

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ИСТОЧНИКОВ В МОДЕЛИ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Гренкин Г.В.*

* *Владивостокский государственный университет*

Владивосток, 690014, ул. Гоголя, 41

e-mail: glebgrenkin@gmail.com

Рассмотрена задача идентификации мощностей источников при известных их объемных плотностях по данным средней температуры каждого из них в рамках стационарной диффузионной модели сложного теплообмена. Предложена численная схема решения обратной задачи. Проведен полуэмпирический анализ сходимости алгоритма.

Ключевые слова: радиационный теплообмен, обратная задача, единственность решения, интегральное переопределение.

1 Введение

В ряде предметных областей (сложный теплообмен [1, 2], перенос кислорода в мозговых тканях [3–5], физиология печени [6]), в которых пространственное распределение двух взаимопереходящих субстанций моделируется реакционно-диффузионными системами, возникают обратные задачи идентификации источников одной из субстанций по известным количествам этой субстанции в области каждого источника. Эти задачи могут представлять интерес не только для численного моделирования, а также для обеспечения надежного управления теплообменом в реальном времени, а также для исследования естественных механизмов управления биологическими процессами.

В настоящей работе исследуется обратная задача идентификации источников тепла в диффузионной модели сложного теплообмена. Ранее в [1] доказано существование решения этой задачи, а также обоснована единственность решения при условии на коэффициенты. Для решения вопроса единственности решения мы предложим численную схему, из монотонной сходимости которой при некоторых условиях будет вытекать существование решения обратной задачи с минимальной суммарной энергией (суммой тепловой энергии и теплового эквивалента энергии излучения). Это минимальное решение либо будет единственным решением обратной задачи, либо, по крайней мере, наиболее энергоэффективным решением.

Результаты исследования модели сложного теплообмена могут оказаться актуальными и в численном моделировании распространения кислорода в тканях мозга [3–5]. Также сходные модели, включающие уравнения теплообмена, применяются для разработки медицинской процедуры лазерной абляции [7]. Единственность решения обратной задачи означает, что в системе управления будут отсутствовать нетривиальные режимы.

2 Постановка задачи

Радиационно-кондуктивный теплообмен в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ описывается в диффузионном приближении следующей системой дифференциальных уравнений:

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|^3\theta - \varphi) = \sum_{i=1}^m q_i f_i, \quad (1)$$

$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3\theta) = 0 \quad (2)$$

с краевыми условиями

$$a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b) = 0, \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0 \quad \text{на } \Gamma. \quad (3)$$

Здесь θ — установившееся поле нормализованной температуры, φ — поле нормализованной интенсивности излучения, усредненной по всем направлениям. Положительные постоянные параметры a, b, α, κ_a характеризуют радиационно-термические свойства среды, граничные функции β, γ характеризуют отражающие свойства границы. Через $\partial/\partial n$ обозначена производная в направлении внешней нормали.

Для нахождения неизвестных мощностей источников тепла q_i для поля температуры задается интегральное переопределение:

$$\int_{\Omega} f_j(x)\theta(x) dx = r_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (4)$$

Здесь $f_j \geq 0$ — заданные функции, выражающие объемные плотности источников.

Обратная задача идентификации источников состоит в нахождении коэффициентов q_1, \dots, q_m , при которых соответствующее решение задачи (1)–(3) удовлетворяет условию (4).

3 Метод решения задачи

Метод решения нелинейной обратной задачи (1)–(4) состоит в построении итерационного процесса, на каждом шаге которого нелинейная задача приближается линейной обратной задачей:

$$-a\Delta\eta = \sum_{i=1}^m q_i f_i, \quad a\frac{\partial\eta}{\partial n} + \beta(\eta - \theta_b) = 0, \quad (5)$$

$$\int_{\Omega} f_j(x)\eta(x) dx = s_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (6)$$

где η имеет смысл суммарной тепловой энергии, которая складывается из собственно тепловой энергии и теплового эквивалента энергии излучения ψ , определяемого как решение следующей краевой задачи:

$$-a\Delta\psi = b\kappa_a(|\theta|^3\theta - \varphi), \quad a\frac{\partial\psi}{\partial n} + \beta\psi = 0.$$

Можно показать, что обратная задача (5), (6) имеет единственное решение.

