S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 517.95

DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 35R30

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Г.В. ГРЕНКИН

Abstract. The steady-state complex heat transfer model within the P_1-approximation of the radiative transfer equation is considered. An inverse problem of reconstructing heat sources intensities with given volume densities from the prescribed values of functionals of heat sources densities on the field of total energy is investigated. The uniqueness of the inverse problem solution is proved.

Keywords: radiative heat transfer, inverse problem, integral overdetermination.

1. Введение

Моделирование переноса тепла, учитывающее эффекты, связанные с распространением теплового излучения, актуально как благодаря математической новизне задач, так и в связи с возможным применением результатов теоретического и численного анализа на практике.

Обширное количество литературы посвящено математическому исследованию уравнений сложного теплообмена в рамках P_1-приближения уравнения переноса излучения. В работах [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] исследована корректность стационарных и нестационарных моделей, в [8, 9, 10] изучены задачи оптимального управления граничными коэффициентами для этих моделей. В работах [11, 12] рассмотрены обратные задачи восстановления зависящих от времени интенсивностей источников для нестационарных уравнений сложного теплообмена с интегральным переопределением, доказана их однозначная разрешимость, когда в качестве переопределения берется интеграл от температуры с весовой функцией, равной объемной плотности источника тепла. Наконец, в

Grenkin, G.V., Uniqueness of solution of an inverse problem for a complex heat transfer model.

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

статьях [13, 14] для стационарных моделей сложного теплообмена поставлены обратные задачи восстановления неизвестных интенсивностей источников тепла по известным их объемным плотностям и заданному интегральному переопределению — значениям функционалов источников на поле температуры. Доказано, что по этим данным всегда восстанавливаются интенсивности источников вместе с полем температуры, но единственность такого восстановления установлена при достаточно большом коэффициенте температуропроводности. Сходные обратные задачи, но для линейных уравнений, изучались, например, в работах [15, 16].

В настоящей работе обратная задача поставлена по-другому — функционалы источников вычисляются не на поле температуры, а на специально определенном поле суммарной энергии, выраженной в единицах температуры. Для такой постановки показано, что якобиан отображения интенсивностей источников в значения функционалов является P-матрицей, отсюда из теоремы Гейла – Никайдо вытекает однозначность этого отображения. Таким образом, установлена единственность решения обратной задачи.

2. Постановка обратной задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — липшицева ограниченная область, в которой происходит процесс радиационно-кондуктивного теплообмена, описываемый функциями θ — установившееся поле температуры, φ — поле интенсивности излучения, усредненной по всем направлениям. Установившийся процесс описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|^3\theta - \varphi) = \sum_{i=1}^{m} q_i f_i, \tag{1}$$

$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3\theta) = 0 \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b) = 0, \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0. \tag{3}$$

Для нахождения неизвестных интенсивностей источников тепла q_i для поля температуры задается интегральное переопределение:

$$(f_j, S\theta) = r_j, \ j = 1, \dots, m. \tag{4}$$

Здесь $f_j \in V'$ — заданные функционалы, выражающие объемные плотности источников, S — оператор, который по полю температуры θ дает поле суммарной энергии, выраженной в единицах температуры, он будет определен ниже.

Для формализации краевой задачи будем использовать пространство Соболева $V = H^1(\Omega)$. Через (f, v) обозначаем значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$ и скалярное произведение в $L^2(\Omega)$, если $f, v \in L^2(\Omega)$. Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям:

(i) $\beta, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$, $\beta \geq \beta_0 > 0$, $\gamma \geq \gamma_0 > 0$, $0 \leq \theta_b \in L^\infty(\Gamma)$,

(ii) $f_j \in V'$, f_j линейно независимы.

Определим операторы $A_1, A_2 \colon V \to V'$ и функционалы $h_1, h_2 \in V'$ по формулам:

$$(A_1\theta, v) = a(\nabla\theta, \nabla v) + \int_\Gamma \beta\theta v \, d\Gamma, \quad (A_2\varphi, v) = \alpha(\nabla\varphi, \nabla v) + \int_\Gamma \gamma\varphi v \, d\Gamma,$$

$$(h_1, v) = \int_\Gamma \beta\theta_b v \, d\Gamma, \quad (h_2, v) = \int_\Gamma \gamma\theta_b^4 v \, d\Gamma.$$

Определение 1. *Пара $\{\theta, \varphi\}$ называется слабым решением задачи (1)–(3), если*

$$A_1\theta + b\kappa_a(|\theta|^3\theta - \varphi) = \sum_{i=1}^{m} q_i f_i + h_1, \quad A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3\theta) = h_2.$$

Теорема 1. [7] *Пусть выполнены условия (i), (ii). Для любых чисел q_j слабое решение задачи (1)–(3) существует и единственно.*

