S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 144–144 (2015) УДК 517.9
DOI 10.17377/semi.2015.12.xxx MSC 35Q20

ОЦЕНКА КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА ДЛЯ ЧЕБЫШЕВСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УЗЛОВ

О.В. ГЕРМИДЕР, В.Н. ПОПОВ

Abstract. A two-sided estimate of the Lebesgue constant of the Lagrange interpolation rational process with nodes at the zeros of the Chebyshev polynomials is carried out. Expressions are obtained for the upper and lower bounds of this estimate in the form of a finite sum of an asymptotic alternating series. Their analysis was carried out to improve the rate of convergence of the process. Based on these expressions, the values of these boundaries close to each other are calculated depending on the number of nodes. Error estimates are obtained for each of the boundaries.

Keywords: polynomial approximation, Chebyshev nodes, Lebesgue constant.

1. Введение

Интерполяция Лагранжа – это классический метод аппроксимации непрерывной на отрезке функции полиномом, значения которого совпадают со значениями интерполируемой функции в некоторых фиксированных точках отрезка, называемых узлами интерполяции [1].

Пусть непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f = f(x)$ задана своими значениями f_0, f_1, …, f_n в точках x_0, x_1, …, x_n. Тогда интерполяционный многочлен в форме Лагранжа имеет вид

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k l_k(x), \tag{1}$$

Germider, O.V., Popov, V.N. Estimating the Lebesgue constant for the Chebyshev distribution .

Поступила 8 сентября 2022 г., опубликована .

где $l_k(x)$ – фундаментальные полиномы Лагранжа:

(2) $$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad k = \overline{0, n}.$$

В случае, когда в узлах интерполяции вычислены приближенные значения $\tilde{f}_k$ функции f с погрешностью, не превышающей величины $\delta > 0$: $|f_k - \tilde{f}_k| < \delta$, то отклонение построенного возмущенного полинома $\tilde{p}_n(x)$ от $p_n(x)$ можно оценить следующим образом:

(3) $$|p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| = |\sum_{k=0}^{n}(f_k - \tilde{f}_k)l_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{n}|f_k - \tilde{f}_k||l_k(x)| \leq \delta\sum_{k=0}^{n}|l_k(x)| = \\ = \delta\lambda_n(x) \leq \delta\Lambda_n.$$

Здесь $\lambda_n(x)$ и Λ_n – функция и константа Лебега для заданного множества узлов интерполяции $\Omega_n = \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$:

(4) $$\lambda_n(x) = \sum_{k=0}^{n}|l_k(x)|,$$

(5) $$\Lambda_n = \max_{x\in[a,\, b]} \lambda_n(x) = \max_{x\in[a,\, b]} \sum_{k=0}^{n}|l_k(x)|.$$

Как отмечено в [2], константа Лебега относится к основным характеристикам интерполяционного процесса. Ее значение показывает, во сколько раз возрастает погрешность вычисления интерполяционного полинома Лагранжа по сравнению с погрешностью вычисления функции. Кроме того оценка сверху для константы Лебега позволяет провести анализ скорости приближения непрерывной функции интерполяционными многочленами [1]. Следует заметить, что Λ_n существенно зависит от взаимного расположения узлов интерполяции и ее поведение с увеличением числа узлов может иметь различный характер [1]–[12].

Обозначим

(6) $$\omega_n(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j).$$

Учитывая, что $\omega'_{n,x}(x_k) = \prod\limits_{j=0,\, j\neq k}^{n}(x_k - x_j)$, базис Лагранжа (2) для Ω_n можно представить в виде

(7) $$l_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega'_{n,x}(x_k)}, \quad k = \overline{0, n},$$

соответственно, перепишем выражение для константы Лебега (5) как

(8) $$\Lambda_n = \max_{x\in[a,\, b]} \sum_{k=0}^{n}\left|\frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega'_{n,x}(x_k)}\right|.$$

Для того чтобы равномерная норма полинома $\omega_n(x)$ имела минимальное значение на отрезке $[-1,1]$, в качестве узлов интерполяции выберем нули полинома Чебышева степени $n+1$ [1]:

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2(n+1)}\right), \quad k=\overline{0,n}. \tag{9}$$

Не нарушая общности ограничимся случаем, когда $x \in [-1,\,1]$, поскольку

$$u = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}, \quad u \in [a,\,b],\; x\in[-1,\,1],$$