Алгоритм:

1. Полагаем $s_j^{(1)} = r_j$ для $j = 1, \dots, m$. Считаем $k = 1$.
2. Решаем обратную задачу

$$-a\Delta\eta = \sum_{i=1}^m q_i f_i, \quad a \frac{\partial \eta}{\partial n} + \beta(\eta - \theta_b) = 0,$$

$$\int_{\Omega} f_j(x)\eta(x) dx = s_j^{(k)}, \quad j = 1, \dots, m,$$

находим коэффициенты $q_i = q_i^{(k)}$.

3. Находим $\theta = \theta^{(k)}$, $\varphi = \varphi^{(k)}$, где θ, φ — решение задачи (1)–(3) при $q_i = q_i^{(k)}$.
4. Вычисляем $s_j^{(k+1)} = r_j + \int_{\Omega} f_j(x)\psi^{(k)}(x) dx$, где $\psi^{(k)}$ — соответствующее поле теплового эквивалента энергии излучения. Поскольку $\int_{\Omega} f_j(x)\theta^{(k)}(x) dx + \int_{\Omega} f_j(x)\psi^{(k)}(x) dx = s_j^{(k)}$, то $s_j^{(k+1)} = s_j^{(k)} + (r_j - \int_{\Omega} f_j(x)\theta^{(k)}(x) dx)$.
5. Переходим к шагу 2, увеличив k на 1.

Проведем анализ сходимости алгоритма, опираясь на результат вычислительного эксперимента. В качестве модели используем уравнения в одномерной области (слое) толщиной $L = 50$. Коэффициенты примерно соответствуют физическим параметрам воздуха: $a = 0.92$, $b = 18.7$, $\kappa_a = 0.01$, $\alpha = 3.3$, $\beta = 10$, $\gamma = 0.3$, $\theta_b = 0.4$. Определим два источника по формулам $f_1(x) = f_{10,20}(x)$, $f_2(x) = f_{30,40}(x)$, где $f_{l,r}(x) = 0.5(1 + \cos(2\pi(x - (l+r)/2)/(r-l)))$ при $x \in [l, r]$ и $f_{l,r}(x) = 0$ иначе. Вычисления проведены методом конечных разностей с помощью программы Joker FDM¹.

На рисунке 1 изображены линии уровня функций $F_1(q_1, q_2)$ (сплошными линиями) и $F_2(q_1, q_2)$ (пунктирными линиями), $F_j(\mathbf{q}) = \int_{\Omega} f_j(x)\theta(x) dx$. Можно видеть, что линии уровня практически являются прямыми линиями, параллельными друг другу, но не равностоящими друг от друга. При этом чем выше мощности источников, тем сложнее становится их нагреть: основная часть энергии переходит в излучение.

На рисунке 2 показаны линии уровня функций $G_j(\mathbf{q}) = \int_{\Omega} f_j(x)\psi(x) dx$. Поскольку $F_j(\mathbf{q}) + G_j(\mathbf{q})$ — это линейная функция, а G_j растут существенно быстрее, чем F_j , то функция G_j выглядит почти линейной.

Наконец, на рисунках можно заметить, что при увеличении $F_j(\mathbf{q})$ одновременно для всех j функции $G_j(\mathbf{q})$ также увеличиваются. При выполнении данного условия можно утверждать, что, стартуя из точки $\mathbf{q}^{(1)}$, в которой все функции $F_j(\mathbf{q})$ не превосходят r_j , наш алгоритм, оставаясь в области, в которой выполняются неравенства $F_j(\mathbf{q}) \leq r_j$, обеспечит условие, что суммарная энергия в каждом источнике не превзойдет суммарной энергии на любом другом решении обратной задачи. В свою очередь, для сохранения условия $F_j(\mathbf{q}^{(k)}) \leq r_j$ достаточно, чтобы по мере движения алгоритма линии уровня функций F_j становились разреженнее. Теоретически это будет обеспечено условием $\beta/a \leq \gamma/\alpha$, которое выполняется при достаточной теплоизолированности области теплообмена.

