2} \mathbf{I}(A_n) \right] \\ &\leq \frac{1}{p_1 p_2} \ln \mathbb{E} \left[e^{\lambda \frac{x(n)}{p_2^n} (I_1 + I_2 + I_3)} \mathbf{I}(A_n) \right] + \frac{1}{p_1 q_2} \ln \mathbb{E} \left[e^{-\lambda \frac{q_2 x(n)}{p_2^n} I_3} \mathbf{I}(A_n) \right] \\ &\quad + \frac{1}{q_1} \ln \mathbb{E} \left[e^{-\lambda \frac{q_1 x(n)}{p_1 p_2^n} I_2} \mathbf{I}(A_n) \right]. \end{aligned}$$

Пользуясь полученным, можно записать

$$\begin{aligned} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n} \mathbf{I}(A_n) \right] &\geq -\frac{p_2}{q_2} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{-\lambda \frac{q_2 x(n)}{p_2^n} I_3} \mathbf{I}(A_n) \right] \\ &\quad + p_1 p_2 \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{\lambda \frac{x(n)}{p_1 p_2^n} I_1} \mathbf{I}(A_n) \right] - \frac{p_1 p_2}{q_1} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{-\lambda \frac{q_1 x(n)}{p_1 p_2^n} I_2} \mathbf{I}(A_n) \right]. \quad (40) \end{aligned}$$

Используя утверждения 1–3 и неравенство (40), можно записать

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n} \mathbf{I}(A_n) \right] &\geq \frac{1}{p_1 p_2} \frac{K}{K+m} \frac{\lambda^2}{2} \frac{1}{K} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^K X_i \right]^2 - \frac{q_1}{p_1 p_2} \frac{1}{K+m} \frac{\lambda^2}{2} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^m X_i \right]^2. \end{aligned}$$

Так как левая часть неравенства не зависит от K , то устремив $K \rightarrow \infty$, получаем

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n \mathbf{I}(A_n)} \right] \geq \frac{1}{p_1 p_2} \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2}.$$

Так как левая часть полученного неравенства не зависит от p_1 , p_1 , q_1 и q_2 , то устремив $p_1 \rightarrow 1$ и $p_2 \rightarrow 1$, получим

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n \mathbf{I}(A_n)} \right] \geq \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2}. \quad (41)$$

Комбинируя (39) и (41), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E} \left[e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n \mathbf{I}(A_n)} \right] = \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2}.$$

□

Список литературы

- [1] Боровков А. А., Могульский А. А. Принципы умеренно больших уклонений для траектории случайных блужданий и процессов с независимыми приращениями // Теория вероятн. и ее примен. 2013. том 58. выпуск 4. С. 648–671
- [2] Лебедев А. А., Лебедев В. А. Обобщение математического ожидания для единого описания случайных и неопределенных факторов // Теория вероятн. и ее примен. 1993. том 38. выпуск 3. С. 529–539
- [3] Боровков А. А., Асимптотический анализ случайных блужданий: М. Физматлит, 2013.
- [4] Deuschel J.-D., Stroock D.W. Large deviations: Academic Press, 1989.
- [5] Dembo A., Zeitouni O. Large deviations techniques and applications. 2nd ed.: Springer, 1998.
- [6] Peng S. Nonlinear expectations and stochastic calculus under uncertainty: Springer, 2019. 212 p.
- [7] Peng S. G-Expectation, G-Brownian motion and related stochastic calculus of Ito's type // Stoch. Anal. Appl. 2006. v. 2 P. 541–567.
- [8] Peng S. Multi-dimensional G-Brownian motion and related stochastic calculus under G-expectation // Stoch. Process. Their Appl. 2008 v. 118 P. 2223–2253.
- [9] Peng S. Law of large numbers and central limit theorem under nonlinear expectations // Probab. Uncertain. Quant. Risk. 2019. v. 4(4)
- [10] Chen Z., Wu P., Li B. A strong law of large numbers for non-additive probabilities // Int. J. Approx. Reasoning. 2013. v. 54(3) P. 365–377.
- [11] Liu W., Zhang Y. Large deviation principle for linear processes generated by real stationary sequences under the sub-linear expectation // Commun. Stat.-Theor. M. 2021.

- [12] Hu F. On Cramér's theorem for capacities // *Comptes Rendus Mathématique*. 2010. v. 348. P. 1009–1013.
- [13] Gao F., Xu M., Large deviations and moderate deviations for independent random variables under sublinear expectations // *Scientia Sinica*. 2011. v. 41(4). P. 337–352.
- [14] Cao X., An upper bound of large deviations for capacities // *Math. Probl. Eng.* 2014
- [15] Chen Z. J., Feng Z. W., Large deviation for negatively dependent random variables under sublinear expectation, *Commun. Stat.-Theor. M.*, 2016. v. 45(2) P. 400-412.
- [16] Tan Y. Z., Zong G. F., Large deviation principle for random variables under sublinear expectations on \mathbb{R}^d // *Math. Anal. Appl.* 2020. v. 488.
- [17] Chen. Z, Xiong J., Large deviation principle for diffusion processes under a sublinear expectation // *Sci. China Math* v. 55. P. 2205–2216.
- [18] Gao F., Jiang H., Large deviations for stochastic differential equations driven by G-Brownian motion // *Stochastic Processes Appl.* v. 120. P. 2212–2240.
- [19] Zhou Q. Q., Logachov A. V. Moderate deviations principle for independent random variables under sublinear expectations // *Sib. Elektron. Math. Rep.* 2021. v. 18. P. 817–826.
- [20] Guo S., Yong Z. Moderate deviation principle for m-dependent random variables under the sub-linear expectation // *AIMS Mathematics*. 2022. v. 7(4). P. 5943–5956.