Принцип умеренно больших уклонений для m–зависимых случайных величин заданных на пространстве с сублинейным математическим ожиданием при широких моментных условиях

Е.В. Ефремов, А.В. Логачев

Abstract. In this paper, we obtain the moderate deviation principle for sums of m–dependent strictly stationary random variables in the space with sublinear expectation. Unlike known results, we will require random variables to satisfy a less restrictive Cramer–like condition.

Keywords: large deviations principle, moderate deviations principle, sublinear expectation, m–dependent random variables, stationary sequences.

1 Введение

Начиная с 90–ых годов прошлого века интенсивно развивается теория случайных величин заданных на пространстве с сублинейным математическим ожиданием. Это развитие вызвано двумя основными факторами: с одной стороны, сублинейное математическое ожидание сохраняет большинство свойств обычного математического ожидания, что дает возможность перенести, с некоторыми изменениями, основные результаты классической теории вероятностей; с другой стороны, подход связанный с рассмотрением пространств с заданным сублинейным математическим ожиданием позволяет делать статистические выводы в условиях, когда мало информации о предполагаемом распределении рассматриваемого случайного элемента, что дает возможность применять эту теорию при решении прикладных задач.

Прежде чем давать строгие определения и вводить обозначения, сделаем краткий исторический обзор известных результатов. По видимому, первой работай в этой области является статья [2], в ней рассмотрен частный случай сублинейного математического ожидания, и приведены примеры приложений. В работе [7] были введены аналоги независимости случайных элементов, нормального распределения и броуновского движения (G–нормальное распределение и G–броуновское движение), в ней же был определен аналог стохастического интеграла Ито и рассмотрены стохастические дифференциальные уравнения (как обычные, так и обратные), а также приведены приложения разработанной теории, связанные с задачами финансовой математики и теорией принятия решений. В статье [8] распространены результаты работы [7] на многомерный случай. Отметим также работы [9], [10], в них получены аналоги законов больших чисел и центральной предельной теоремы для случайных величин заданных на пространстве с сублинейным математическим ожиданием, а также доказаны аналоги основных вероятностных неравенств. Подробное изложение современных результатов в области теории сублинейных математических ожиданий можно найти в монографии [6].

Перейдем теперь к результатам непосредственно связанным с принципами больших уклонений (п.б.у.). Отметим, что п.б.у. и его частный случай принцип умеренно больших уклонений (п.у.б.у.) являются одним из доступных инструментов для оценки вероятностей редких событий. П.б.у. чаще всего связан с грубой экспоненциальной асимптотикой вероятностей редких событий для последовательностей случайных элементов. Подробную информацию о п.б.у. и п.у.б.у в области классической теории вероятностей можно найти в монографиях [3], [4] и [5]. Одним из первых результатов связанных с п.б.у. для случайных величин заданных в пространстве с сублинейным математическим ожиданием является работа [12], в ней была получена верхняя оценка в теореме Крамера. В статье [13] был получен п.б.у. для последовательностей независимых одинаково распределенных случайных величин заданных в пространстве с сублинейным математическим ожиданием. В работе [14] была получена верхняя оценка в п.б.у. для последовательностей независимых одинаково распределенных d–мерных случайных величин заданных на пространстве с сублинейным математическим ожиданием. В работе [15] был получен п.б.у. для последовательностей негативно зависимых случайных величин заданных на пространстве с сублинейным математическим ожиданием. Там же была получена верхняя оценка для п.у.б.у. В работе [16] был получен п.б.у. для последовательностей d–мерных случайных величин заданных в пространстве с сублинейным математическим ожиданием, при этом от случайных величин не требовалась независимость и одинаковая распределенность. Статьи [17], [18] посвящены п.б.у. для последовательностей решений стохастических дифференциальных уравнений, в которых стохастический интеграл построен по G–броуновскому движению. В работе [19] был получен п.у.б.у. для последовательностей слабо независимых случайных величин заданных в пространстве с сублинейным математическим ожиданием, при этом не требовалась одинаковая распределенность случайных величин. В статье [20] был получен принцип умеренно больших уклонений для строго стационарной последовательностей m–зависимых случайных величин заданных в пространстве с сублинейным математическим ожиданием.

Настоящая работа посвящена п.у.б.у. для строго стационарной последовательности m–зависимых случайных величин с более слабым моментным условием чем в работах [19] и [20]. Таким образом, мы обобщаем результаты полученные в работах [19] и [20]. Отметим, что в случае, когда случайные величины независимы и рассматриваются на обычном вероятностном пространстве результат работы напрямую следует из [1], см. также [2, глава 5].

Перейдем теперь к необходимым нам понятиям и определениям. Пусть пара $(\Omega, \mathfrak{F})$ — пространство элементарных событий и σ–алгебра его подмножеств, соответственно. Обозначим через $\mathcal{H}$ линейное пространство вещественнозначных функций (случайных величин) определенных на Ω и измеримых относительно $\mathfrak{F}$, такое, что:

1) $c \in \mathcal{H}$ для любой константы $c \in \mathbb{R}$;

2) если $|X| \in \mathcal{H}$ и $|Y| \leqslant |X|$, то $Y \in \mathcal{H}$.

Дадим теперь определение сублинейного математического ожидания заданного на пространстве $\mathcal{H}$.

Определение 1. Сублинейным математическим ожиданием на $\mathcal{H}$ будем называть функционал $\mathbb{E} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, который для любых $X, Y \in \mathcal{H}$ удовлетворяет условиям:

(i) монотонность: если $X \geqslant Y$, то $\mathbb{E}[X] \geqslant \mathbb{E}[Y]$;

(ii) сохранение константы: $\mathbb{E}[c] = c$, $\forall c \in \mathbb{R}$;

(iii) субаддитивность: $\mathbb{E}[X + Y] \leqslant \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$;

(iv) положительная однородность: $\mathbb{E}[\lambda X] = \lambda \mathbb{E}[X]$, $\forall \lambda \geq 0$.

Тройку $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ будем называть пространством случайных величин с заданным сублинейным математическим ожиданием.

Замечание 1 (Peng [6])**.** Из свойств (ii) и (iii) для любых $X, Y \in \mathcal{H}$ можно получить

(v) $\mathbb{E}[X + c] = \mathbb{E}[X] + c$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

(vi) $\mathbb{E}[X - Y] \geqslant \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]$.

Определение 2. Пусть $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ n–мерные случайные векторы определенные соответственно в пространствах случайных величин с заданным сублинейным математическим ожиданием $(\Omega_1, \mathcal{H}_1, \mathbb{E}_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{H}_2, \mathbb{E}_2)$. Будем говорить, что $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ одинаково распределены, и писать $\mathbf{X}_1 \overset{d}{=} \mathbf{X}_2$, если

$$\mathbb{E}_1[\varphi(\mathbf{X}_1)] = \mathbb{E}_2[\varphi(\mathbf{X}_2)]$$

для любой борелевской функции φ на $\mathbb{R}^n$ такой, что $\varphi(\mathbf{X}_1) \in \mathcal{H}$ и $\varphi(\mathbf{X}_2) \in \mathcal{H}$.

Определение 3. Пусть $\{X_i\}_{i=1}^n$ набор случайных величин в пространстве случайных величин с заданным сублинейным математическим ожиданием $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$. Будем говорить, что X_n не зависит от $X_1, \ldots, X_{n-1}$, если для любого набора неотрицательных борелевских функций φ_i на $\mathbb{R}$ таких, что $\varphi_i(X_i) \in \mathcal{H}$, выполнено

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} \varphi_i(X_i)\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n-1} \varphi_i(X_i)\right] \mathbb{E}[\varphi_n(X_n)].$$

Определение 4. Последовательность $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ будем называть последовательностью m–зависимых случайных величин, если существует $m \geqslant 1$ такое, что для любого $n \geqslant 1$, любого $j \geqslant m+1$ и любых неотрицательных борелевских функций φ_1 и φ_2 таких, что $\varphi_1(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{H}$ и $\varphi_2(X_{n+m+1}, \ldots, X_{n+j}) \in \mathcal{H}$, выполнено

$$\mathbb{E}\left[\varphi_1(X_1, \ldots, X_n)\varphi_2(X_{n+m+1}, \ldots, X_{n+j})\right] = \mathbb{E}\left[\varphi_1(X_1, \ldots, X_n)\right] \mathbb{E}\left[\varphi_2(X_{n+m+1}, \ldots, X_{n+j})\right].$$

Определение 5. Последовательность случайных величин $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ в $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ будем называть строго стационарной, если для любых $n \geqslant 1$ и $k \geqslant 1$ и для любой борелевской функции φ на $\mathbb{R}^n$ такой, что $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in \mathcal{H}$ и $\varphi(X_{1+k}, X_{2+k}, \ldots, X_{n+k}) \in \mathcal{H}$, выполнено

$$\mathbb{E}[\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)] = \mathbb{E}[\varphi(X_{1+k}, X_{2+k}, \ldots, X_{n+k})].$$

Определение 6. Определим верхнюю вероятность $\mathbb{V}$ следующим образом

$$\mathbb{V}(A) := \mathbb{E}[\mathbf{I}(A)], \quad A \in \mathfrak{F}.$$

Определение 7. Будем говорить, что последовательность случайных величин s_n в $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ удовлетворяет п.б.у. в $\mathbb{R}$ с функционалом уклонений (ф.у.) I и нормирующей функцией (н.ф.) $\psi(n) : \lim\limits_{n\to\infty} \psi(n) = \infty$, если для любого множества $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ выполнены неравенства

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbb{V}(s_n \in B) \leqslant -\inf_{y \in [B]} I(y), \tag{1}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbb{V}(s_n \in B) \geqslant -\inf_{y \in (B)} I(y), \tag{2}$$

где $[B]$ — замыкание множества B, а (B) его внутренность. Предполагается, что $I(\varnothing) = \infty$.

