

Однозначность решения обратной задачи для уравнений сложного теплообмена

Гренкин Г.В.*

* *Владивостокский государственный университет*

Владивосток, 690014, ул. Гоголя, 41

e-mail: glebgrenkin@gmail.com

Рассмотрена задача идентификации мощностей источников при известных их объемных плотностях по данным средней температуры каждого из них, где для моделирования процесса теплообмена производится учет лучистой энергии с помощью диффузионного приближения уравнения переноса излучения. Ранее была установлена разрешимость указанной обратной задачи и единственность решения при определенном условии на коэффициенты уравнений. В настоящей работе построен алгоритм, монотонная сходимость которого доказана при условии только на коэффициенты, участвующие в граничных условиях. Из сходимости алгоритма вытекает существование решения обратной задачи, обеспечивающего минимальную суммарную энергию, сосредоточенную в каждом источнике, среди всех других возможных решений. Вычислительные эксперименты показывают, что поверхности уровня нелинейных отображений мощностей источников в средние температуры источников выражаются линейными уравнениями.

Ключевые слова: радиационный теплообмен, обратная задача, единственность решения, интегральное переопределение.

1 Введение

Настоящая статья посвящена исследованию стационарной модели сложного теплообмена на основе диффузионного (P_1) приближения. В работе [1] рассматривалась обратная задача восстановления мощностей тепловых источников при заданных их объемных плотностях и известных значениях функционалов источников на поле температуры. Установлено, что обратная задача имеет по крайней мере одно решение, и получены условия единственности решения, которые выполняются при достаточно большом коэффициенте температуропроводности.

Целью настоящей работы является расширение результатов упомянутой статьи. Чтобы изучить однозначную разрешимость обратной задачи, мы построим численный метод и докажем его монотонную сходимость к решению обратной задачи. Численный метод основан на замене на каждом шаге алгоритма нелинейной обратной задачи для нелинейной системы уравнений сложного теплообмена линейной задачей для уравнения теплопроводности, которому подчиняется суммарная энергия, которая складывается из тепловой энергии и теплового эквивалента лучистой энергии. При этом интегральное переопределение для теплового эквивалента лучистой энергии нам неизвестно, поэтому оно находится последовательными приближениями, и при определенных условиях на коэффициенты из граничных условий предсказание этой величины не будет превосходить ее значения на точном решении обратной задачи. Исходя из свойств алгоритма,

мы докажем, что предел последовательности приближений является минимальным решением обратной задачи, для которого интегральное переопределение теплового эквивалента лучистой энергии не превосходит этой величины у любого другого решения обратной задачи.

Отметим, что для аналогичных обратных задач для нестационарных уравнений сложного теплообмена однозначная разрешимость доказана [2]. Сходные обратные задачи, относящиеся к модели переноса кислорода в тканях мозга, исследовались в работах [3,4], и для нестационарных уравнений также доказана безусловная единственность решения [5]. Таким образом, настоящая работа пытается закрыть пробел в методологии доказательства однозначной разрешимости.

2 Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — липшицева ограниченная область с границей Γ , в которой происходит процесс радиационно-кондуктивного теплообмена, описываемый функциями θ — установившееся поле температуры, φ — поле интенсивности излучения, усредненной по всем направлениям. Установившийся процесс описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|^3\theta - \varphi) = \sum_{i=1}^m q_i f_i, \quad (1)$$

$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3\theta) = 0 \quad (2)$$

с краевыми условиями

$$a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b) = 0, \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0 \quad \text{на } \Gamma. \quad (3)$$

Здесь величины θ и φ являются нормированными. Положительные постоянные параметры a, b, α, κ_a характеризуют радиационно-термические свойства среды, граничные функции β, γ характеризуют отражающие свойства границы. Через $\partial/\partial n$ обозначена производная в направлении внешней нормали.

Для нахождения неизвестных интенсивностей источников тепла q_i для поля температуры задается интегральное переопределение:

$$(f_j, \theta) = r_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (4)$$

Здесь $f_j \in V'$ — заданные функционалы, выражающие объемные плотности источников.

