S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 144–144 (2015) УДК 519.17
DOI 10.17377/semi.2015.12.xxx MSC 05C25

О ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ С МАССИВАМИ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$

И.Н. Белоусов, М.П. Голубятников, А.А. Махнев

Abstract. There is infinite sequence of formally self-dual classical distance-regular graphs Γ with $b = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = n-1$, $v = n^3$ $(n > 5)$ (A. Brouwer). Graph Γ has intersection array $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$ and realized when n is a power of 2 by a biliniar forms graph. We suggested that Γ does not exist if n is not a power of 2. It is true if $n \geq 94$. Finally distance-regular graph with intersection array $\{56, 42, 20; 1, 6, 28\}$ does not exist.

Keywords: distance-regular graph, formally self-dual graph, geometric graph, biliniar forms graph.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Граф Σ называется r-накрытием графа Γ, если имеется гомоморфизм φ, отображающий Σ на Γ, при котором $|\varphi^{-1}(u)| = r$ для оюбой вершины $u \in \Gamma$ и для $w \in \varphi^{-1}(u)$ граф $\varphi(\Sigma(w))$ изоморфен $\Gamma(u)$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это

Belousov, I.N., Golubyatnikov M.P., Makhnev, A.A., On distance-regular graphs with intersection arrays $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$.

Поступила 6 августа 2022 г., опубликована ?? ноября 2022 г.

степень графа, $c_1 = 1$. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечений графа Γ [1].

Порядок клики в дистанционно регулярном графе степени k, имеющем наименьшее собственное значение $-m$ не больше $1 + k/m$. Клика K с $1 + k/m$ вершинами называется кликой Дельсарта. Дистанционно регулярный граф называется *геометрическим*, если он содержит такое семейство S клик Дельсарта, что каждое ребро графа содержится в единственной клике из S.

Дистанционно регулярный граф называется формально самодуальным, если первая и вторая матрицы его собственных значений совпадают.

Пусть $V = F^d$, $W = F^e$, $d \le e$ и B — линейное пространство размерности de над полем $F = F_q$ билинейных форм f из $V \times W$ в F. Нулевое пространство f в V — это $\{v \in V \mid f(v, W) = 0\}$. Рангом формы f называется произведение коразмерностей нулевых пространств в V и W. Формы f и g смежны в графе билинейных форм $H_q(d, e)$, если ранг $f - g$ равен 1.

Имеется бесконечное семейство формально самодуальных дистанционно регулярных графов Γ с классическими параметрами $b = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = n - 1$, $v = n^3$ $(n > 5)$ ([1, стр. 425]). Граф Γ имеет массив пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$ и реализуется как граф билинейных форм $H_2(3, e)$, когда $n = 2^e$. Графы $H_q(d, e)$ охарактеризованы массивом пересечений (Метш, 1999) в случаях $q = 2, e \ge d + 4$ и $q \ge 3, e \ge d + 3$ [3]. Гаврилюк и Кулен рассмотрели случай $q = 2, e = d$ [4]. Таким образом, графы $H_q(3, e)$ распознаются по массиву пересечений, за исключением случаев $q = 2, e \in \{4, 5, 6\}$ (случаев $n \in \{16, 32, 64\}$) и $q \ge 3, e \in \{4, 5\}$.

При $n = 6$ получим массив пересечений $\{35, 24, 8; 1, 6, 28\}$, а при $n = 7$ получим массив пересечений $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$. С помощью тройных чисел пересечений было доказано, что оба графа не существуют ([?] и [?] соответственно). Гаврилюк и Кулен с помощью изучения собственных значений локальных подграфов получили другое доказательство несуществования графа с массивом пересечений $\{35, 24, 8; 1, 6, 28\}$ [4, теорема 5.1]. В (см. [4, раздел 5]) доказано, что в дистанционно регулярном графе с массивом пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$ окрестность никакой вершины не может быть $7 \times (n-1)$-решеткой в случаях $n = 6$ и $n = 7$.