В силу единственности существования интерполяционного многочлена Лагранжа на множестве Ω_n и того факта, что коэффициент при x^{n+1} равен 2^n [13], получаем

$$\omega_n(x) = 2^{-n}T_{n+1}(x). \tag{10}$$

Полагая

$$x=\cos t, \quad x_k=\cos t_k, \quad t_k=\frac{\pi(2k+1)}{2(n+1)}, \quad k=\overline{0,n}, \tag{11}$$

имеем

$$T_{n+1}(x)=\cos(n+1)t, \quad T'_{n+1,x}(x_k)=\frac{(n+1)\sin((n+1)t_k)}{\sqrt{1-x_k^2}}=\frac{(-1)^k(n+1)}{\sin t_k}. \tag{12}$$

Подставляя (10) с учетом (12) в (8), получаем

$$\Lambda_n = \max_{t\in[0,\,\pi]}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{\cos(n+1)t\sin t_k}{(n+1)(\cos t-\cos t_k)}\right|. \tag{13}$$

В [1], [10] показано, что функция Лебега

$$\lambda_n(t) = \sum_{k=0}^{n}\left|\frac{\cos(n+1)t\sin t_k}{(n+1)(\cos t-\cos t_k)}\right|, \tag{14}$$

на отрезке $[0,\,\pi]$ принимает свое наибольшее значение при $t=0$. Тогда

$$\Lambda_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\operatorname{ctg}\left(\frac{t_k}{2}\right). \tag{15}$$

Вычислению константы Лебега на основе (15) и посвящена представленная работа. Выбор нулей полинома Чебышева в качестве узлов интерполяции обуславливлен и сохранением устойчивости к ошибкам округления приближения интерполяционным полиномом.

2. Вычисление константы Лебега

Разложим функцию $\operatorname{ctg} t$ в ряд Маклорена на $(0,\pi/2)$ [14]

$$\operatorname{ctg} t = \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i-1}t^{2i-1}, \tag{16}$$

где c_{2i-1} выражаются через числа Бернулли B_{2i} как

$$c_0 = 1, \quad c_{2i-1} = -\frac{2^{2i}|B_{2i}|}{(2i)!}, \quad i\geq 1. \tag{17}$$

Для нахождения чисел Бернулли в (17) применяем рекуррентную формулу [15]

$$\frac{B_1}{(2i)!} + \sum_{j=0}^{i} \frac{B_{2j}}{(2(i-j)+1)!(2j)!} = 0,\ B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2}, i \geq 1. \tag{18}$$

В результате

$$\operatorname{ctg} t = \frac{1}{t} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{2i}|B_{2i}|}{(2i)!} t^{2i-1}. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (15), получаем

$$\Lambda_n = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^{-1} + R_{1,n}, \tag{20}$$

$$R_{1,n} = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi^{2i-1}|B_{2i}|4^{1-i}}{(n+1)^{2i}(2i)!} \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^{2i-1}. \tag{21}$$

Оценим первый член ряда (20). Обозначим

$$F_{0,n} = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^{-1}. \tag{22}$$

Применяя свойство функции $\Psi(x) = \dfrac{\mathrm{d} \ln \Gamma(x)}{\mathrm{d}x}$ [18]

$$\Psi(1+x) = \Psi(x) + \frac{1}{x}, \tag{23}$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция, перепишем выражение (22) в виде

$$2F_{0,n} = \Psi\left(n+1+\frac{1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{1}{2}\right). \tag{24}$$

Воспользовавшись формулой [19], [20], для вычисления значения $\Psi(1/2)$

$$\Psi\left(\frac{p}{q}\right) = 2\sum_{k=1}^{\left[\frac{q}{2}\right]} \cos\left(\frac{2\pi pk}{q}\right) \ln\left(\sin\left(\frac{\pi k}{q}\right)\right) - \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi p}{q}\right) - \ln(2q) - \gamma, \tag{25}$$

где $[q/2]$ – целая часть $q/2$, q и p – натуральные числа и $p < q$. Находим значение $\Psi(1/2)$:

$$\Psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2. \tag{26}$$

Учитывая выражение Бине [15]

$$\Psi(x) = \ln(x) - \frac{1}{2x} - \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{1}{\exp(t)-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) \exp(-tx)\mathrm{d}t, \tag{27}$$

и разложение в ряд Маклорена подынтегральной функции, стоящей в скобках [15]

$$\frac{1}{\exp(t)-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} = \sum_{i=1}^{\infty} B_{2i} t^{2i-1}, \tag{28}$$