Для формализации краевой задачи будем использовать пространство Соболева $V = H^1(\Omega)$. Через (f, v) обозначаем значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$ и скалярное произведение в $L^2(\Omega)$, если $f, v \in L^2(\Omega)$. Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям:

- (i) $\beta, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$, $\beta \geq \beta_0 > 0$, $\gamma \geq \gamma_0 > 0$, $0 \leq \theta_b \in L^\infty(\Gamma)$,
- (ii) $f_j \in V'$, f_j линейно независимы.

Определим операторы $A_1, A_2: V \rightarrow V'$ и функционалы $h_1, h_2 \in V'$ по формулам:

$$(A_1\theta, v) = a(\nabla\theta, \nabla v) + \int_{\Gamma} \beta\theta v \, d\Gamma, \quad (A_2\varphi, v) = \alpha(\nabla\varphi, \nabla v) + \int_{\Gamma} \gamma\varphi v \, d\Gamma,$$

$$(h_1, v) = \int_{\Gamma} \beta \theta_b v \, d\Gamma, \quad (h_2, v) = \int_{\Gamma} \gamma \theta_b^4 v \, d\Gamma.$$

Определение 1. Пара $\{\theta, \varphi\}$ называется слабым решением задачи (1)–(3), если

$$A_1 \theta + b \kappa_a (|\theta|^3 \theta - \varphi) = \sum_{i=1}^m q_i f_i + h_1, \quad A_2 \varphi + \kappa_a (\varphi - |\theta|^3 \theta) = h_2.$$

Определение 2. Вектор $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m)$ вместе с парой $\{\theta, \varphi\}$ есть решение обратной задачи (1)–(4), если для слабого решения $\{\theta = \theta(\mathbf{q}), \varphi = \varphi(\mathbf{q})\}$ выполняются равенства

$$F_j(\mathbf{q}) \equiv (f_j, \theta) = r_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (5)$$

В [1] доказаны следующие результаты.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (i), (ii). Для любых чисел q_i слабое решение задачи (1)–(3) существует и единственно.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (i), (ii). Существует решение обратной задачи (1)–(4).

3 Линейная обратная задача

Определим поле температуры η , вычисляемое без учета радиационных эффектов, имеющее смысл поля суммарной тепловой энергии, которое подчиняется уравнению

$$A_1 \eta = \sum_{i=1}^m q_i f_i + h_1. \quad (6)$$

Можно показать, что при известных полях θ, φ поле η можно найти по формуле $\eta = \theta + b A_1^{-1} (A_2 \varphi - h_2)$. Следовательно, можно определить нелинейный оператор $S: V \rightarrow V$, который заданному полю θ сопоставляет поле η :

$$\eta = S\theta = \theta + b \kappa_a A_1^{-1} A_2 (A_2 + \kappa_a I)^{-1} (|\theta|^3 \theta) - b \kappa_a A_1^{-1} (A_2 + \kappa_a I)^{-1} h_2.$$

Рассмотрим обратную задачу для уравнения (6) с интегральным переопределением

$$(f_j, \eta) = s_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (7)$$

состоящую в нахождении чисел q_i и поля η , удовлетворяющих соотношениям (6), (7).

Теорема 3. Обратная задача (6), (7) имеет единственное решение.

4 Численный метод

Для решения обратной задачи (1)–(4) предлагается следующий алгоритм.

1. Полагаем $s_j^{(1)} = r_j$ для $j = 1, \dots, m$. Считаем $k = 1$.
2. Решаем обратную задачу

$$A_1 \eta = \sum_{i=1}^m q_i f_i + h_1,$$

$$(f_j, \eta) = s_j^{(k)}, \quad j = 1, \dots, m,$$

находим коэффициенты $q_i = q_i^{(k)}$.

3. Находим $\theta = \theta^{(k)}$, $\varphi = \varphi^{(k)}$, где θ, φ — решение задачи (1)–(3) при $q_i = q_i^{(k)}$.
4. Вычисляем $s_j^{(k+1)} = r_j + b(f_j, A_1^{-1}(A_2 \varphi^{(k)} - h_2))$. Поскольку $(f_j, \theta^{(k)}) + b(f_j, A_1^{-1}(A_2 \varphi^{(k)} - h_2)) = s_j^{(k)}$, то $s_j^{(k+1)} = s_j^{(k)} + (r_j - (f_j, \theta^{(k)}))$.
5. Переходим к шагу 2, увеличив k на 1.