Определение 8. Будем говорить, что последовательность случайных величин s_n в $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ удовлетворяет п.у.б.у., если последовательность s_n удовлетворяет п.б.у., который имеет те же параметры, что и п.б.у. для последовательности независимых и одинаково распределенных гауссовских случайных величин с нулевым математическим ожиданием в классической теории вероятностей.

Рассмотрим строго стационарную последовательность m–зависимых случайных величин $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ в пространстве с сублинейным математическим ожиданием $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$. Будем предполагать, что

$$\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[-X_i] = 0, \quad i \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]^2 = \sigma^2 < \infty. \tag{4}$$

Также мы будем требовать, чтобы было выполнено следующее моментное условие. Для некоторых $q > 0, \alpha \in (0,1], M > 0$

$$\mathbb{E}[e^{q|X_1|^{\alpha}}] < M. \tag{5}$$

Зафиксируем положительную последовательность $x = x(n)$ такую, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x(n)}{\sqrt{n}} = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2-\alpha}(n)}{n} = 0. \tag{6}$$

Обозначим

$$S_k := \sum_{i=1}^{k} X_i, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Следующая теорема является основным результатом работы.

Теорема 1 (п.у.б.у. для сумм m–зависимых случайных величин). *Последовательность с.в.*

$$s_n = \frac{S_n}{x(n)}$$

удовлетворяет п.б.у. в $\mathbb{R}$ с н.ф. $\psi(n) := \frac{x^2}{n}$ и ф.у.

$$I(y) := \frac{y^2}{2\sigma^2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Приведем пример последовательности m–зависимых случайных величин, для которых верна теорема 1.

Пример. Пусть $(\Omega, \mathfrak{F})$ некоторое фиксированное измеримое пространство, и пусть $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ вероятностные меры заданные на этом пространстве. Обозначим $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ соответствующие $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ математические ожидания. Обозначим $\mathcal{H}$ линейное пространство всех измеримых относительно $\mathfrak{F}$ вещественнозначных функций X определенных на Ω таких, что

$$\max_{i\in\{1,2\}} \mathbf{E}_i|X| < \infty.$$

Определим

$$\mathbb{E}[X] = \max_{i\in\{1,2\}} \mathbf{E}_i X,$$

для $X \in \mathcal{H}$. Тройка $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ является пространством случайных величин с заданным сублинейным математическим ожиданием.

Пусть $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ последовательность независимых случайных величин таких, что каждая случайная величина подпоследовательности $\{X_{2i+1}\}_{i=0}^{\infty}$ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\frac{\beta}{\theta}\left(\frac{|x|}{\theta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{|x|}{\theta}\right)^{\beta}}$$

на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}_1)$, где

$$\theta = \sqrt{\frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)}},$$

и $\beta \in (0, 1]$, и распределение Радемахера (равновероятно принимает значения -1 и 1) на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}_2)$, а каждая случайная величина подпоследовательности $\{X_{2i}\}_{i=1}^{\infty}$ имеет распределение Радемахера на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}_1)$, и абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f_X(x)$ в $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}_2)$. Таким образом для всех случайных величин последовательности $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ выполнено $\mathbf{E}_1 X_i = \mathbf{E}_2 X_i = 0$ и $\mathbf{E}_1 X_i^2 = \mathbf{E}_2 X_i^2 = 1$.

Определим последовательность случайных величин Y_n на $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ следующим образом $Y_n = X_n + X_{n+1}$.

В силу замечания 1 имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_n] &= \mathbb{E}[X_n + X_{n+1}] \leqslant \mathbb{E}[X_n] + \mathbb{E}[X_{n+1}] = 0,\\ \mathbb{E}[Y_n] &= \mathbb{E}[X_n - (-X_{n+1})] \geqslant \mathbb{E}[X_n] - \mathbb{E}[-X_{n+1}] = 0,\end{aligned}$$

откуда имеем

$$\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[-Y_n] = 0,$$

для любого n.

В силу независимости $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, для фиксированного n имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_j[Y_1 + \ldots + Y_n]^2 &= \mathbf{E}_j[X_1 + 2X_2 \ldots + 2X_n + X_{n+1}]^2\\ &= \mathbf{E}_j[X_1^2] + \mathbf{E}_j[X_{n+1}^2] + 4\sum_{i=2}^{n}\mathbf{E}_j[X_i^2] = 2 + 4(n-1), \quad j = 1, 2,\end{aligned}$$

из чего следует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i\right]^2 = 4.$$

Легко видеть что $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ является последовательностью m–зависимых случайных величин, где $m = 1$.

Пусть φ борелевская функция на $\mathbb{R}^n$ такая, что $\varphi(Y_1, \ldots, Y_n) \in \mathcal{H}$. Легко видеть, что для любого k

$$\max_{i\in\{1,2\}} \mathbf{E}_i\varphi(Y_1, \ldots, Y_n) = \max_{i\in\{1,2\}} \mathbf{E}_i\varphi(Y_{1+k}, \ldots, Y_{n+k}).$$

Таким образом имеет место строгая стационарность последовательности $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$.

На вероятностных пространствах $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}_1)$ и $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}_2)$ каждая из случайных величин последовательности $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью

$$f_Y(x) = \frac{1}{2}\Big(f_X(x-1) + f_X(x+1)\Big),$$

в силу чего для любого $q > 0$ и $\alpha < \beta$ имеем

$$\mathbb{E}[e^{q|Y_n|^\alpha}] \leqslant C, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом теорема 1 применима к последовательности $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ с функционалом уклонений

$$I(y) = \frac{y^2}{8}.$$

Оставшаяся часть работы состоит из двух разделов 2 и 3. В разделе 2 доказана теорема 1, раздел 3 содержит формулировки и доказательства вспомогательных результатов.

2 Доказательство теоремы 1

В этом разделе мы докажем основной результат работы. Доказательство будем проводить в два шага: сначала докажем неравенство (1), затем докажем неравенство (2) (см. определение 7).

Шаг 1. Пусть F — замкнутое множество. Если $F = \varnothing$, то результат очевиден. Будем далее считать, что $F \neq \varnothing$. Обозначим

$$y_- := \sup\{y \in F : y < 0\} \leqslant 0, \quad y_+ := \inf\{y \in F : y \geqslant 0\} \geqslant 0.$$

Легко видеть, что $F \subseteq (-\infty, y_-] \cup [y_+, +\infty)$. Будем предполагать, что $y_- = -\infty$, если $F \cap (-\infty, 0] = \varnothing$ и $y_+ = +\infty$, если $F \cap [0, +\infty) = \varnothing$. Легко видеть, что если $F \neq \varnothing$, то по крайней мере одно из значений y_- или y_+ конечно. Имеем

$$\begin{aligned}
\ln \mathbb{V}(s_n \in F) &= \ln \mathbb{E}[\mathbf{I}(s_n \in F)] \\
&\leqslant \ln\Big(\mathbb{E}\big[\mathbf{I}(s_n \in (-\infty, y_-])\big] + \mathbb{E}\big[\mathbf{I}(s_n \in [y_+, +\infty))\big]\Big) \\
&\leqslant \ln\Big(2\max\big(\mathbb{E}\big[\mathbf{I}(s_n \in (-\infty, y_-])\big], \mathbb{E}\big[\mathbf{I}(s_n \in [y_+, +\infty))\big]\big)\Big) \qquad (7)
\end{aligned}$$

Положим

$$A_n := \left\{\omega : \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |X_i| \leqslant x(n)\right\}.$$

Оценим сверху $\mathbb{E}\big[\mathbf{I}(s_n \in (-\infty, y_-])\big]$. Используя неравенство Чебышева (см. лемма 1, (ii)) с функцией $f(x) = x$ при $x > 0$, для любого $\lambda > 0$ будем иметь