получаем

$$\Psi(x)=\ln(x)-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q}B_{2i}\frac{1}{ix^{2i}}-\\ -\int_0^\infty\left(\frac{1}{\exp(t)-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{q}B_{2i}t^{2i-1}\right)\exp(-tx)\mathrm{d}t. \tag{29}$$

Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}B_{2i}x^{-2i}i^{-1}$ является знакочередующимся и асимптотическим, поэтому ограничиваем суммирование на члене ряда с индексом q, за которым последующие начинают неограниченно расти. Найдем q из неравенства

$$\frac{|B_{2(q+1)}|qx^{2q}}{|B_{2q}|(q+1)x^{2(q+1)}}\leq 1. \tag{30}$$

Учитывая, что числа Бернулли через дзета-функцию Римана $\zeta(x)$ выражаются как

$$|B_{2i}|=\frac{2\zeta(2i)(2i)!}{(2\pi)^{2i}},\quad i\geq 1, \tag{31}$$

имеем

$$\frac{|B_{2(q+1)}|qx^{2q}}{|B_{2q}|(q+1)x^{2(q+1)}}=\frac{\zeta(2(q+1))2q(2q-1)x^{2q}}{(2\pi)^2\zeta(2q)x^{2(q+1)}}. \tag{32}$$

Учитывая, что $\zeta(2(q+1))/\zeta(2q)\leq 1$, при $x=\frac{1}{2}+n+1$ $(n\geq 1)$ получаем

$$\frac{2q(2q-1)\left(\frac{1}{2}+n+1\right)^{2q}}{(2\pi)^2\left(\frac{1}{2}+n+1\right)^{2(q+1)}}\leq 1.$$

Откуда

$$q_n=\left[\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{16\pi^2\left(\frac{1}{2}+n+1\right)^2+1}\right)\right], \tag{33}$$

Из (33) следует, что значение q_n увеличивается с ростом n.

Абсолютная погрешность вычисления интеграла в (29) не превосходит по модулю первого отброшенного i-го слагаемого $i\leq q_n$ в сумме

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q_n}|B_{2i}|\frac{1}{ix^{2i}}.$$

Поскольку $B_{2i}=(-1)^{i+1}|B_{2i}|$ $(i\geq 1)$, а при $n=1$ значение q_n равно 8, то для любого $x=\frac{1}{2}+n+1$ $(n\geq 1)$ имеем следующую оценку

$$\Psi_{n,0}+\Psi_{n,2m_1-1}\leq\Psi\left(n+1+\frac{1}{2}\right)\leq\Psi_{n,0}+\Psi_{n,2m_1},\ 2\leq 2m_1\leq q_n, \tag{34}$$

где

$$\Psi_{n,0}=-\ln(2)+\ln(3+2n)-\frac{1}{3+2n},$$

$$\Psi_{n,l}=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}\left(\frac{1}{2}+n+1\right)^{-2i}\frac{B_{2i}}{i}. \tag{35}$$

Подставляя (26) и (34) в (24), имеем

$$F^*_{0,n} + \frac{1}{2}\Psi_{n,2m-1} \le F_{0,n} \le F^*_{0,n} + \frac{1}{2}\Psi_{n,2m}, \tag{36}$$

$$F^*_{0,n} = \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln(3+2n) - \frac{1}{2(3+2n)}. \tag{37}$$

Для нахождения членов с $i \ge 1$ в (21) введем обозначения

$$F_{2i-1,n} = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^{2i-1}, \tag{38}$$

$$\hat{s}_{j,n} = \sum_{k=1}^{n} k^j, \quad j = 2i-1. \tag{39}$$

Тогда

$$F_{2i-1,n} = \hat{s}_{j,2(n+1)} - 2^j \hat{s}_{j,n+1}. \tag{40}$$

Применяя к (40) формулу [17]

$$\hat{s}_{j,n-1} = j! \sum_{k=0}^{j} \frac{B_k n^{j+1-k}}{k!(j+1-k)!}, \tag{41}$$

с учетом $B_{2k+1} = 0$ $(k \ge 1)$ имеем

$$F_{2i-1,n} = \frac{(2i)! 4^{i-1}}{i} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{B_{2k}(n+1)^{2i-2k}\left(2^{1-2k}-1\right)}{(2k)!(2i-2k)!}. \tag{42}$$