Предложение 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$ *имеет спектр* $(7n-7)^1, (3n-7)^{7n-7}, (n-7)^{7(n-1)(n-2)}, -7^{(n-1)(n-2)(n-4)}$, *дуальную матрицу собственных значений*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 7n-7 & 7(n-1)(n-2) & (n-1)(n-2)(n-4) \\ 1 & 3n-7 & (n-2)(n-7) & -(n-2)(n-4) \\ 1 & n-7 & -3n+14 & 2n-8 \\ 1 & -7 & 14 & -8 \end{pmatrix},$$

и числа пересечений

(1) $p^1_{11} = n + 4$, $p^1_{21} = 6n - 12$, $p^1_{22} = 3(n+1)(n-2)$, $p^1_{32} = 4(n-2)(n-4)$, $p^1_{33} = (n-2)(n-4)(n-5)$;

(2) $p^2_{11} = 6$, $p^2_{21} = 3n + 3$, $p^2_{22} = n^2 + 24n - 86$, $p^2_{31} = 4n - 16$, $p^2_{32} = 6(n-4)^2$, $p^2_{33} = (n^2 - 9n + 22)(n-4)$;

(3) $p^3_{21} = 28$, $p^3_{22} = 42n - 168$, $p^3_{31} = 7n - 35$, $p^3_{32} = 7n^2 - 63n + 154$, $p^3_{33} = n^3 - 14n^2 + 70n - 128$.

Предложение 1 доказывается с помощью вычислений из [2].

По предложению 1 любой граф с массивом пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$ имеет наименьшее собственное значение -7 и порядок клики Дельсарта в нем равен n. Если C – клика Дельсарта, то любая вершина вне C смежна с 0 или $n - b_1/(\theta_3 + 1) = 2$ вершинами из C ([1, предложение 4.4.6]).

Гипотеза 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$ *не существует, если n не является степенью* 2.

В [4] отмечается, что гипотеза справедлива, если $n \geq 134$. Следующий результат показывает, что гипотеза справедлива, если $n \geq 94$. Теорема 1 достаточно просто выводится из предложения 2.2 [3].

Теорема 1. *Если дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений* $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$ *существует и $n \geq 94$, то $n = 2^e$ и Γ — граф билинейных форм $H_2(3, e)$.*

Следствие 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$, e – максимальная степень вершины в μ-подграфах из Γ, s – неотрицательное целое число. Назовем прямой максимальная клику C с $|C| \geq n + 6 - (s-1)e$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $n > 70$, то каждая вершина графа Γ лежит на s прямых, а каждое ребро графа Γ лежит на единственной прямой;*

(2) *если $n > 72$ и Γ не является геометрическим графом, то $s = 8, e = 5$ и Γ не содержит клик Дельсарта.*

При конкретных значениях $q = 2$, $d = 3$, $s = r = 7$, $\beta = n - 1$ получено существенное усиление результата Метша (предложение 2.2 из [3]).

Теорема 2. *Пусть Γ — геометрический граф с массивом пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$. Если $n > 72$, то $n = 2^e$ и Γ — граф билинейных форм $H_2(3, e)$.*

В [5, проблема 9] сформулирована проблема существования дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 42, 20; 1, 6, 28\}$ (случай $n = 9$). Эта проблема решена в следующей теореме.

Теорема 3. *Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений* $\{56, 42, 20; 1, 6, 28\}$ *не существует.*

В доказательстве теоремы 3 используются тройные числа пересечений [6].

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d. Если u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ, r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, не большие d, то $\left\{ {u_1 u_2 u_3 \atop r_1 r_2 r_3} \right\}$ — множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что $d(w, u_i) = r_i$, $\left[{u_1 u_2 u_3 \atop r_1 r_2 r_3} \right] = \left| \left\{ {u_1 u_2 u_3 \atop r_1 r_2 r_3} \right\} \right|$. Числа $\left[{u_1 u_2 u_3 \atop r_1 r_2 r_3} \right]$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\left[{u_1 u_2 u_3 \atop r_1 r_2 r_3} \right]$ будем писать $[r_1 r_2 r_3]$. К сожалению, для чисел $[r_1 r_2 r_3]$ нет общих формул. Однако, в [6] предложен метод вычисления некоторых чисел $[r_1 r_2 r_3]$.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $W = d(u, v), U = d(v, w), V = d(u, w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x, u) = 0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh] = \delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично, $[i0h] = \delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0] = \delta_{iU}\delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$, и сосчитав число вершин всех расстояний от третьей, получим:
$\sum_{l=1}^{d}[ljh] = p_{jh}^{U} - [0jh]$, $\sum_{l=1}^{d}[ilh] = p_{ih}^{V} - [i0h]$, $\sum_{l=1}^{d}[ijl] = p_{ij}^{W} - [ij0]$.

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i-j| > W$ или $i+j < W$ имеем $p_{ij}^{W} = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, ..., d\}$.