Определим нелинейный оператор $S\colon V \to V$, действующий по формуле $S\theta = \theta + b\kappa_a A_1^{-1}A_2(A_2 + \kappa_a I)^{-1}(|\theta|^3\theta)$. Физический смысл этого оператора состоит в нахождении по полю температуры θ поля суммарной энергии тепла и излучения, выраженной в единицах температуры. Например, в частном случае $\dfrac{1}{a}A_1 = \dfrac{1}{\alpha}A_2$ имеем $S\theta = \dfrac{1}{a}(a\theta + b\alpha\varphi)$, где $\varphi = (A_2 + \kappa_a I)^{-1}(\kappa_a|\theta|^3\theta)$. В общем случае $S\theta = \theta + u$, где u — решение задачи

$$A_1 u + b\kappa_a(|\theta|^3\theta - \varphi) = 0, \quad A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3\theta) = 0.$$

Здесь поле u отражает количество энергии излучения, перешедшее в тепло в результате поглощения излучения средой.

Определение 2. *Вектор $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_m)$ вместе с парой $\{\theta, \varphi\}$ есть решение обратной задачи (1)–(4), если для слабого решения $\{\theta = \theta(\mathbf{q}), \varphi = \varphi(\mathbf{q})\}$ выполняются равенства*

$$F_j(\mathbf{q}) \equiv (f_j, S\theta) = r_j, \; j = 1, \ldots, m. \tag{5}$$

3. Единственность решения обратной задачи

Метод исследования единственности решения нелинейной системы (5) состоит в анализе якобиана системы. Мы покажем, что якобиан данной системы равен определителю матрицы Грама относительно скалярного произведения, порожденного положительным оператором, откуда следует положительная определенность якобиана. Далее применяется теорема о глобальной однозначности отображения с положительной матрицей Якоби.

Лемма 1. *Справедлива формула*

$$\frac{\partial F_j(\mathbf{q})}{\partial q_i} = \left(f_i, P[\theta(\mathbf{q})](S'_\theta[\theta(\mathbf{q})])^* f_j\right),$$

где $P[\theta]\colon V' \to V$ — оператор, который по функции g дает решение $p_1 = P[\theta]g$ сопряженной задачи

$$A_1 p_1 + 4\kappa_a|\theta|^3(bp_1 - p_2) = g, \quad A_2 p_2 + \kappa_a(p_2 - bp_1) = 0,$$

$S'_\theta[\theta]\colon V \to V$ — оператор, действующий по формуле $S'_\theta[\theta]h = h + 4b\kappa_a A_1^{-1}A_2(A_2 + \kappa_a I)^{-1}(|\theta|^3 h)$.

Доказательство. Составляя и дифференцируя стандартным образом функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(\theta, \mathbf{q}, p) = (f_j, S\theta) + (\mathcal{F}(\theta, \mathbf{q}), p),$$

где $\mathcal{F}(\theta, \mathbf{q}) = 0$ — уравнение, связывающее θ и $\mathbf{q}$,

$$(\mathcal{F}(\theta, \mathbf{q}), v) = (A_1\theta, v) + b\kappa_a \left(|\theta|^3\theta - (A_2 + \kappa_a I)^{-1}(b\kappa_a|\theta|^3\theta), v\right) - \sum_{i=1}^{m} q_i(f_i, v),$$

получим выражение для градиента функционала $F_j(\mathbf{q})$ [17, с. 63]:

$$\frac{\partial F_j(\mathbf{q})}{\partial q_i} = \mathcal{L}'_{\mathbf{q}}(\theta(\mathbf{q}), \mathbf{q}, p(\mathbf{q})),$$

где $p(\mathbf{q})$ — решение сопряженной задачи

$$\mathcal{L}'_\theta(\theta(\mathbf{q}), \mathbf{q}, p) = 0.$$

Отсюда получаем условие леммы. Отметим, что требуемое условие непрерывной обратимости оператора $\mathcal{F}'_\theta(\theta, \mathbf{q})$ следует из результатов [10]. □

Следствие 1. *Справедлива формула*

$$\frac{\partial F_j(\mathbf{q})}{\partial q_i} = (f_j, S'_\theta[\theta(\mathbf{q})]P[\theta(\mathbf{q})]^* f_i) = \left(f_j, A_1^{-1} f_i\right),$$

где $P[\theta]^*\colon V' \to V$ — оператор, который по функции g дает решение $u = P[\theta]^* g$ линеаризованной задачи

$$A_1 u + b\kappa_a(4|\theta|^3 u - z) = g, \quad A_2 z + \kappa_a(z - 4|\theta|^3 u) = 0.$$

Следствие 2. *Якобиан* $\dfrac{\partial F_j(\mathbf{q})}{\partial q_i}$ *является P-матрицей в любой точке* $\mathbf{q}$.