Подставляя (38) и (42) в (21), приходим к следующему выражению для $R_{1,n}$:

$$R_{1,n} = -\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi^{2i}|B_{2i}|}{i} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{B_{2k}\left(2^{1-2k}-1\right)}{(n+1)^{2k}(2k)!(2i-2k)!} = \tag{43}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi^{2i}|B_{2i}|}{i(2i)!} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j}(1-2^{1-2j})}{(n+1)^{2j}(2j)!} \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{|B_{2i}|\pi^{2i} \prod_{q=1}^{2j-1}(2i-q)}{(2i)!}.$$

Интегрируя (19) по t и подставляя значение $t = \pi/2$, получаем

$$\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi^{2i}|B_{2i}|}{i(2i)!}.$$

Откуда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi^{2i}|B_{2i}|}{i(2i)!} = 2\ln\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{44}$$

Последовательно дифференцируя (19) $2j-1$ раз по t ($j \geq 1$), находим

$$\sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{|B_{2i}|\pi^{2i} \prod_{q=1}^{2j-1}(2i-q)}{(2i)!} = \tag{45}$$
$$= -\left(\operatorname{ctg}^{(2j-1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2^{2j-1}|B_{2j}|}{j}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j} - (2j-1)!.$$

Для получения значений производных функции $\operatorname{ctg} t$ в точке $\pi/2$ воспользуемся ее разложением в ряд Фурье

$$\operatorname{ctg} t = \frac{1}{t} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{t-\pi i} + \frac{1}{t+\pi i}\right), \quad 0 < t < \pi. \tag{46}$$

Последовательно дифференцируя (46) по t, получаем

$$\operatorname{ctg}^{(2j-1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(1-2^{2j})2^{2j-1}}{j}|B_{2j}|, \qquad j \geq 1. \tag{47}$$

Подставляя (44) и (45) в (43) и учитывая (47), имеем

$$R_{1,n} = -\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_{2j}(1-2^{1-2j})}{j(n+1)^{2j}}\left(\frac{\pi^{2j}(2^{2j}-2)|B_{2j}|}{(2j)!} - 1\right). \tag{48}$$

Ряд (48) является знакочередующимся и асимптотическим. Используя (31), восстанавливаем предельное значение j

$$j_n = \left[\frac{1}{4}\left(3 + \sqrt{16\pi^2(n+1)^2 + 1}\right)\right] - 1. \tag{49}$$

Из (49) следует, что для $n = 1$ значение j_n равно 6 и увеличивается с ростом n.

Подставляя (22) и (48) в (20) и учитывая (35)-(37), окончательно приходим к следующей оценке для Λ_n

$$m_n \leq \Lambda_n \leq M_n, \tag{50}$$

$$m_n = m_n^* - \frac{2^{4l+2}B_{4l+2}}{\pi(2l+1)(2n+3)^{4l+2}}, \tag{51}$$

$$M_n = m_n^* + \frac{B_{4l+2}}{(2l+1)\pi}\left(\frac{(1-2^{-1-4l})}{(n+1)^{4l+2}}\left(\frac{\pi^{4l+2}(2^{4l+2}-2)|B_{4l+2}|}{(4l+2)!} - 1\right)\right), \tag{52}$$

$$m_n^* = \frac{2}{\pi}\left(\gamma + \ln\left(\frac{4}{\pi}\right) + \ln(3+2n) - \frac{1}{3+2n}\right) + \tag{53}$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{2l}\frac{B_{2j}}{j}\left(\frac{(1-2^{1-2j})}{(n+1)^{2j}}\left(\frac{\pi^{2j}(2^{2j}-2)|B_{2j}|}{(2j)!} - 1\right) - \frac{2^{2j}}{(2n+3)^{2j}}\right), \quad 2l-1 < j_n.$$

3. Анализ полученных результатов

Проведем сравнение двусторонней оценки (50) со значениями самой константы Лебега (15), а также с аналогичными результатами, представленными в [3], [5] и [8].