5 Сходимость алгоритма

Будем предполагать, что исходные данные дополнительно удовлетворяют условиям:

- (iii) $f_j \in L^2(\Omega)$, $f_j \geq 0$ п.в. в Ω ;
- (iv) $\beta/a \leq \gamma/\alpha$ п.в. на Γ .

Лемма 1. *Предположим, что выполнены условия (i)–(iv). Пусть $f \in L^{6/5}(\Omega)$, $f \geq 0$ п.в. в Ω . Тогда*

$$u = A_1^{-1} A_2 (A_2 + \kappa_a I)^{-1} f \geq 0 \text{ п.в. в } \Omega.$$

Доказательство. Функция u удовлетворяет уравнениям

$$A_1 u + \kappa_a z = f, \quad A_2 z + \kappa_a z = f.$$

Домножив скалярно каждое уравнение на тестовую функцию v и вычтя второе равенство из первого, придем к соотношению

$$(\nabla(au - \alpha z), \nabla v) + \int_{\Gamma} (\beta u - \gamma z) v d\Gamma = 0.$$

Согласно известному свойству, $z \geq 0$ п.в. в Ω , поэтому, пользуясь неравенством (iv), получаем

$$\beta u - \gamma z \leq \beta u - \frac{\beta}{a} \alpha z = \frac{\beta}{a} (au - \alpha z).$$

Полагая $v = \min\{au - \alpha z, 0\}$, получаем

$$\|\nabla v\|^2 + \int_{\Gamma} \frac{\beta}{a} v^2 d\Gamma \leq 0,$$

отсюда $v = 0$, так что $u \geq \frac{\alpha}{a} z \geq 0$ п.в. в Ω . □

Лемма 2. *Справедлива формула*

$$\frac{\partial^2 F_j(\mathbf{q})}{\partial q_i \partial q_l} = -12b\kappa_a(f_j, P[\theta]^* A_2(A_2 + \kappa_a I)^{-1}(|\theta| \theta u_i u_l)),$$

где $P[\theta]^*$ — оператор решения линеаризованной задачи $u = P[\theta]^* g$:

$$A_1 u + b\kappa_a(4|\theta|^3 u - z) = g, \quad A_2 z + \kappa_a(z - 4|\theta|^3 u) = 0,$$

через u_i обозначено $u_i = P[\theta]^* f_i \geq 0$.

Используя соотношение

$$(f_j, S\theta(\mathbf{q}^{(k+1)})) = (f_j, S\theta(\mathbf{q}^{(k)})) + (r_j - (f_j, \theta(\mathbf{q}^{(k)}))),$$

приходим к выводу, что, поскольку скорость изменения второго слагаемого становится меньше с увеличением его величины, то его знак будет сохраняться¹.

Следствие 1. *Для любого j последовательность приближений $s_j^{(k)}$ монотонно возрастает и ограничена сверху.*

Пусть выполняются условия (i)–(iv). Тогда существует решение \mathbf{q}^* , $\{\theta^*, \varphi^*\}$ обратной задачи (1)–(4), имеющее минимальную суммарную тепловую энергию в каждом источнике.

6 Числовой пример

Представим результаты вычислительного эксперимента. В качестве модели используем уравнения в одномерной области (слое) толщиной $L = 50$. Коэффициенты примерно соответствуют физическим параметрам воздуха: $a = 0.92$, $b = 18.7$, $\kappa_a = 0.01$, $\alpha = 3.3$, $\beta = 10$, $\gamma = 0.3$, $\theta_b = 0.4$. Определим два источника по формулам $f_1(x) = f_{10,20}(x)$, $f_2(x) = f_{30,40}(x)$, где $f_{l,r}(x) = 0.5(1 + \cos(2\pi(x - (l+r)/2)/(r-l)))$ при $x \in [l, r]$ и $f_{l,r}(x) = 0$ иначе. Вычисления проведены методом конечных разностей с помощью программы Joker FDM².