Положим $S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri}Q_{sj}Q_{th}\left[\begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix}\right]$. Если параметр Крейна $q_{ij}^{h} = 0$, то $S_{ijh}(u, v, w) = 0$.

Зафиксируем вершины u, v, w дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 и положим $\{ijh\} = \left\{\begin{smallmatrix} uvw \\ ijh \end{smallmatrix}\right\}$, $[ijh] = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ ijh \end{smallmatrix}\right]$, $[ijh]' = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ ihj \end{smallmatrix}\right]$, $[ijh]^* = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ jih \end{smallmatrix}\right]$ и $[ijh]^\sim = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ hji \end{smallmatrix}\right]$. Вычисление $[ijh]'$, $[ijh]^*$ и $[ijh]^\sim$ (симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

1. Характеризация графов билинейных форм $H_2(3, e)$

Следующий результат получен Метшем (см. предложение 2.2 из [3]).

Предложение 2. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с классическими параметрами (d, q, α, β), $d \geq 3$, $r = q^d - 1$ и $\alpha = q - 1 \geq 1$. Предположим, что существует целое число $s \geq r$ такое, что*

(1) если $q = 2$ и $d = 3$, то $s = r = 7$,

(2) $(s+1)(\lambda+1) - s(s+1)(q^2+q-1)/2 > r\beta$,

(3) $\lambda + 1 > s(q^3 + q^2 + 2q - 1) - q^2(q^2 + q + 1)$.

Тогда q — степень простого числа, $\beta = q^e - 1$ и Γ — граф билинейных форм $H_q(d, e)$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$. Тогда $a_1 = n+4$ и Γ имеет классические параметры $(3, 2, 1, n-1)$. Далее, $s = r = 7$. Если $n \geq 94$, то выполнены неравенства $8(n+5) - 140 > 7(n-1)$, $n+5 > 7(8+4+4-1) - 4(4+2+1)$ и по педложению Метша $n = 2^e$ и Γ — граф билинейных форм $H_2(3, e)$.

Теорема 1 доказана.

2. Геометричность некоторых графов с массивом пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$

Следующий результат является частным случаем следствия 1.3 из [7].

Предложение 3. *Пусть Γ — реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ), e, s — неотрицательные целые числа, и максимальная клика C с $|C| \geq \lambda + 2 - (s-1)e$ называется прямой. Если выполняются условия:*

(1) $|[u] \cap [y] \cap [z]| \leq e$ для любых двух несмежных верщин y, z и дюбой вершины $u \in [y] \cap [z]$,

(2) $\lambda + 1 > (2s-1)e$,

(3) *либо порядок коклики в окрестности любой вершины не больше s, либо $k < (s+1)(\lambda+1) - s(s+1)e/2$,*

то каждая вершина графа Γ лежит на s прямых, а каждое ребро графа Γ лежит на единственной прямой.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$.

Лемма 1. *Пусть e – максимальная степень вершины в μ-подграфах графа Γ, $s = 7$. Тогда выполнятся следующие утверждения:*

(1) *если $e \leq 3$, то в случае $n \geq 38$ граф Γ является геометрическим;*

(2) *если $e \leq 4$, то в случае $n \geq 66$ граф Γ является геометрическим.*

Доказательство. Положим $s = 7$. Если $e = 3$, то неравенства $n + 5 > 39$ и $7(n-1) < 8(n+5)-84$ выполняются при $n \geq 38$. В этом случае по предложению 3 каждая вершина графа Γ лежит на 7 прямых и Γ является геометрическим графом.

Если $e = 4$, то неравенства $n+5 > 52$ и $7(n-1) < 8(n+5)-112$ выполняются при $n \geq 66$. В этом случае по предложению 3 каждая вершина графа Γ лежит на 7 прямых и граф Γ является геометрическим. □

Лемма 2. *Если $n > 72$ и граф Γ не является геометрическим, то $s = 8$, $e = 5$ и Γ не содержит клик Дельсарта.*

Доказательство. Пусть s – максимальный порядок коклики в окрестности любой вершины из Γ. Максимальную клику размера не меньше $n + 6 - se$ назовем прямой. Для доказательства леммы 2 достаточно установить, что $e \leq 4$.

Пусть $s = 7$. Условие $n > 60$ обеспечивает выполнение неравенства $n + 5 > 13e$. Ввиду предложения 3 размер любой максимальной клики равен n и граф Γ является геометрическим.