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbf{I}(s_n \in (-\infty, y_-])] &\leqslant \mathbb{E}\big[\mathbf{I}(s_n \in (-\infty, y_-])\mathbf{I}(A_n)\big] + \mathbb{E}[\mathbf{I}(\overline{A}_n)] \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[\mathbf{I}\left(-\lambda\frac{x(n)}{n}S_n \geqslant -\lambda\frac{x^2(n)}{n}y_-\right)\mathbf{I}(A_n)\right] + \mathbb{E}[\mathbf{I}(\overline{A}_n)] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbf{I}\left(e^{-\lambda\frac{x(n)}{n}S_n}\mathbf{I}(A_n) \geqslant e^{-\lambda\frac{x^2(n)}{n}y_-}\right)\mathbf{I}(A_n)\right] + \mathbb{E}[\mathbf{I}(\overline{A}_n)] \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[\mathbf{I}\left(e^{-\lambda\frac{x(n)}{n}S_n}\mathbf{I}(A_n) \geqslant e^{-\lambda\frac{x^2(n)}{n}y_-}\right)\right] + \mathbb{E}[\mathbf{I}(\overline{A}_n)] \\
&\leqslant \frac{\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\frac{x(n)}{n}S_n}\mathbf{I}(A_n)\right]}{e^{-\lambda\frac{x^2(n)}{n}y_-}} + n\mathbb{E}\big[\mathbf{I}(|X_1| > x(n))\big].
\end{aligned}$$

Используя неравенство Чебышева (см. лемма 1, (ii)) с функцией $f(x) = e^{qx^\alpha}$ и моментное условие (5), получим

$$n\mathbb{E}\big[\mathbf{I}(|X_1| > x(n))\big] \leqslant n\frac{\mathbb{E}[e^{q|X_1|^\alpha}]}{e^{qx(n)^\alpha}} \leqslant Mne^{-qx^\alpha(n)}. \tag{8}$$

Утверждению леммы 3 эквивалентно равенство при $n \to \infty$

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda\frac{x(n)}{n}S_n}\mathbf{I}(A_n)\right] = e^{\frac{x^2(n)}{n}\left(\frac{\lambda^2}{2}\sigma^2 + o(1)\right)}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) получаем

$$\mathbb{E}\big[\mathbf{I}(s_n \in (-\infty, y_-])\big] \leqslant e^{\frac{x^2(n)}{n}\left(\frac{\lambda^2}{2}\sigma^2 + \lambda y_- + o(1)\right)} + Mne^{-qx(n)^\alpha}.$$

Выбирая $\lambda = -\frac{y_-}{\sigma^2}$, получим

$$\mathbb{E}\big[\mathbf{I}(s_n \in (-\infty, y_-])\big] \leqslant e^{-\frac{x^2(n)}{n}\left(\frac{y_-^2}{2\sigma^2} + o(1)\right)} + Mne^{-qx(n)^\alpha}. \tag{10}$$

Похожим способом можно получить неравенство

$$\mathbb{E}\big[\mathbf{I}(s_n \in [y_+, +\infty))\big] \leqslant e^{-\frac{x^2(n)}{n}\left(\frac{y_+^2}{2\sigma^2} + o(1)\right)} + Mne^{-qx(n)^\alpha}. \tag{11}$$

Максимум правых частей неравенств (10) и (11) определяется минимумом из y_-^2 и y_+^2. Предположим, что $y_-^2 \leqslant y_+^2$.

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\frac{n}{x^2(n)}\ln\left(e^{-\frac{x^2(n)}{n}\left(\frac{y_-^2}{2\sigma^2}+o(1)\right)} + Mne^{-qx(n)^\alpha}\right) \\
&= \limsup_{n\to\infty}\frac{n}{x^2(n)}\ln\left(\left(e^{-\frac{x^2(n)}{n}\left(\frac{y_-^2}{2\sigma^2}+o(1)\right)}\right)\left(1 + e^{\ln(Mn) - qx(n)^\alpha + \frac{x^2(n)}{n}\left(\frac{y_-^2}{2\sigma^2}+o(1)\right)}\right)\right) \\
&= \limsup_{n\to\infty}\left(-\left(\frac{y_-^2}{2\sigma^2} + o(1)\right) + \frac{n}{x^2(n)}\ln\left(1 + e^{\ln(Mn) - qx(n)^\alpha + \frac{x^2(n)}{n}\left(\frac{y_-^2}{2\sigma^2}+o(1)\right)}\right)\right) \\
&= \limsup_{n\to\infty}\left(-\left(\frac{y_-^2}{2\sigma^2} + o(1)\right)\right. \\
&\qquad\qquad\left. + \frac{n}{x^2(n)}\ln\left(1 + e^{-qx(n)^\alpha\left(1 - \frac{\ln(Mn)}{qx(n)^\alpha} - \frac{x^{2-\alpha}(n)}{qn}\left(\frac{y_-^2}{2\sigma^2}+o(1)\right)\right)}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$= -\frac{y_-^2}{2\sigma^2}.$$

Аналогично при $y_+^2 \leqslant y_-^2$ получим

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln\left(e^{-\frac{x^2(n)}{n}\left(\frac{y_+^2}{2\sigma^2}+o(1)\right)} + Mne^{-qx(n)^\alpha}\right) = -\frac{y_+^2}{2\sigma^2}.$$

Таким образом получаем

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln\big(\mathbb{V}(s_n \in F)\big) \leqslant -\min\left(\frac{y_-^2}{2\sigma^2}, \frac{y_+^2}{2\sigma^2}\right).$$

Осталось заметить, что

$$\inf_{y\in F} I(y) = \min(I(y_-), I(y_+)) = \min\left(\frac{y_-^2}{2\sigma^2}, \frac{y_+^2}{2\sigma^2}\right).$$

Шаг 2. Пусть теперь G открытое множество. Если $G = \varnothing$, то результат очевиден. Будем предполагать, что $G \neq \varnothing$. Легко видеть, что для любого $l \geqslant 0$ множество

$$K_l := \{y : I(y) \leqslant l\}$$

является компактом. Так как $G \neq \varnothing$, существует $l_G > 0$ такое, что $G \cap K_{l_G} \neq \varnothing$.

Так как G открытое множество и $\inf\limits_{y\in G\cap K_{l_G}} I(y) = \inf\limits_{y\in G} I(y)$, для любого $\varepsilon > 0$ существует $y \in G \cap K_{l_G}$ такое, что

$$\inf_{x\in G} I(x) \geqslant I(y) - \varepsilon. \tag{12}$$

Для $\delta > 0$ обозначим

$$y^{(\delta)} := (y - \delta, y + \delta).$$

Так как множество G открытое, то при достаточно малом δ будем иметь

$$\mathbb{V}(s_n \in G) \geqslant \mathbb{E}\left[\mathbf{I}(s_n \in G)\mathbf{I}(A_n)\right] \geqslant \mathbb{E}\left[\mathbf{I}(s_n \in y^{(\delta)})\mathbf{I}(A_n)\right]. \tag{13}$$

Для $\lambda \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ введем обозначение

$$A(\lambda, n) := \ln \mathbb{E}\left[e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n}\mathbf{I}(A_n)\right].$$

Пользуясь определением $y^{(\delta)}$, получим следующее неравенство

$$\mathbf{I}(s_n \in y^{(\delta)})\mathbf{I}(A_n)e^{\lambda\frac{x(n)}{n}S_n} = \mathbf{I}(s_n \in y^{(\delta)})\mathbf{I}(A_n)e^{\lambda\frac{x^2(n)}{n}s_n}$$
$$\leqslant \mathbf{I}(s_n \in y^{(\delta)})\mathbf{I}(A_n)e^{\frac{x^2(n)}{n}(\lambda y + |\lambda|\delta)}. \tag{14}$$

Используя замечание 1 и неравенство (14), для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\delta > 0$ будем иметь

$$\ln \mathbb{E}\left[\mathbf{I}(s_n \in y^{(\delta)})\mathbf{I}(A_n)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant \ln \mathbb{E}\left[\mathbf{I}(s_n \in y^{(\delta)})\mathbf{I}(A_n) e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n - A(\lambda,n)} e^{-\lambda \frac{x^2(n)}{n} y + A(\lambda,n)} e^{-|\lambda| \frac{x^2(n)}{n}\delta}\right] \\
&= -\lambda \frac{x^2(n)}{n} y + A(\lambda,n) - |\lambda| \frac{x^2(n)}{n}\delta \\
&\qquad\qquad + \ln \mathbb{E}\left[\left(1 - \mathbf{I}(s_n \notin y^{(\delta)})\right)\mathbf{I}(A_n) e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n - A(\lambda,n)}\right] \\
&\geqslant -\lambda \frac{x^2(n)}{n} y + A(\lambda,n) - |\lambda| \frac{x^2(n)}{n}\delta \\
&\qquad\qquad + \ln\left(1 - \mathbb{E}\left[\mathbf{I}(s_n \notin y^{(\delta)})\mathbf{I}(A_n) e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n - A(\lambda,n)}\right]\right). \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Для любого $r > 0$ будем иметь