На рисунке 1 изображены линии уровня функций $F_1(q_1, q_2)$ (сплошными линиями) и $F_2(q_1, q_2)$ (пунктирными линиями). Можно видеть, что линии уровня практически являются прямыми линиями, параллельными друг другу, но не равностоящими друг от друга.

¹Предполагалось провести доказательство по индукции, что приближения обоих слагаемых суммарной тепловой энергии не превзойдут на каждой итерации соответствующих слагаемых на любом решении обратной задачи.

²<https://pastebin.com/bM0Q9K6a>

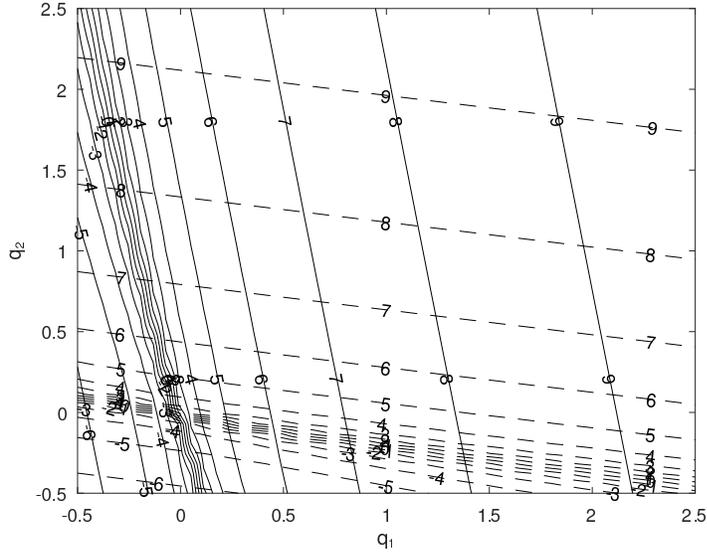


Рис. 1: Линии уровня функций $F_j(\mathbf{q})$.

7 Выводы

Мы установили, что при достаточной теплоизолированности области теплообмена (когда краевое условие для температуры близко к условию Неймана) гарантируется сходимость численного метода, из анализа которого вытекает существование решения обратной задачи, обеспечивающего минимум интегрального переопределения для суммарной энергии на каждом из источников.

Вычислительные эксперименты показали, что по крайней мере в отдельных случаях отображение $\mathbf{q} \mapsto F_j(\mathbf{q})$ имеет достаточно простую структуру: в каждой точке \mathbf{q} градиент $\nabla F_j(\mathbf{q})$ направлен одинаково, меняется только модуль градиента. Во-первых, это дает возможность утверждать, что обратная задача имеет ровно одно решение. Во-вторых, задача хорошо поддается численному решению: для решения данной задачи пригоден как метод Ньютона, так и метод наискорейшего покоординатного спуска с предобуславливателем, учитывающим направление спуска.

Автор полагает, что применение результатов моделирования в рамках рассмотренной системы уравнений не лежит на поверхности, и его следует искать не только в области теплообмена высоких температур. Так, поскольку модели со сходной структурой применялись для моделирования биологических процессов, то может представлять интерес исследование естественного механизма управления такими процессами. Наконец, данную обратную задачу можно рассматривать не только как задачу идентификации, но и как задачу управления в реальном времени, и предложенный численный метод должен обеспечивать стабильное управление при выполнении условий его сходимости.

Список литературы

- [1] Chebotarev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H. Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange // J. Math. Anal. Appl. 2018. V. 460. N 2. P. 737-744.
- [2] Chebotarev A.Yu., Pinnau R. An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 472. N 1. P. 314-327.
- [3] Kovtanyuk A., Chebotarev A., Turova V., Sidorenko I., Lampe R. An inverse problem for equations of cerebral oxygen transport // Appl. Math. Comput. 2021. V. 402. P. 126154.
- [4] Kovtanyuk A., Chebotarev A., Turova V., Sidorenko I., Lampe R. Inverse problem for a linearized model of oxygen transport in brain // 2020 Days on Diffraction (DD). 2020. P. 44-49.
- [5] Kovtanyuk A., Chebotarev A., Turova V., Sidorenko I., Lampe R. Non-stationary model of cerebral oxygen transport with unknown sources // Mathematics. 2021. V. 9. N 8. P. 910.