Пусть $s = 9$. Ввиду границы Кулена-Пака [8] имеем $5 \cdot 36 \geq 9(n+5) - 7(n-1)$ и $2n \leq 128$, противоречие.

Пусть $s = 8$. Тогда средний размер прямой равен $7(n-1)/8+1$ и неравенство $n > 70$ равносильно $n + 5 > 5(2s - 1) = 75$. Ввиду границы Кулена-Пака [8] имеем $5 \cdot 28 \geq 8(n + 5) - 7(n - 1)$ и $n \leq 93$. Граф Γ является геометрическим, если каждая максимальная клика размера не меньше $n - 29$ имеет размер n.

При $n = 73$ имеем $k = 504$ и средний размер прямой равен 64. Если L – прямая размера 50 из $u^\perp$, то для $w \in L - \{u\}$ подграф $[u] \cap [w]$ содержит 48 вершин из L и 29 отличных от u вершин из остальных семи прямых. Поэтому $|[w] \cap (N - \{u\})| = 5$ для прямой N из $u^\perp$, $|[w] \cap (K - \{u\})| = 5$ для других прямых, и для любой вершины $z \in N - [w]$ подграф $[z]$ не пересекает $L - \{u\}$. Теперь число ребер между $L - \{u, w\}$ и $N - \{u\}$ не больше 20 и некоторая вершина из $L - \{u, w\}$ смежна не более чем с одной вершиной из $N - \{u\}$, противоречие.

Пусть M, N – прямые из $u^\perp$ и для $w \in M - \{u\}$ имеем $|[w] \cap (N - \{u\})| = 5$. Тогда для любой вершины $z \in N - [w]$ подграф $[z]$ не пересекает $M - \{u\}$. Положим $|N| = 63 + i$, $i \leq 9$. Тогда любая вершина из $N - [w]$ смежна с $61 + i$ вершинами из N, 0 вершинами из $M - \{u\}$ и $16 - i$ вершинами из остальных шести прямых. Число ребер между $N - [w]$ и остальными шестью прямыми равно $(57 + i)(16 - i)$, поэтому число ребер между $N - [y]$ и некоторой из этих шести прямых не меньше $(57+i)(16-i)/6$. При $i \le 8$ получим $(57+i)(16-i)/6 \ge 86.6$ и некоторая вершина из этой прямой смежна более чем с одной вершиной из $N - [w]$, противоречие. Значит, $i = 9$ и общее число отличных от u вершин на этих прямых не меньше 405. Противоречие с тем, что $|M \cup N - \{u\}| \ge 121$. Итак, для любых двух прямых M, N из $u^\perp$ и для $w \in M - \{u\}$ имеем $|[w] \cap (N - \{u\})| \le 4$.

Докажем, что негеометрический граф Γ не содержит клик Дельсарта. Допустим, что L – клика Дельсарта из $u^\perp$. Пусть N – прямая из $u^\perp$ размера $|N| = 63 - i$. Тогда любая вершина из $N - \{u\}$ смежна с $61 - i$ вершинами из N, вершиной из $L - \{u\}$ и $15 + i$ отличными от u вершинами из остальных шести прямых. Отсюда $i \le 9$. Пусть вершина $w \in N - \{u\}$ смежна с 4 отличными от u вершинами на некоторой прямой M из $u^\perp$. Тогда для $|M| = 63 + \beta$ и вершины $z \in M - [w]$ подграф $[u] \cap [z]$ содержит $61 + \beta$ вершин из M, не более одной вершины из $L - \{u\}$, из $N - \{u\}$ и не менее $14 - \beta$ вершин из оставшихся 5 прямых. Число ребер между $M - [w]$ и этими пятью прямыми не меньше $(58 + \beta)(14 - \beta) = 812 - 44\beta - \beta^2$. Если $\beta \le 1$, то число ребер между $M - [w]$ и некоторой из пяти прямых не меньше 128. Противоречие с тем, что некоторая вершина из этой прямой смежна с двумя вершинами из $M - [w]$. Значит, $|M| \ge 65$. Если $i = 9$, то $k \ge 72 + 53 + 6 \cdot 64 = 509$, противоречие.