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\mathbf{I}(s_n \notin y^{(\delta)})\mathbf{I}(A_n) e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n - A(\lambda,n)}\right] \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[\mathbf{I}(s_n \geqslant y+\delta)\mathbf{I}(A_n) e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n - A(\lambda,n)}\right] + \mathbb{E}\left[\mathbf{I}(s_n \leqslant y-\delta)\mathbf{I}(A_n) e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n - A(\lambda,n)}\right] \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[\frac{e^{\frac{rx^2(n)}{n\sigma^2}(s_n-(y+\delta))}\mathbf{I}(A_n) e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n}}{e^{A(\lambda,n)}}\right] + \mathbb{E}\left[\frac{e^{\frac{rx^2(n)}{n\sigma^2}((y-\delta)-s_n)}\mathbf{I}(A_n) e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n}}{e^{A(\lambda,n)}}\right] \\
&= \frac{\mathbb{E}\left[e^{\frac{rx(n)}{n\sigma^2}S_n}\mathbf{I}(A_n) e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n}\right]}{e^{\frac{rx^2(n)}{n\sigma^2}(y+\delta)} e^{A(\lambda,n)}} + \frac{\mathbb{E}\left[e^{-\frac{rx(n)}{n\sigma^2}S_n}\mathbf{I}(A_n) e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n}\right]}{e^{\frac{rx^2(n)}{n\sigma^2}(\delta-y)} e^{A(\lambda,n)}} \\
&= \frac{\mathbb{E}\left[e^{\left(\frac{r}{\sigma^2}+\lambda\right)\frac{x(n)}{n}S_n}\mathbf{I}(A_n)\right]}{e^{\frac{rx^2(n)}{n\sigma^2}(y+\delta)} e^{A(\lambda,n)}} + \frac{\mathbb{E}\left[e^{\left(\lambda-\frac{r}{\sigma^2}\right)\frac{x(n)}{n}S_n}\mathbf{I}(A_n)\right]}{e^{\frac{rx^2(n)}{n\sigma^2}(\delta-y)} e^{A(\lambda,n)}} \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

Оценим сверху I_1. Из (9) следует

$$
I_1 \leqslant \frac{e^{\frac{x^2(n)}{n}\left(\frac{(r/\sigma^2+\lambda)^2}{2}\sigma^2 + o(1)\right)}}{e^{\frac{x^2(n)}{n}\left(\frac{r}{\sigma^2}(y+\delta)+\frac{\lambda^2}{2}\sigma^2\right)}} = \exp\left\{\frac{x^2(n)}{n}\left(\frac{r^2}{2\sigma^2} - \frac{r\delta}{\sigma^2} + r\left(\lambda - \frac{y}{\sigma^2}\right) + o(1)\right)\right\},
$$

при $n \to \infty$. Если выбрать $r = \delta$, то

$$
I_1 \leqslant \exp\left\{\frac{x^2(n)}{n}\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2} + \delta\left(\lambda - \frac{y}{\sigma^2}\right) + o(1)\right)\right\},
$$

при $n \to \infty$. Так же получаем

$$
I_2 \leqslant \exp\left\{\frac{x^2(n)}{n}\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2} + \delta\left(\frac{y}{\sigma^2} - \lambda\right) + o(1)\right)\right\},
$$

при $n \to \infty$. Таким образом имеем

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\mathbf{I}(s_n \notin y^{(\delta)})\mathbf{I}(A_n) e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n - A(\lambda,n)}\right] \\
&\qquad\qquad \leqslant 2\exp\left\{\frac{x^2(n)}{n}\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2} + \delta\left|\frac{y}{\sigma^2} - \lambda\right| + o(1)\right)\right\}, \qquad (16)
\end{aligned}
$$

при $n \to \infty$.

Выберем $\lambda = \frac{y}{\sigma^2}$. Таким образом во первых получим с помощью (9) следующее

$$\frac{n}{x^2(n)} A\left(\frac{y}{\sigma^2}, n\right) = \frac{n}{x^2(n)} \ln e^{\frac{x^2(n)}{n}\left(\frac{y^2}{2\sigma^2}+o(1)\right)} = \frac{y^2}{2\sigma^2} + o(1), \tag{17}$$

при $n \to \infty$. Во вторых

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{I}(s_n \notin y^{(\delta)})\mathbf{I}(A_n) e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n - A(\lambda, n)}\right] \leqslant 2\exp\left\{\frac{x^2(n)}{n}\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2} + o(1)\right)\right\}, \tag{18}$$

при $n \to \infty$. Используя (15), (17) и (18), получим

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E}\left[\mathbf{I}(s_n \in y^{(\delta)})\mathbf{I}(A_n)\right] \geqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{n}{x^2(n)} &\left(-\frac{x^2(n)}{n\sigma^2} y^2 + A\left(\frac{y}{\sigma^2}, n\right)\right. \\ &\left.-\frac{|y|}{\sigma^2}\frac{x^2(n)}{n}\delta + \ln\left(1 - 2e^{\frac{x^2(n)}{n}\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}+o(1)\right)}\right)\right) \\ &= -\frac{y^2}{2\sigma^2} - \frac{|y|}{\sigma^2}\delta.\end{aligned}$$

То есть

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{V}(s_n \in G) \geqslant -\frac{y^2}{2\sigma^2} - \frac{|y|}{\sigma^2}\delta.$$

Так как левая часть неравенства не зависит от δ, устремив $\delta \to 0$, получаем

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{V}(s_n \in G) \geqslant -\frac{y^2}{2\sigma^2}.$$

Используя (12), запишем

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{V}(s_n \in G) \geqslant -\frac{y^2}{2\sigma^2} = -I(y) \geqslant -\inf_{x\in G} I(x) - \varepsilon.$$

Заметим что левая часть неравенства не зависит от ε. Предельный переход $\varepsilon \to 0$ завершает доказательство. $\square$

3 Вспомогательные результаты

В этом разделе будут сформулированы и доказаны вспомогательные результаты.

Лемма 1 (Chen et al. [10])**.** *Пусть $X, Y \in \mathcal{H}$. Тогда верны следующие утверждения*

(i) Неравенство Гельдера: Пусть $|XY| \in \mathcal{H}$, $|X|^p \in \mathcal{H}$ и $|Y|^q \in \mathcal{H}$. Пусть $p, q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда

$$\mathbb{E}[|XY|] \leqslant (\mathbb{E}[|X|^p])^{\frac{1}{p}} \cdot (\mathbb{E}[|Y|^q])^{\frac{1}{q}}.$$

Если $p = q = 2$, то имеет место неравенство Коши–Буняковского.

(ii) *Неравенство Чебышева: Пусть $f(x)$ неубывающая неотрицательная функция на $\mathbb{R}$ и $f(X) \in \mathcal{H}$. Тогда для любого $x > 0$*

$$\mathbb{V}(X \geqslant x) \leqslant \frac{\mathbb{E}[f(X)]}{f(x)}.$$

Лемма 2 (Liu and Zhang [11]). *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ набор случайных величин заданных на $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ и $\zeta \in [0,1]$, $1 \leqslant i \leqslant n$ такие числа, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \zeta_i = 1$. Тогда*

$$\ln \mathbb{E}\left[e^{\sum\limits_{i=1}^{n} \zeta_i X_i}\right] \leqslant \sum_{i=1}^{n} \zeta_i \ln \mathbb{E}\left[e^{X_i}\right].$$

Лемма 3. *Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E}\left[e^{\lambda \frac{x(n)}{n} S_n} \mathbf{I}(A_n)\right] = \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2}.$$

Доказательство. Зафиксируем $K \geqslant m+1$, $n \geqslant K+m$. Обозначим $l = \left[\frac{n}{K+m}\right]$. Определим последовательности

$$\xi_t = \sum_{i=1}^{K} X_{t(K+m)+i}, \quad \eta_t = \sum_{i=1}^{m} X_{t(K+m)+K+i}, \quad t = 0, 1, \ldots, l-1.$$

Из m–зависимости последовательности $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ следует независимость ξ_t от $\xi_1, \ldots, \xi_{t-1}$, $1 \leqslant t \leqslant l-1$, и независимость η_t от $\eta_1, \ldots, \eta_{t-1}$, $1 \leqslant t \leqslant l-1$.

По определению S_n можно представить следующим образом

$$S_n = \sum_{t=0}^{l-1} \xi_t + \sum_{t=0}^{l-1} \eta_t + \sum_{i=l(K+m)+1}^{n} X_i = I_1 + I_2 + I_3.$$

Дальнейшее доказательство леммы 3 основано на следующих трех утверждениях, которые мы формулируем и доказываем ниже.

Утверждение 1. Для любых фиксированных $y \in \mathbb{R}$, $K \geqslant m+1$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E}\left[e^{y \frac{x(n)}{n} I_1} \mathbf{I}(A_n)\right] = \frac{1}{K+m} \frac{y^2 \sigma_0^2}{2},$$

где $\sigma_0^2 = \mathbb{E}[\xi_0^2]$.