Согласно [5] константа Лебега интерполяционного процесса Лагранжа по узлам Чебышева имеет следующую оценку [3], [5]:

$$\Lambda_n = \frac{2}{\pi}\left(\gamma + \ln\left(\frac{8}{\pi}\right) + \ln(1+n)\right) + \alpha_n, \tag{54}$$

$$0 < \alpha_n < \frac{1}{72(n+1)^2}. \tag{55}$$

В [8] получено асимптотическое представление Λ_n:

$$\Lambda_n = \frac{2}{\pi}\left(\gamma + \ln\left(\frac{8}{\pi}\right) + \ln(1+n)\right) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_i}{(n+1)^{2i}}, \tag{56}$$

где коэффициенты A_i находятся как [3], [8]

$$A_i = \frac{4\cdot(-1)^{i-1}(1-2^{1-2i})(2i-1)!\zeta(2i)}{\pi(2\pi)^{2i}}\Bigg(1+ + \sum_{j=1+i}^{\infty}\frac{(2j-1)!\zeta(2j)}{(2j-2i)!(2i-1)!2^{2j-1}}\Bigg). \tag{57}$$

В таблице 1 представлены результаты вычислений отклонений величины Λ_n от нижней и верхней границ ее оценки (50) при различных значениях n. Расчеты выполнены на основании (51)-(53) при $l=1$. Там же приведены соответствующие значения отклонений, восстановленные по формулам (54)-(57). При использовании (56) и (57) суммирование в (56) ограничено $i=1$ для верхней границы и $i=2$ для нижней границы, в (57) – значением $j=(i+1)+10$.

Таблица 1. Значения $\Lambda_n - m_n$ и $M_n - \Lambda_n$ в зависимости от n

n	$\Lambda_n - m_n$			$M_n - \Lambda_n$		
	(49)	[5]	[8]	(49)	[5]	[8]
1	$3.1\cdot10^{-5}$	$1.0\cdot10^{-2}$	$6.1\cdot10^{-5}$	$1.6\cdot10^{-5}$	$4.9\cdot10^{-4}$	$4.9\cdot10^{-4}$
5	$5.0\cdot10^{-8}$	$1.2\cdot10^{-3}$	$1.0\cdot10^{-7}$	$3.4\cdot10^{-8}$	$6.7\cdot10^{-6}$	$6.7\cdot10^{-6}$
10	$1.3\cdot10^{-9}$	$3.6\cdot10^{-4}$	$2.9\cdot10^{-9}$	$1.1\cdot10^{-9}$	$6.0\cdot10^{-7}$	$6.0\cdot10^{-7}$
15	$1.4\cdot10^{-10}$	$1.7\cdot10^{-4}$	$3.9\cdot10^{-10}$	$1.3\cdot10^{-10}$	$1.3\cdot10^{-7}$	$1.3\cdot10^{-7}$
20	$2.8\cdot10^{-11}$	$9.9\cdot10^{-5}$	$1.2\cdot10^{-10}$	$2.6\cdot10^{-11}$	$4.5\cdot10^{-8}$	$4.5\cdot10^{-8}$
30	$2.7\cdot10^{-12}$	$4.5\cdot10^{-5}$	$3.3\cdot10^{-11}$	$2.6\cdot10^{-12}$	$9.5\cdot10^{-9}$	$9.5\cdot10^{-9}$

Для оценки погрешности полученных значений границ от Λ_n обозначим через $r_{l,n}$ первое отброшенное слагаемое в сумме (51), и через $\mathcal{R}_{l,n}$ – в (52). Тогда

$$r_{l,n} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{B_{4l+2}}{2l+1}\left(\frac{(1-2^{-1-4l})}{(n+1)^{4l+2}}\left(\frac{\pi^{4l+2}(2^{4l+2}-2)|B_{4l+2}|}{(4l+2)!}-1\right)\right) - \frac{2^{4l+4}B_{4l+4}}{(2l+2)(2n+3)^{4l+4}}\right), \tag{58}$$

$$\mathcal{R}_{l,n} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{B_{4(l+1)}}{2l+2}\left(\frac{(1-2^{-3-4l})}{(n+1)^{4(l+1)}}\left(\frac{\pi^{4(l+1)}(2^{4(l+1)}-2)|B_{4(l+1)}|}{(4l+4)!}-1\right)\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{2^{4l+2}B_{4l+2}}{(2l+1)(2n+3)^{4l+2}}\right). \tag{59}$$

Значения $r_{1,n}$ и $\mathcal{R}_{1,n}$ приведены таблице 2 при различных значениях n.

Таблица 2. Значения $r_{1,n}$ и $\mathcal{R}_{1,n}$ в зависимости от n

n	$r_{1,n}$	$\mathcal{R}_{1,n}$
1	$3.9 \cdot 10^{-5}$	$-2.1 \cdot 10^{-5}$
5	$5.2 \cdot 10^{-8}$	$-3.5 \cdot 10^{-8}$
10	$1.4 \cdot 10^{-9}$	$-1.1 \cdot 10^{-9}$
15	$1.4 \cdot 10^{-10}$	$-1.3 \cdot 10^{-10}$
20	$2.8 \cdot 10^{-11}$	$-2.6 \cdot 10^{-11}$
30	$2.7 \cdot 10^{-12}$	$-2.6 \cdot 10^{-12}$

Из таблиц 1 и 2 видно, что $\Lambda_n - m_n$ и $M_n - \Lambda_n$ не превосходят по абсолютной величине $r_{1,n}$ и $\mathcal{R}_{1,n}$, соответственно.