Число ребер между $N - \{u, w\}$ и $M \cap [w] - \{u\}$ не больше $4 \cdot 3 = 12$, поэтому $(62 - i) - 13$ вершин из N несмежны с вершинами из $M \cap [w] - \{u\}$. Если каждая из этих вершин смежна по крайней мере с двумя вершинами из $M - [w]$, то число ребер между $M - [w]$ и $N - \{u\}$ не меньше $98 - 2i$, противоречие. Значит, некоторая вершина из $N - \{u, w\}$ смежна не более чем с одной вершиной из L, M, не более чем с тремя вершинами из K и по крайней мере с $11 + i$ отличными от u вершинами из остальных четырех прямых. Значит, $i \le 5$, $|N| \ge 58$ и $k \ge 72 + 57 + 5 \cdot 64 + 57 = 506$, противоречие.

При $n > 73$ отсутствие клик Дельсарта доказывается еще проще. □

По лемме 2 выполняется следствие 1.

3. О геометрических графах с массивами пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$

В этом разделе мы докажем теорему 2. Доказательство проводится модификацией рассуждений Метша из доказательства предложения 2.2 [3]. Имеем $q = 2$, $d = 3$, $s = r = 7$, $\beta = n - 1$, неравенство

(3) $lambda + 1 > s(q^3 + q^2 + 2q - 1) - q^2(q^2 + q + 1)$ (при $s = 7, q = 2, lambda = n + 4$)

равносильно тому, что $n > 72$, а неравенство

(2) снова дает ограничение $n > 72$. Для смежных вершин u, w через uw обозначим единственную прямую (клику Дельсарта), проходящую через u, w. Если $d(u, w) = 2$, то через $[u, w]$ обозначим множество прямых, проходящих через u и пересекающих $[w]$.

Леммы 2.3–2.9 из [3] проверяются непосредственно, при этом неравенство $n > 72$ существенно используется.

Лемма 3. *Рассмотрим вершину $p \in \Gamma$ и прямую L с $d(p, L) = 1$. Тогда $[p, u] = [p, w]$ для любых вершин $u, w \in L \cap \Gamma_2(p)$.*

Доказательство. Повторяем доказательство леммы 2.10 из [3]. □

Здесь используется неравенство (3) из предложения 2.2 [3], равносильное $n > 72$.

Лемма 4. *Если вершины $v, v' \in \Gamma$ смежны, то подграф $[v] \cap [v'] - vv'$ является кликой.*

Доказательство. Пусть вершины $v, v' \in \Gamma$ смежны, $X = [v] \cap [v'] - vv'$ и $x \in X$. Положим $L = vx$. Тогда найдется вершина $p \in L$ с $d(p, v') = 2$. Если $x' \in X$, $d(p, x') = 2$, то вершины x, x' смежны (повторение рассуждений из доказательства леммы 2.11 [3]). Так как для любой вершины $x' \in X - \{x\}$ найдется вершина $p \in L$ с $d(p, v') = d(p, x') = 2$, то X является кликой. □

По лемме 4 граф Γ является локально решетчатым и по теореме 1.2 из [4] имеем $n = 2^e$ и Γ — граф билинейных форм $H_2(3, e)$. Теорема 2 доказана.

4. Граф с массивом пересечений $\{56, 42, 20; 1, 6, 28\}$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{56, 42, 20; 1, 6, 28\}$. По предложению Γ имеет спектр $56^1, 20^{56}, 2^{392}, -7^{280}$, $1 + 56 + 392 + 280 = 729$ вершин, дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 56 & 392 & 280 \\ 1 & 20 & 14 & -35 \\ 1 & 2 & -13 & 10 \\ 1 & -7 & 14 & -8 \end{pmatrix},$$

и числа пересечений

(1) $p^1_{11} = 13$, $p^1_{21} = 42$, $p^1_{22} = 210$, $p^1_{32} = 140$, $p^1_{33} = 140$;

(2) $p^2_{11} = 6$, $p^2_{21} = 30$, $p^2_{22} = 211$, $p^2_{31} = 20$, $p^2_{32} = 150$, $p^2_{33} = 110$;

(3) $p^3_{21} = 28$, $p^3_{22} = 210$, $p^3_{31} = 28$, $p^3_{32} = 154$, $p^3_{33} = 97$.

Отсюда граф Γ_2 сильно регулярен с параметрами (729,392,211,210) и собственными значениями 392, 14, -13. Максимальный порядок клики в Γ_2 не больше 31.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $[rst] = \left[{uvw \atop rst} \right]$.

Положим $\Delta = \Gamma_3(u)$, $\Lambda = \Delta_2$. Тогда Λ – регулярный граф степени 154 на 280 вершинах.