Доказательство утверждения 1. Положим

$$\Delta_t = \{i \in \mathbb{N} : 1 + t(K+m) \leqslant i \leqslant K + t(K+m)\},$$

$$\widetilde{\Delta}_n = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leqslant i \leqslant n\} \setminus \left(\bigcup_{t=1}^{l-1} \Delta_t\right),$$

$$B_t = \left\{\omega : \max_{i \in \Delta_t} |X_i| \leqslant x(n)\right\},$$

$$C_n = \left\{\omega : \max_{i \in \widetilde{\Delta}_n} |X_i| \leqslant x(n)\right\}.$$

Используя тот факт, что ξ_t не зависит от $\xi_1, \ldots, \xi_{t-1}$, $1 \leqslant t \leqslant l-1$, и строгую стационарность $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, получаем

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{y\frac{x(n)}{n}I_1}\mathbf{I}(A_n)\right] &= \mathbb{E}\left[e^{y\frac{x(n)}{n}I_1}\mathbf{I}(C_n)\prod_{t=1}^{l-1}\mathbf{I}(B_t)\right] \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[e^{y\frac{x(n)}{n}I_1}\prod_{t=1}^{l-1}\mathbf{I}(B_t)\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{t=1}^{l-1}e^{y\frac{x(n)}{n}\xi_t}\mathbf{I}(B_t)\right] \\
&= \prod_{t=1}^{l-1}\mathbb{E}\left[e^{y\frac{x(n)}{n}\xi_t}\mathbf{I}(B_t)\right] = \left(\mathbb{E}\left[e^{y\frac{x(n)}{n}\xi_0}\mathbf{I}(B_0)\right]\right)^l. \qquad (19)
\end{aligned}$$

Используя дополнительно замечание 1, также получаем

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{y\frac{x(n)}{n}I_1}\mathbf{I}(A_n)\right] &= \mathbb{E}\left[e^{y\frac{x(n)}{n}I_1}\mathbf{I}(C_n)\prod_{t=1}^{l-1}\mathbf{I}(B_t)\right] \\
&\geqslant \mathbb{E}\left[e^{y\frac{x(n)}{n}I_1}\prod_{t=1}^{l-1}\mathbf{I}(B_t)\right] - \mathbb{E}\left[e^{y\frac{x(n)}{n}I_1}\mathbf{I}(\overline{C}_n)\prod_{t=1}^{l-1}\mathbf{I}(B_t)\right] \\
&= \left(\mathbb{E}\left[e^{y\frac{x(n)}{n}\xi_0}\mathbf{I}(B_0)\right]\right)^l - \mathbb{E}\left[\mathbf{I}(\overline{C}_n)\prod_{t=1}^{l-1}e^{y\frac{x(n)}{n}\xi_t}\mathbf{I}(B_t)\right]. \qquad (20)
\end{aligned}$$

Покажем, что для любого $y \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\mathbb{E}\left[e^{y\frac{x(n)}{n}\xi_0}\mathbf{I}(B_0)\right] = \exp\left\{\frac{x^2(n)}{n^2}\left(\frac{\sigma_0^2 y^2}{2} + o(1)\right)\right\}, \qquad (21)$$

при $n \to \infty$.

Оценим

$$\mathbb{E}\left[e^{y\frac{x(n)}{n}\xi_0}\mathbf{I}(B_0)\right]$$

сверху. Используя разложение функции e^x в ряд Тейлора, получаем оценку

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{y\frac{x(n)}{n}\xi_0}\mathbf{I}(B_0)\right] &= \mathbb{E}\left[\left(1 + y\frac{x(n)}{n}\xi_0 + y^2\frac{x^2(n)}{2n^2}\xi_0^2 + \sum_{r=3}^{+\infty} y^r\frac{x^r(n)}{r!n^r}\xi_0^r\right)\mathbf{I}(B_0)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbf{I}(B_0) + y\frac{x(n)}{n}\xi_0 - y\frac{x(n)}{n}\xi_0\mathbf{I}(\overline{B}_0) + y^2\frac{x^2(n)}{2n^2}\xi_0^2\mathbf{I}(B_0) + \sum_{r=3}^{+\infty} y^r\frac{x^r(n)}{r!n^r}\xi_0^r\mathbf{I}(B_0)\right] \\
&\leqslant 1 + \mathbb{E}\left[|y|\frac{x(n)}{n}|\xi_0|\mathbf{I}(\overline{B}_0)\right] + \mathbb{E}\left[y^2\frac{x^2(n)}{2n^2}\xi_0^2\mathbf{I}(B_0)\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\sum_{r=3}^{+\infty}\frac{|y\xi_0|^r x^r(n)}{r!n^r}\mathbf{I}(B_0)\right] \\
&= 1 + \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}\left[y^2\frac{x^2(n)}{2n^2}\xi_0^2\mathbf{I}(B_0)\right] + \mathbb{E}_2.
\end{aligned}$$

Оценим $\mathbb{E}_1$ сверху. Сначала, воспользуемся неравенством Коши–Буняковского (см. лемма 1, (i)), получим

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|y|\frac{x(n)}{n}|\xi_0|\mathbf{I}(\overline{B}_0)\right] &\leqslant \left(\mathbb{E}\left[y^2\frac{x^2(n)}{n^2}\xi_0^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{V}(\overline{B}_0)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |y|\frac{x(n)}{n}(\sigma_0^2)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{V}(\overline{B}_0)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant |y|\frac{x(n)}{n}(\sigma_0^2)^{\frac{1}{2}}\left(K\mathbb{V}(|X_1|>x(n))\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Продолжим оценку, воспользовавшись неравенством Чебышева (см. лемма 1, (ii)) с функцией $f(x)=e^{qx^\alpha}$, свойством (4) и моментным условием (5), получим

$$\begin{aligned}|y|\frac{x(n)}{n}(\sigma_0^2)^{\frac{1}{2}}\left(K\mathbb{V}(|X_1|>x(n))\right)^{\frac{1}{2}} &\leqslant |y|\frac{x(n)}{n}(\sigma_0^2)^{\frac{1}{2}}\frac{K^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\left[e^{q|X_1|^\alpha}\right]\right)^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{q}{2}x^\alpha(n)}} \\ &\leqslant |y|\frac{x(n)K^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}}{ne^{\frac{q}{2}x^\alpha(n)}}\left(\sigma_0^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (22)\end{aligned}$$

Таким образом получена оценка

$$\mathbb{E}_1 \leqslant |y|\frac{x(n)K^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}}{ne^{\frac{q}{2}x^\alpha(n)}}\left(\sigma_0^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (23)$$

Оценим $\mathbb{E}_2$ сверху.

$$\begin{aligned}\sum_{r=3}^{+\infty}\frac{|y\xi_0|^r x^r(n)}{r!n^r}\mathbf{I}(B_0) &\leqslant \frac{|y\xi_0|^3x^3(n)}{3!n^3}\exp\left\{\frac{|y\xi_0|x(n)}{n}\right\}\mathbf{I}(B_0) \\ &\leqslant \frac{|y|^3(|X_1|+\ldots+|X_K|)^3x^3(n)}{3!n^3}\exp\left\{\frac{x(n)|y|(|X_1|+\ldots+|X_K|)}{n}\right\}\mathbf{I}(B_0) \\ &\leqslant \frac{|y|^3K^3\max\limits_{1\leqslant r\leqslant K}|X_r|^3x^3(n)}{3!n^3}\exp\left\{\frac{x(n)|y|K\max\limits_{1\leqslant r\leqslant K}|X_r|}{n}\right\}\mathbf{I}(B_0) \\ &\leqslant \sum_{r=1}^{K}\frac{|y|^3K^3|X_r|^3x^3(n)}{3!n^3}\exp\left\{\frac{x(n)|y|K|X_r|}{n}\right\}\mathbf{I}(B_0).\end{aligned}$$

Найдется $C>0$ такое, что для всех $u>C$ выполнено

$$|u|^3 \leqslant e^{\frac{q}{2}|u|^\alpha}. \qquad (24)$$

Пользуясь этим фактом, продолжим оценку.

$$\begin{aligned}&\sum_{r=3}^{+\infty}\frac{|y\xi_0|^r x^r(n)}{r!n^r}\mathbf{I}(B_0) \\ &\qquad\leqslant \sum_{r=1}^{K}\frac{|y|^3K^3C^3x^3(n)}{3!n^3}\exp\left\{\frac{q}{2}|X_r|^\alpha\right\}\exp\left\{\frac{x(n)|y|K|X_r|}{n}\right\}\mathbf{I}(B_0)\end{aligned}$$

$$= \sum_{r=1}^{K} \frac{|y|^3 K^3 C^3 x^3(n)}{3!n^3} \exp\left\{ |X_r|^\alpha \left(\frac{q}{2} + \frac{x^{2-\alpha}(n)|y|K}{n} \right) \right\}.$$

Из условия (6) следует, что для достаточно больших n верно

$$\frac{q}{2} + \frac{x^{2-\alpha}(n)|y|K}{n} \leqslant q.$$

Используя этот факт, моментное условие (5) и строгую стационарность последовательности $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, получим оценку

$$\mathbb{E}_2 \leqslant \frac{|y|^3 K^4 C^3 x^3(n)}{3!n^3} M. \tag{25}$$

Используя полученные оценки (23) и (25), получаем следующую оценку

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{y \frac{x(n)}{n} \xi_0} \mathbf{I}(B_0) \right] \leqslant 1 + |y| \frac{x(n) K^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{n e^{\frac{q}{2} x^\alpha(n)}} \left(\sigma_0^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ + \mathbb{E}\left[y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \xi_0^2 \mathbf{I}(B_0) \right] + \frac{|y|^3 K^4 C^3 x^3(n)}{3!n^3} M \\ \leqslant 1 + y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \sigma_0^2 + o\left(\frac{x^2(n)}{n^2} \right), \end{aligned} \tag{26}$$

при $n \to \infty$.