4. Заключение

В работе получена двусторонняя оценка константы Лебега для случая узловых точек, которые являются корнями полиномов Чебышева первого рода. Выражения для верхней и нижней границ оценки представлены в виде суммы членов усеченного ассимптотического знакочередующегося ряда с использованием свойств логарифмической производной от гаммы-функции Эйлера и дзета-функции Римана. Проведен анализ полученных выражений. В зависимости от числа узлов интерполяционного процесса найдены предельные значения для индекса суммирования в усеченном ассимптотическом ряде. Записаны формулы оценки погрешности вычисления константы Лебега.

References

[1] A. A. Privalov, *Theory of interpolation of functions*, **1**, Saratov University, Saratov, 1990.
[2] V.A. Kim, *Sharp Lebesgue constants for bounded cubic interpolation L-splines*, Sib. Math. J., **51** (2010), 267–276.
[3] A. I. Bayram *Lebesgue functions and Lebesgue constants in polynomial interpolation*, Journal of Inequalities and Applications, **93** (2016), 1–15.
[4] L. Brutman, *On the Lebesgue Function for Polynomial Interpolation*, SIAM Journal on Numerical Analysis, **15**: 4 (1978), 694–704.
[5] R. Gunttner, *Evaluation of Lebesgue constants*, SIAM J. Numer. Anal., **17**:4 (1980), 512–520.
[6] R. Gunttner, *Note on the lower estimate of optimal Lebesgue constants*, Acta Math. Hungar., **65**: 4 (1994), 313–317.
[7] R. Gunttner, *On asymptotics for the uniform norms of the Lagrange interpolation polynomials corresponding to extended Chebyshev nodes*, SIAM Journal on Numerical Analysis., **25**: 2 (1988), 461–469.
[8] V. K. Dzjadik, V. V. Ivanov, *On asymptotics and estimates for the uniform norms of the Lagrange interpolation polynomials corresponding to the Chebyshev nodal points*, Anal. Math., **9**:2 (1983) 85–97.
[9] F. W. Luttmann, T. J. Rivlin, *Some numerical experiments in the theory of polynomial interpolation*, IBM J. Res. Develop., **9** (1965), 187–191.

[10] M. J. D. Powell, *On the maximum errors of polynomial approximations defined by interpolation and by least squares criteria*, Comput. J., **9** (1967), 404–407.

[11] A. Theodore, A. Kilgore, *Characterization of the Lagrange Interpolating Projection with Minimal Tchebycheff Norm*, Journal of approximation theory, **24** (1978) 273–288.

[12] Y. A. Rouba, K. A. Smatrytski, Y. V. Dirvuk, *On a Lebesgue constant of interpolation rational process at the Chebyshev-Markov nodes*, Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics, **3** (2018), 12–20.

[13] J. Mason, D. Handscomb, *Chebyshev polynomials*, CRC Press, Florida, 2003.

[14] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical functions*, Dover publications, New York, 1972.

[15] H. Bateman, *Higher Transcendental Functions*, **1**, McGraw-Hill Book Company, New York, 1953.

[16] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 6th ed., Oxford University Press, New York, 2008.

[17] H. Sherwood, *Sums of power of integers and Bernoulli numbers*, The Mathematical Gazette, **54** (1970), 272–274.

[18] O. Espinosa, V. Moll, *A generalized polygamma function*, Integral Transforms and Special Functions, **15**: 2 (2004), 101–115.

[19] Y. L. Luke, *The Special Functions and their Approximations*, **1**, Academic Press, New York, 1969.

[20] M. R. Murty, N. Saradha, *Transcendental values of the digamma function*, J. Num. Theo., **125** (2007), 298–318.

Oksana Vladimirovna Germider
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov,
Severnaya Dvina Emb., 4,
163002, Arkhangelsk, Russia
E-mail address: o.germider@narfu.ru

Vasily Nikolaevich Popov
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov,
Severnaya Dvina Emb., 4,
163002, Arkhangelsk, Russia
E-mail address: v.popov@narfu.ru