¹<https://pastebin.com/bM0Q9K6a>

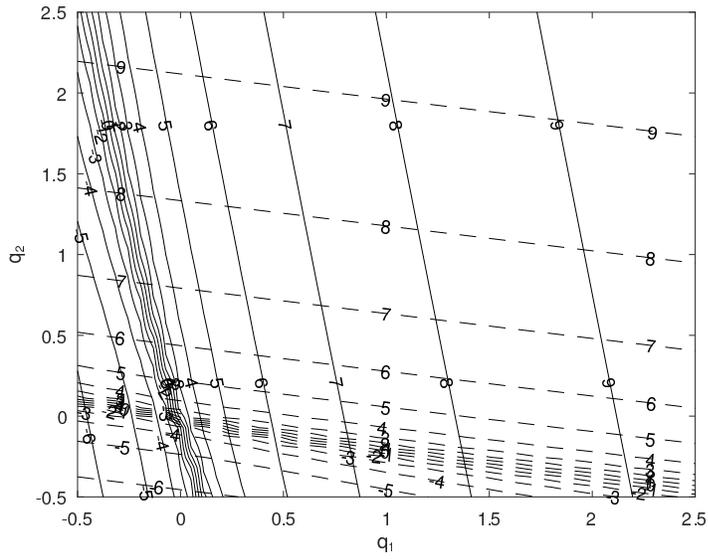


Рис. 1: Линии уровня функций $F_j(\mathbf{q})$.

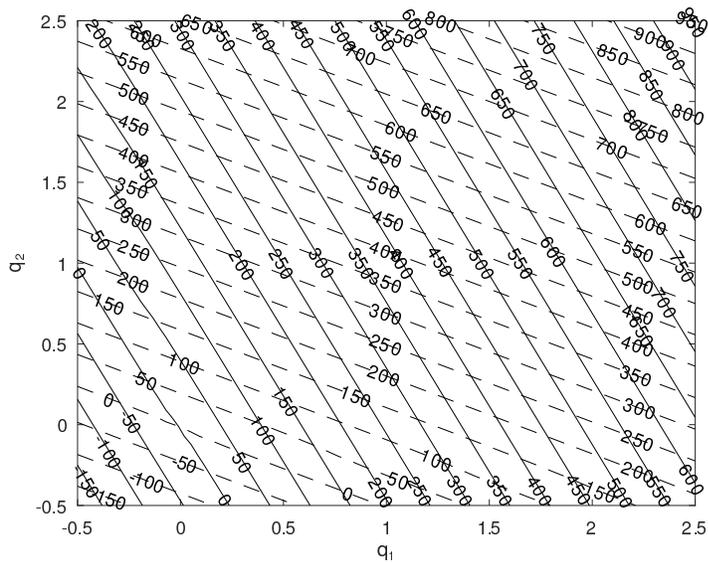


Рис. 2: Линии уровня функций $G_j(\mathbf{q})$.

Итак, при достаточно исчерпывающем численном подтверждении замеченной закономерности с помощью метрик обобщенной линейности отображений $F_j(\mathbf{q})$ мы получим, что, во-первых, обратная задача должна всегда иметь единственное решение и, во-вторых, задача хорошо поддается численному решению: для решения данной задачи пригоден как метод Ньютона, так и метод наискорейшего покоординатного спуска с предобуславливателем, учитывающим направление спуска.

Список литературы

- [1] Chebotarev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H. Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange // J. Math. Anal. Appl. 2018. V. 460. N 2. P. 737-744.
- [2] Chebotarev A.Yu., Pinnau R. An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 472. N 1. P. 314-327.
- [3] Kovtanyuk A., Chebotarev A., Turova V., Sidorenko I., Lampe R. An inverse problem for equations of cerebral oxygen transport // Appl. Math. Comput. 2021. V. 402. P. 126154.
- [4] Kovtanyuk A., Chebotarev A., Turova V., Sidorenko I., Lampe R. Inverse problem for a linearized model of oxygen transport in brain // 2020 Days on Diffraction (DD). 2020. P. 44-49.
- [5] Kovtanyuk A., Chebotarev A., Turova V., Sidorenko I., Lampe R. Non-stationary model of cerebral oxygen transport with unknown sources // Mathematics. 2021. V. 9. N 8. P. 910.
- [6] Siggers J.H., Leungchavaphongse K., Ho C.H., Repetto R. Mathematical model of blood and interstitial flow and lymph production in the liver // Biomechanics and modeling in mechanobiology. 2013. V. 13. N 2. P. 363-378.
- [7] Chebotarev A.Yu., Park N.M., Mesenev P.R., Kovtanyuk A.E. Mathematical modeling of complex heat transfer in the context of the endovenous laser ablation // Journal of Physics: Conference Series. 2023. V. 2514. N 1. P. 012006.