Теперь получим оценку для

$$\mathbb{E}\left[e^{y \frac{x(n)}{n} \xi_0} \mathbf{I}(B_0) \right]$$

снизу. Используя (25) и замечание 1, можно получить оценку

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[e^{y \frac{x(n)}{n} \xi_0} \mathbf{I}(B_0) \right] \\ &\geqslant \mathbb{E}\left[\left(1 + y \frac{x(n)}{n} \xi_0 + y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \xi_0^2 - \sum_{r=3}^{+\infty} \frac{|y\xi_0|^r x^r(n)}{r!n^r} \right) \mathbf{I}(B_0) \right] \\ &= \mathbb{E}\left[y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \xi_0^2 \mathbf{I}(B_0) - \left(-1 + y \frac{x(n)}{n} (-\xi_0) + \sum_{r=3}^{+\infty} \frac{|y\xi_0|^r x^r(n)}{r!n^r} \right) \mathbf{I}(B_0) \right] \\ &= \mathbb{E}\Bigg[y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \xi_0^2 \mathbf{I}(B_0) \\ &- \left(y \frac{x(n)}{n} (-\xi_0) \mathbf{I}(B_0) - 1 + \mathbf{I}(\overline{B}_0) + \sum_{r=3}^{+\infty} \frac{|y\xi_0|^r x^r(n)}{r!n^r} \mathbf{I}(B_0) \right) \Bigg] \\ &\geqslant \mathbb{E}\left[y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \xi_0^2 \mathbf{I}(B_0) \right] \\ &- \mathbb{E}\left[\left(y \frac{x(n)}{n} (-\xi_0) \mathbf{I}(B_0) + \mathbf{I}(\overline{B}_0) \right) + \left(\sum_{r=3}^{+\infty} \frac{|y\xi_0|^r x^r(n)}{r!n^r} \mathbf{I}(B_0) + (-1) \right) \right] \\ &\geqslant \mathbb{E}\left[y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \xi_0^2 \mathbf{I}(B_0) \right] \\ &- \mathbb{E}\left[y \frac{x(n)}{n} (-\xi_0) \mathbf{I}(B_0) + \mathbf{I}(\overline{B}_0) \right] - \mathbb{E}\left[\sum_{r=3}^{+\infty} \frac{|y\xi_0|^r x^r(n)}{r!n^r} \mathbf{I}(B_0) \right] + 1 \end{aligned}$$

$$\geqslant \mathbb{E}_3 - \mathbb{E}_4 - \frac{|y|^3 K^4 C^3 x^3(n)}{3! n^3} M + 1.$$

Оценим $\mathbb{E}_3$ снизу, используя замечание 1, моментное условие (5), неравенство Коши–Буняковского и неравенство Чебышева с функцией $f(x) = e^{qx^\alpha}$ (см. лемма 1, (i) и (ii) соответственно).

$$\mathbb{E}\left[y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \xi_0^2 \mathbf{I}(B_0)\right] \geqslant \mathbb{E}\left[y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \xi_0^2\right] - \mathbb{E}\left[y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \xi_0^2 \mathbf{I}(\overline{B}_0)\right]$$
$$\geqslant y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \sigma_0^2 - y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} (\mathbb{E}[\xi_0^4])^{\frac{1}{2}} (\mathbb{V}(\overline{B}_0))^{\frac{1}{2}}$$
$$\geqslant y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \sigma_0^2 - y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} (\mathbb{E}[\xi_0^4])^{\frac{1}{2}} \left(\frac{K \mathbb{E}\left[e^{q|X_1|^\alpha}\right]}{e^{qx(n)^\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (27)$$

Теперь получим верхнюю оценку для $\mathbb{E}_4$, воспользовавшись моментным условием (5), неравенством Коши–Буняковского и неравенством Чебышева с функцией $f(x) = e^{qx^\alpha}$ (см. лемма 1, (i) и (ii) соответственно).

$$\mathbb{E}\left[y \frac{x(n)}{n} (-\xi_0) \mathbf{I}(B_0) + \mathbf{I}(\overline{B}_0)\right] = \mathbb{E}\left[y \frac{x(n)}{n} (-\xi_0) + y \frac{x(n)}{n} \xi_0 \mathbf{I}(\overline{B}_0) + \mathbf{I}(\overline{B}_0)\right]$$
$$\leqslant \mathbb{E}\left[|y| \frac{x(n)}{n} |\xi_0| \mathbf{I}(\overline{B}_0)\right] + \mathbb{V}(\overline{B}_0)$$
$$\leqslant \left(\mathbb{E}\left[y^2 \frac{x^2(n)}{n^2} \xi_0^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{K \mathbb{E}[e^{q|X_1|^\alpha}]}{e^{qx^\alpha(n)}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \frac{K \mathbb{E}[e^{q|X_1|^\alpha}]}{e^{qx^\alpha(n)}}$$
$$= \left(y^2 \frac{x^2(n) K M}{n^2 e^{qx^\alpha(n)}} \sigma_0^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{KM}{e^{qx^\alpha(n)}}. \quad (28)$$

Используя полученные оценки (27) и (28), запишем нижнюю оценку

$$\mathbb{E}\left[e^{y \frac{x(n)}{n} \xi_0} \mathbf{I}(B_0)\right] \geqslant y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \sigma_0^2 - y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} (\mathbb{E}[\xi_0^4])^{\frac{1}{2}} \left(\frac{K \mathbb{E}\left[e^{q|X_1|^\alpha}\right]}{e^{qx(n)^\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$- \left(y^2 \frac{x^2(n) K M}{n^2 e^{qx^\alpha(n)}} \sigma_0^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{KM}{e^{qx^\alpha(n)}} - \frac{|y|^3 K^4 C^3 x^3(n)}{3! n^3} M + 1$$
$$= 1 + y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \sigma_0^2 + o\left(\frac{x^2(n)}{n^2}\right), \quad (29)$$

при $n \to \infty$.

Используя неравенства (26) и (29), получаем

$$\mathbb{E}\left[e^{y \frac{x(n)}{n} \xi_0} \mathbf{I}(B_0)\right] = 1 + y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \sigma_0^2 + o\left(\frac{x^2(n)}{n^2}\right)$$
$$= \exp\left\{\ln\left(1 + y^2 \frac{x^2(n)}{2n^2} \sigma_0^2 + o\left(\frac{x^2(n)}{n^2}\right)\right)\right\}. \quad (30)$$

Используя тот факт, что $\ln(1+u) = u + o(u)$ при $u \to 0$, из (30) получаем

$$\mathbb{E}\left[e^{y\frac{x(n)}{n}\xi_0}\mathbf{I}(B_0)\right] = \exp\left\{\frac{x^2(n)}{n^2}\left(\frac{\sigma_0^2 y^2}{2} + o(1)\right)\right\},$$

при $n \to \infty$, что и требовалось.

Получим оценку сверху для

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{I}(\overline{C}_n)\prod_{t=0}^{l-1} e^{y\frac{x(n)}{n}\xi_t}\mathbf{I}(B_t)\right].$$

Используя неравенство Коши–Буняковского (см. лемма 1, (i)), независимость ξ_t от $\xi_1, \ldots, \xi_{t-1}$, $1 \leqslant t \leqslant l-1$, стационарность последовательности $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, равенство (21) и тот факт, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{l}{n} = \frac{1}{K+m}$, получаем при $n \to \infty$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbf{I}(\overline{C}_n)\prod_{t=0}^{l-1} e^{y\frac{x(n)}{n}\xi_t}\mathbf{I}(B_t)\right] &\leqslant \left(\mathbb{E}[\mathbf{I}(\overline{C}_n)]\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\left[\prod_{t=0}^{l-1} e^{2y\frac{x(n)}{n}\xi_t}\mathbf{I}(B_t)\right]\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(|X_i| > x(n))\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\left[e^{2y\frac{x(n)}{n}\xi_0}\mathbf{I}(B_0)\right]\right)^{\frac{l}{2}} \\
&\leqslant \left(n\mathbb{V}(|X_1| > x(n))\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{l\frac{x^2(n)}{n^2}\left(\sigma_0^2 y^2 + o(1)\right)\right\} \\
&\leqslant \left(n\mathbb{V}(|X_1| > x(n))\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{x^2(n)}{n}\left(\frac{\sigma_0^2}{K+m}y^2 + o(1)\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Используя неравенство Чебышева с функцией $f(x) = e^{qx^{\alpha}(n)}$ (см. лемма 1, (ii)) и моментное условие (5), получаем

$$\left(n\mathbb{V}(|X_1| > x(n))\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant n^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{q}{2}x^{\alpha}(n)}. \tag{32}$$