Теорема 2. *Обратная задача (1)–(4) имеет не более одного решения.*

Доказательство. Из теоремы Гейла–Никайдо [18] следует, что отображение $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{q})$ однозначно. □

4. Выводы

Таким образом, для корректной постановки обратной задачи данные измерений должны относиться не только к тепловой энергии, выраженной значением функционала плотности источника тепла на поле температуры, но и к энергии излучения, что приводит к необходимости задания значений функционалов на поле суммарной энергии для обеспечения единственности решения обратной задачи.

Полученные результаты позволяют применять для численного решения обратной задачи метод Ньютона, а также специально разработанные методы для монотонных отображений [19, 20, 21]. Отметим, что в случае, когда в качестве функционалов берется результат умножения поля температуры на произвольную весовую функцию, отличную от функции плотности источника, для обратной задачи может быть нарушено существование решения. Вопрос единственности решения, вообще говоря, является открытым.

В общем случае, при условии, что плотности весовых функций в интегральном переопределении знакопостоянны и, соответственно, отображение интенсивностей источников в значения функционалов на поле суммарной энергии является покоординатно монотонным, для решения обратной задачи пригоден метод глобального поиска — метод переменных направлений, который производит поиск решения во всех возможных направлениях.

References

[1] R. Pinnau, *Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modeled by SP_1-system,* Commun. Math. Sci., **5**:4 (2007), 951–969.

[2] O. Tse, R. Pinnau, *Optimal control of a simplified natural convection–radiation model*, Commun. Math. Sci., **11**:3 (2013), 679–707.

[3] G.V. Grenkin, A.Yu. Chebotarev, *Nonhomogeneous nonstationary problem of complex heat transfer*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **12** (2015), 562–576.

[4] G.V. Grenkin, A.Yu. Chebotarev, *Nonstationary problem of free convection with radiative heat transfer*, Comput. Math. Math. Phys., **56**:2 (2016), 278–285.

[5] A.E. Kovtanyuk, A.Yu. Chebotarev, *Stationary free convection problem with radiative heat exchange*, Differ. Equations, **50**:12 (2014), 1592–1599.

[6] A.E. Kovtanyuk, A.Yu. Chebotarev, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **20**:3 (2015), 776–784.

[7] A.Yu. Chebotarev, G.V. Grenkin, A.E. Kovtanyuk, *Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer*, ESAIM Math. Model. Numer. Anal., **51**:6 (2017), 2511–2519.

[8] A.E. Kovtanyuk, A.Yu. Chebotarev, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive–convective–radiative heat transfer*, J. Math. Anal. Appl., **412**:1 (2014), 520–528.

[9] G.V. Grenkin, A.Yu. Chebotarev, A.E. Kovtanyuk, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Boundary optimal control problem of complex heat transfer model*, J. Math. Anal. Appl., **433**:2 (2016), 1243–1260.

[10] A.Yu. Chebotarev, A.E. Kovtanyuk, G.V. Grenkin, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model*, Appl. Math. Comput., **289** (2016), 371–380.

[11] G.V. Grenkin, A.Yu. Chebotarev, *Inverse problem for equations of complex heat transfer*, Comput. Math. Math. Phys., **59**:8 (2019), 1420–1430.

[12] A.Yu. Chebotarev, R. Pinnau, *An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer*, J. Math. Anal. Appl., **472**:1 (2019), 314–327.

[13] A.Yu. Chebotarev, G.V. Grenkin, A.E. Kovtanyuk, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange*, J. Math. Anal. Appl., **460**:2 (2018), 737–744.

[14] A.Yu. Chebotarev, *Inverse problem for equations of complex heat transfer with Fresnel matching conditions*, Comput. Math. Math. Phys., **61**:2 (2021), 303–311.

[15] S.G. Pyatkov, *On some inverse problems for elliptic equations and systems*, J. Appl. Industr. Math., **13**:4 (2010), 83–96.

[16] S.G. Pyatkov, M.V. Uvarova, *On determining the source function in heat and mass transfer problems under integral overdetermination conditions*, J. Appl. Industr. Math., **19**:4 (2016), 93–100.

[17] M. Hinze, R. Pinnau, M. Ulbrich, S. Ulbrich, *Optimization with PDE constraints*, Springer, 2009.

[18] D. Gale, H. Nikaido, *The Jacobian matrix and global univalence of mappings*, Mathematische Annalen, **159**:2 (1965), 81–93.

[19] M.V. Solodov, B.F. Svaiter, *A globally convergent inexact Newton method for systems of monotone equations*, Reformulation: Nonsmooth, piecewise smooth, semismooth and smoothing methods, Springer, Boston, MA, 1998. 355–369.

[20] W. Cheng, *A PRP type method for systems of monotone equations*, Math. Comput. Model., **50**:1–2 (2009), 15–20.

[21] X. Fang, *A class of new derivative-free gradient type methods for large-scale nonlinear systems of monotone equations*, J. Inequal. Appl., **2020**:1 (2020), 1–13.

Gleb Vladimirovich Grenkin
Vladivostok State University,
ul. Gogolya, 41,
690014, Vladivostok, Russia
Email address: glebgrenkin@gmail.com