Лемма 5. *Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 3, d(v, w) = 1$. Тогда для тройных чисел пересечений выполняются равенства:*

$[122] = 2r_6 - 24$, $[123] = [132] = -2r_6 + 52$, $[133] = 2r_6 - 24$;

$[211] = r_6 - 14$, $[212] = [221] = -r_6 + 42$, $[222] = 114$, $[223] = [232] = r_6 + 54$, $[233] = -r_6 + 100$;

$[311] = -r_6 + 27$, $[312] = [321] = r_6$, $[322] = -2r_6 + 120$, $[323] = [332] = r_6 + 34$, $[333] = -r_6 + 63$,

где $r_6 \in \{14, 15, ..., 26\}$.

Доказательство. Упрощения формул (+) с учетом равенств $S_{313}(u, v, w) = S_{331}(u, v, w) = S_{133}(u, v, w) = 0$ и свободной переменной $r_6 = [312]$. □

По лемме 5 имеем $68 \le \left[{uvw \atop 322} \right] = -2r_6 + 120 \le 92$.

Лемма 6. *Пусть $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 3$. Тогда для тройных чисел пересечений выполняются равенства:*

$[122] = -2r_{17}/9 + 112/3$, $[123] = [132] = 2r_{17}/9 - 28/32$, $[133] = -2r_{17}/9 + 112/3$;

$[213] = 2r_{17}/9 - 28/3$, $[212] = [221] = -2r_{17}/9 + 112/3$, $[222] = r_{17}$, $[223] = [232] = -7r_{17}/9 + 518/3$, $[233] = 5r_{17}/9 - 28/3$;

$[313] = -2r_{17}/9+112/3$, $[312] = [321] = 2r_{17}/9-28/3$, $[322] = -7r_{17}/9+518/3$, $[331] = -2r_{17}/9 + 112/3$, $[323] = [332] = 5r_{17}/9 - 28/3$, $[333] = -r_{17}/3 + 68$,

где $r_{17}/3$ *сравнимо с* 1 *по модулю* 3, $r_{17} \in \{48, 57, 66, 75, ..., 159\}$.

Доказательство. Упрощения формул (+) с учетом равенств $S_{313}(u, v, w) = S_{331}(u, v, w) = S_{133}(u, v, w) = 0$ и свободной переменной $r_{17} = [222]$. □

По лемме 6 имеем $42 \le \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ 322 \end{smallmatrix}\right] = -7r_{17}/9 + 518/3 \le 49$.

Напомним, что $p^3_{31} = 28$, $p^3_{32} = 154$, $p^3_{33} = 97$. Число d ребер между $\Lambda(w)$ и $\Lambda - (\{w\} \cup \Lambda(w))$ удовлетворяет неравенствам $5978 = 28 \cdot 68 + 97 \cdot 42 \le d \le 28 \cdot 92 + 97 \cdot 49 = 7329$.

С другой стороны, $d = 154(153 - \lambda)$, где λ — среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$. Поэтому $23.54 \le 153 - \lambda \le 47.60$ и $105.40 \le \lambda \le 129.46$.

Лемма 7. *Пусть* $d(u, v) = d(u, w) = 3, d(v, w) = 2$. *Тогда для тройных чисел пересечений выполняются равенства:*

$[122] = -4r_{15} - 2r_{16} + 184$, $[123] = [132] = 4r_{15} + 2r_{16} - 156$, $[133] = -4r_{15} - 2r_{16} + 184$;

$[211] = -(5r_{15} + 2r_{16})/3 + 64$, $[212] = [221] = r_{15}$, $[213] = [231] = (2r_{15} + 2r_{16})/3 - 36$, $[222] = 3r_{15} + 3r_{16} - 96$, $[223] = [232] = -4r_{15} - 3r_{16} + 306$, $[233] = (10r_{15} + 7r_{16})/3 - 116$;

$[311] = (5r_{15}+2r_{16})/3-58$, $[312] = [321] = -r_{15}+30$, $[313] = (-2r_{15}-2r_{16})/3+56$, $[322] = r_{15} - r_{16} + 123$, $[323] = [332] = r_{16}$, $[331] = -(2r_{15} + 2r_{16})/3 + 56$, $[323] = [332] = 5r_{17}/9 - 28/3$, $[333] = (2r_{15} - r_{16})/3 + 41$,

$2 \le r_{15} \le 28$ $26 \le r_{16} \le 82$

где $r_{15} + r_{16}$ *делится на* 3, $2 \le r_{15} \le 28$, $26 \le r_{16} \le 82$.