Комбинируя неравенства (31) и (32), получаем оценку

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\mathbf{I}(\overline{C}_n)\prod_{t=0}^{l-1} e^{y\frac{x(n)}{n}\xi_t}\mathbf{I}(B_t)\right] \\
&\qquad\leqslant n^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{x^2(n)}{n}\left(\frac{\sigma_0^2}{K+m}y^2 + o(1)\right) - \frac{q}{2}x^{\alpha}(n)\right\}.
\end{aligned} \tag{33}$$

Используя неравенства (19), (21) и тот факт, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{l}{n} = \frac{1}{K+m}$, получаем

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{y\frac{x(n)}{n}I_1}\mathbf{I}(A_n)\right] &\leqslant \left(\mathbb{E}\left[e^{y\frac{x(n)}{n}\xi_0}\mathbf{I}(B_0)\right]\right)^{l} \\
&= \exp\left\{\frac{x^2(n)}{n^2}l\left(\frac{\sigma_0^2 y^2}{2} + o(1)\right)\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{x^2(n)}{n}\frac{1}{K+m}\left(\frac{\sigma_0^2 y^2}{2} + o(1)\right)\right\},
\end{aligned}$$

при $n \to \infty$. Из полученного неравенства получаем

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E}\left[e^{y\frac{x(n)}{n}I_1}\mathbf{I}(A_n)\right] \leqslant \frac{1}{K+m}\frac{\sigma_0^2 y^2}{2}. \tag{34}$$

Используя неравенства (20), (21) и (33), получаем

$$\mathbb{E}\left[e^{y\frac{x(n)}{n}I_1}\mathbf{I}(A_n)\right] \geqslant \exp\left\{\frac{x^2(n)}{n}\frac{1}{K+m}\left(\frac{\sigma_0^2 y^2}{2}+o(1)\right)\right\} \\ - n^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{x^2(n)}{n}\left(\frac{\sigma_0^2}{K+m}y^2+o(1)\right)-\frac{q}{2}x^{\alpha}(n)\right\}. \tag{35}$$

Из неравенства (35) имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E}\left[e^{y\frac{x(n)}{n}I_1}\mathbf{I}(A_n)\right] \geqslant \\
&\quad \frac{n}{x^2(n)}\ln\left(e^{\frac{x^2(n)}{n}\frac{1}{K+m}\left(\frac{\sigma_0^2y^2}{2}+o(1)\right)} - e^{\frac{\ln nM}{2}+\frac{x^2(n)}{n}\left(\frac{\sigma_0^2}{K+m}y^2+o(1)\right)-\frac{q}{2}x^{\alpha}(n)}\right)\\
&\quad = \frac{1}{K+m}\left(\frac{\sigma_0^2y^2}{2}+o(1)\right)\\
&\quad + \frac{n}{x^2(n)}\ln\left(1-e^{\frac{\ln nM}{2}+\frac{x^2(n)}{n}\left(\frac{\sigma_0^2}{K+m}y^2+o(1)\right)-\frac{x^2(n)}{n}\frac{1}{K+m}\left(\frac{\sigma_0^2y^2}{2}+o(1)\right)-\frac{q}{2}x^{\alpha}(n)}\right)\\
&\quad = \frac{1}{K+m}\left(\frac{\sigma_0^2y^2}{2}+o(1)\right)\\
&\quad + \frac{n}{x^2(n)}\ln\left(1-e^{-x^{\alpha}(n)\left(-\frac{\ln nM}{2x^{\alpha}(n)}-\frac{x^{2-\alpha}}{n}\left(-\frac{\sigma_0^2}{K+m}y^2+o(1)\right)+\frac{x^{2-\alpha}(n)}{n}\frac{1}{K+m}\left(\frac{\sigma_0^2y^2}{2}+o(1)\right)+\frac{q}{2}\right)}\right),
\end{aligned}$$

из чего следует

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E}\left[e^{y\frac{x(n)}{n}I_1}\mathbf{I}(A_n)\right] \geqslant \frac{1}{K+m}\frac{\sigma_0^2 y^2}{2}. \tag{36}$$

Из неравенств (34) и (36) следует утверждение 1.
Утверждение 2. Для любых фиксированных $y \in \mathbb{R}$, $K \geqslant m+1$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E}\left[e^{y\frac{x(n)}{n}I_2}\mathbf{I}(A_n)\right] \leqslant \frac{1}{K+m}\frac{y^2\widetilde{\sigma}_0^2}{2},$$

где $\widetilde{\sigma}_0^2 = \mathbb{E}\,[\eta_0^2]$.
Доказательство утверждения 2. Доказательство полностью повторяет соответствующие выкладки из доказательства утверждения 1, поэтому мы его опускаем.
Утверждение 3. Для любых фиксированных $y \in \mathbb{R}$, $K \geqslant m+1$ справедливо равенство

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E}\left[e^{y\frac{x(n)}{n}I_3}\mathbf{I}(A_n)\right] \leqslant 0.$$

Доказательство утверждения 3. Пользуясь леммой 2 и строгой стационарностью $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, запишем оценку

$$
\begin{aligned}
&\frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E}\left[e^{y\frac{x(n)}{n}I_3}\mathbf{I}(A_n)\right] \\
&\qquad \leqslant \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E}\left[\exp\left\{|y|\frac{x(n)}{n}\sum_{i=l(K+m)+1}^{n}|X_i|\right\}\prod_{i=l(K+m)+1}^{n}\mathbf{I}(|X_i|\leqslant x(n))\right] \\
&\qquad = \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E}\left[\exp\left\{|y|\frac{x(n)}{n}\sum_{i=1}^{n-l(K+m)}|X_i|\right\}\prod_{i=1}^{n-l(K+m)}\mathbf{I}(|X_i|\leqslant x(n))\right] \\
&\qquad \leqslant \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E}\left[\exp\left\{|y|\frac{x(n)}{n}\sum_{i=1}^{n-l(K+m)}|X_i|\mathbf{I}(|X_i|\leqslant x(n))\right\}\right] \\
&\qquad \leqslant \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E}\left[\exp\left\{|y|\frac{x(n)}{n}(K+m)\sum_{i=1}^{K+m}\frac{|X_i|\mathbf{I}(|X_i|\leqslant x(n))}{K+m}\right\}\right] \\
&\qquad \leqslant \frac{n}{x^2(n)} \sum_{i=1}^{K+m}\left(\frac{1}{K+m}\ln \mathbb{E}\left[\exp\left\{|y|\frac{x(n)}{n}(K+m)|X_i|\mathbf{I}(|X_i|\leqslant x(n))\right\}\right]\right) \\
&\qquad = \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E}\left[\exp\left\{|y|\frac{x(n)}{n}(K+m)|X_1|\mathbf{I}(|X_1|\leqslant x(n))\right\}\right] \\
&\qquad = \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E}\left[\exp\left\{|y|\frac{x(n)^{2-\alpha}}{n}(K+m)|X_1|^{\alpha}\mathbf{I}(|X_1|\leqslant x(n))\right\}\right] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \leqslant \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E}\left[\exp\left\{|y|\frac{x(n)^{2-\alpha}}{n}(K+m)|X_1|^{\alpha}\right\}\right].
\end{aligned}
$$

Так как, в силу условия (6), для достаточно больших n

$$
|y|\frac{x(n)^{2-\alpha}}{n}(K+m) \leqslant q,
$$

то, учитывая моментное условие (5), для достаточно больших n имеем

$$
\frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E}\left[e^{y\frac{x(n)}{n}I_3}\mathbf{I}(A_n)\right] \leqslant \frac{n}{x^2(n)} \ln M,
$$

из чего получаем

$$
\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E}\left[e^{y\frac{x(n)}{n}I_3}\mathbf{I}(A_n)\right] \leqslant 0. \tag{37}
$$

Утверждение 3 доказано.

Продолжим теперь доказательство леммы 3. Зафиксируем $p_1 > 1, p_2 > 1, q_1 > 1, q_2 > 1$ такие, что $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1$, $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = 1$. Используя неравенством Гельдера (см. лемма 1, (i)) для любого фиксированного $\lambda \in \mathbb{R}$, получаем

$$
\begin{aligned}
&\frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E}\left[e^{\lambda\frac{x(n)}{n}S_n}\mathbf{I}(A_n)\right] \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{q_1}\frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E}\left[e^{\lambda q_1\frac{x(n)}{n}I_3}\mathbf{I}(A_n)\right] + \frac{1}{p_1}\frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E}\left[e^{\lambda p_1\frac{x(n)}{n}(I_1+I_2)}\mathbf{I}(A_n)\right] \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{q_1}\frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E}\left[e^{\lambda q_1\frac{x(n)}{n}I_3}\mathbf{I}(A_n)\right] + \frac{1}{p_1p_2}\frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbb{E}\left[e^{\lambda p_1p_2\frac{x(n)}{n}I_1}\mathbf{I}(A_n)\right]
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{p_1q_2}\frac{n}{x^2(n)}\ln\mathbb{E}\left[e^{\lambda p_1q_2\frac{x(n)}{n}I_2}\mathbf{I}(A_n)\right]. \quad (38)$$

Используя утверждения 1–3 и неравенство (38), получаем

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{n}{x^2(n)}\ln\mathbb{E}\left[e^{\lambda\frac{x(n)}{n}S_n}\mathbf{I}(A_n)\right]\leqslant p_1p_2\frac{1}{K+m}\frac{\sigma_0^2\lambda^2}{2}+\frac{p_1q_2}{K+m}\frac{\widetilde{\sigma}_0^2\lambda^2}{2}$$

$$=p_1p_2\frac{K}{K+m}\frac{\lambda^2}{2}\frac{1}{K}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{K}X_i\right]^2+\frac{p_1q_2}{K+m}\frac{\lambda^2}{2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{m}X_i\right]^2.$$

Так как левая часть неравенства не зависит от K, то устремив $K\to\infty$, получаем

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{n}{x^2(n)}\ln\mathbb{E}\left[e^{\lambda\frac{x(n)}{n}S_n}\mathbf{I}(A_n)\right]\leqslant p_1p_2\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}.$$

Так как левая часть полученного неравенства не зависит от p_1, p_1, q_1 и q_2, то устремив $p_1\to 1$ и $p_2\to 1$, получим

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{n}{x^2(n)}\ln\mathbb{E}\left[e^{\lambda\frac{x(n)}{n}S_n}\mathbf{I}(A_n)\right]\leqslant \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}. \quad (39)$$

Теперь получим оценку для

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{n}{x^2(n)}\ln\mathbb{E}\left[e^{\lambda\frac{x(n)}{n}S_n}\mathbf{I}(A_n)\right]$$

снизу. Пользуясь неравенством Гельдера (см. лемма 1, (i)), имеем

$$\ln\mathbb{E}\left[e^{\lambda\frac{x(n)}{p_1p_2n}I_1}\mathbf{I}(A_n)\right]=\ln\mathbb{E}\left[e^{\lambda\frac{x(n)}{p_1p_2n}(I_1+I_2-I_2)}\mathbf{I}(A_n)\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{p_1}\ln\mathbb{E}\left[e^{\lambda\frac{x(n)}{p_2n}(I_1+I_2)}\mathbf{I}(A_n)\right]+\frac{1}{q_1}\ln\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\frac{q_1x(n)}{p_1p_2n}I_2}\mathbf{I}(A_n)\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{p_1}\ln\mathbb{E}\left[e^{\lambda\frac{x(n)}{p_2n}(I_1+I_2+I_3-I_3)}\mathbf{I}(A_n)\right]+\frac{1}{q_1}\ln\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\frac{q_1x(n)}{p_1p_2n}I_2}\mathbf{I}(A_n)\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{p_1p_2}\ln\mathbb{E}\left[e^{\lambda\frac{x(n)}{n}(I_1+I_2+I_3)}\mathbf{I}(A_n)\right]+\frac{1}{p_1q_2}\ln\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\frac{q_2x(n)}{p_2n}I_3}\mathbf{I}(A_n)\right]$$

$$+\frac{1}{q_1}\ln\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\frac{q_1x(n)}{p_1p_2n}I_2}\mathbf{I}(A_n)\right].$$

Пользуясь полученным, можно записать

$$\frac{n}{x^2(n)}\ln\mathbb{E}\left[e^{\lambda\frac{x(n)}{n}S_n}\mathbf{I}(A_n)\right]\geqslant-\frac{p_2}{q_2}\frac{n}{x^2(n)}\ln\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\frac{q_2x(n)}{p_2n}I_3}\mathbf{I}(A_n)\right]$$

$$+p_1p_2\frac{n}{x^2(n)}\ln\mathbb{E}\left[e^{\lambda\frac{x(n)}{p_1p_2n}I_1}\mathbf{I}(A_n)\right]-\frac{p_1p_2}{q_1}\frac{n}{x^2(n)}\ln\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\frac{q_1x(n)}{p_1p_2n}I_2}\mathbf{I}(A_n)\right]. \quad (40)$$

Используя утверждения 1-3 и неравенство (40), можно записать

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{n}{x^2(n)}\ln\mathbb{E}\left[e^{\lambda\frac{x(n)}{n}S_n}\mathbf{I}(A_n)\right]$$

$$\geqslant \frac{1}{p_1p_2}\frac{K}{K+m}\frac{\lambda^2}{2}\frac{1}{K}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{K}X_i\right]^2 - \frac{q_1}{p_1p_2}\frac{1}{K+m}\frac{\lambda^2}{2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{m}X_i\right]^2.$$

Так как левая часть неравенства не зависит от K, то устремив $K \to \infty$, получаем

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{n}{x^2(n)}\ln\mathbb{E}\left[e^{\lambda\frac{x(n)}{n}S_n}\mathbf{I}(A_n)\right] \geqslant \frac{1}{p_1p_2}\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}.$$

Так как левая часть полученного неравенства не зависит от p_1, p_1, q_1 и q_2, то устремив $p_1 \to 1$ и $p_2 \to 1$, получим

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{n}{x^2(n)}\ln\mathbb{E}\left[e^{\lambda\frac{x(n)}{n}S_n}\mathbf{I}(A_n)\right] \geqslant \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}. \tag{41}$$

Комбинируя (39) и (41), получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x^2(n)}\ln\mathbb{E}\left[e^{\lambda\frac{x(n)}{n}S_n}\mathbf{I}(A_n)\right] = \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}.$$

□

Список литературы

[1] Боровков А. А., Могульский А. А. Принципы умеренно больших уклонений для траектории случайных блужданий и процессов с независимыми приращениями // Теория вероятн. и ее примен. 2013. том 58. выпуск 4. С. 648–671

[2] Лебедев А. А., Лебедев В. А. Обобщение математического ожидания для единого описания случайных и неопределенных факторов // Теория вероятн. и ее примен. 1993. том 38. выпуск 3. С. 529–539

[3] Боровков А. А., Асимптотический анализ случайных блужданий: М. Физматлит, 2013.

[4] Deuschel J.-D., Stroock D.W. Large deviations: Academic Press, 1989.

[5] Dembo A., Zeitouni O. Large deviations techniques and applications. 2nd ed.: Springer, 1998.

[6] Peng S. Nonlinear expectations and stochastic calculus under uncertainty: Springer, 2019. 212 p.

[7] Peng S. G-Expectation, G-Brownian motion and related stochastic calculus of Ito's type // Stoch. Anal. Appl. 2006. v. 2 P. 541–567.

[8] Peng S. Multi-dimensional G-Brownian motion and related stochastic calculus under G-expectation // Stoch. Process. Their Appl. 2008 v. 118 P. 2223–2253.

[9] Peng S. Law of large numbers and central limit theorem under nonlinear expectations // Probab. Uncertain. Quant. Risk. 2019. v. 4(4)

[10] Chen Z., Wu P., Li B. A strong law of large numbers for non-additive probabilities // Int. J. Approx. Reasoning. 2013. v. 54(3) P. 365–377.

[11] Liu W., Zhang Y. Large deviation principle for linear processes generated by real stationary sequences under the sub-linear expectation // Commun. Stat.-Theor. M. 2020.

[12] Hu F. On Cramér's theorem for capacities // Comptes Rendus Mathematique. 2010. v. 348. P. 1009–1013.

[13] Gao F., Xu M., Large deviations and moderate deviations for independent random variables under sublinear expectations // Scientia Sinica. 2011. v. 41(4). P. 337–352.

[14] Cao X., An upper bound of large deviations for capacities // Math. Probl. Eng. 2014

[15] Chen Z. J., Feng Z. W., Large deviation for negatively dependent random variables under sublinear expectation, Commun. Stat.-Theor. M., 2016. v. 45(2) P. 400-412.

[16] Tan Y. Z., Zong G. F., Large deviation principle for random variables under sublinear expectations on $\mathbb{R}^d$ // Math. Anal. Appl. 2020. v. 488.

[17] Chen. Z, Xiong J., Large deviation principle for diffusion processes under a sublinear expectation // Sci. China Math v. 55. P. 2205–2216.

[18] Gao F., Jiang H., Large deviations for stochastic differential equations driven by G-Brownian motion // Stochastic Processes Appl. v. 120. P. 2212–2240.

[19] Zhou Q. Q., Logachov A. V. Moderate deviations principle for independent random variables under sublinear expectations // Sib. Elektron. Math. Rep. 2021. v. 18. P. 817–826.

[20] Guo S., Yong Z. Moderate deviation principle for m-dependent random variables under the sub-linear expectation // AIMS Mathematics. 2022. v. 7(4). P. 5943–5956.