Доказательство. Упрощения формул (+) с учетом равенств $S_{313}(u, v, w) = S_{331}(u, v, w) = S_{133}(u, v, w) = 0$ и свободных переменных $r_{15} = [212]$, $r_{16} = [323]$. □

По лемме 7 имеем $43 \le \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ 322 \end{smallmatrix}\right] = r_{15} - r_{16} + 123 \le 125$.

Пусть $d(u, v) = 3$. Найдем число f_1 пар вершин (y, z) на расстоянии 1, где $y \in \left\{\begin{smallmatrix} uv \\ 31 \end{smallmatrix}\right\}$ and $z \in \left\{\begin{smallmatrix} uv \\ 32 \end{smallmatrix}\right\}$. По лемме 5 имеем $[321] = r_6$, где $r_6 \in \{14, 15, ..., 26\}$ и $392 = 28 \cdot 14 \le f_1 \le 28 \cdot 26 = 728$. С другой стороны, по лемме 7 имеем $[311] = (5r_{15} + 2r_{16})/3 - 58$, поэтому $392 \le f_1 = \sum_i (5r^i_{15} + 2r^i_{16}) - 8932 \le 728$, $9324 \le \sum_i (5r^i_{15} + 2r^i_{16}) \le 9660$ и $60.54 \le \sum_i (5r^i_{15} + 2r^i_{16})/154 \le 62.73$. Так как $2 \le r_{15} \le 28$, $26 \le r_{16} \le 82$, то $62 \le \sum_i (5r^i_{15} + 2r^i_{16})/154 \le 62.73$.

Найдем число f_2 пар вершин (y, z) на расстоянии 2, где $y \in \left\{\begin{smallmatrix} uv \\ 31 \end{smallmatrix}\right\}$ and $z \in \left\{\begin{smallmatrix} uv \\ 32 \end{smallmatrix}\right\}$. По лемме 5 имеем $[322] = -2r_6 + 120$, где $r_6 \in \{14, 15, ..., 26\}$ и $1344 = 28 \cdot 48 \le f_1 \le 28 \cdot 92 = 2576$. С другой стороны, по лемме 7 имеем $[312] = -r_{15} + 30$, поэтому $1344 \le f_2 = -\sum_i r^i_{15} + 4620 \le 2576$, $2044 \le \sum_i r^i_{15} \le 3276$ и $13.27 \le \sum_i r^i_{15}/154 \le 21.3$. Противоречие с тем, что $13.27 + 52 \le \sum_i (5r^i_{15} + 2r^i_{16})/154 \le 62.73$.

Теорема 3 доказана.

References

[1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York, 1989.

[2] J. Vidali *Description of the sage-drg package*, Faculty of Mathematics and Physics, University of Ljubljana, Slovenia, 1–20.

[3] K. Metsch, *On a Characterization of Bilinear Forms Graphs*, Europ. J. Comb., **20** (1999), 293-–306.

[4] A. Gavrilyuk, J. Koolen, *A characterization of the graphs of bilinear $d \times d$-forms over F_2*, Combinatorica, **39:2** (2019), 289-–321.

[5] N. Maslova, *2020 Ural workshop on group theory and combinatorics*, Trudy IMM UrO RAN, **27:1** (2021), 270-–282.

[6] K. Coolsaet, A. Jurishich, *Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of sertain distance-regular graphs*, J. Comb. Theory, Series A., **115** (2008), 1086–1095.

[7] K. Metsch, *Improvement of Bruck's Completion Theorem*, Designs, Codes and Cryptography, **1:2** (1991), 99–116.

[8] J. Koolen, J. Park, *Shilla distance-regular graphs*, Europ. J. Comb., **31:8** (2010), 2064–2073.

Ivan Nikolaevich Belousov
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
str. S.Kovalevskaya, 16,
620990, Yekaterinburg, Russia
Email address: i_belousov@mail.ru

Mikhail Petrovich Golubyatnikov
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
str. S.Kovalevskaya, 16,
620990, Yekaterinburg, Russia
Email address: mike_ru1@mail.ru

Aleksandr Alekseevich Makhnev
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
str. S.Kovalevskaya, 16,
620990, Yekaterinburg, Russia
Email address: makhnev@imm.uran.ru