S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 208–217 (2020) УДК 512.54
DOI 10.33048/semi.2020.17.015 MSC 20B07, 20B30, 20B35

О ПОДГРУППАХ ГРУППЫ Lim(N)

А.И. СОЗУТОВ, Н.М. СУЧКОВ, Н.Г. СУЧКОВА

Abstract. We study a subgroups and chains of normal locally finite subgroups of limited permutation group $G = \mathrm{Lim(N)}$.

Keywords: group, limited permutation, complite dispersion set, normal subgroup, locally finite subgroup, support.

1. Введение

Пусть N, Z — множества всех натуральных и целых чисел соответственно, M — любое из этих множеств. Через $S(M)$ будем обозначать группу всех подстановок множества M. Напомним, что носителем подстановки $g \in S(M)$ называется множество

$$\mathrm{supp}(g) = \{\alpha \mid \alpha \in M,\ \alpha^g \neq \alpha\}.$$

Подстановки с конечными носителями называются финитарными. Множество всех таких подстановок обозначается $\mathrm{Fin}(M)$ и является счетной локально конечной нормальной подгруппой группы $S(M)$.

Определение 1. *Подстановка $g \in S(m)$ называется ограниченной, если*

$$w(g) = \max_{\alpha \in M} |\alpha - \alpha^g| < \infty.$$

Из ограниченности подстановок g, h непосредственно следует, что таковыми являются подстановки g^{-1} и gh, так как $w(g^{-1}) = w(g)$, $w(gh) \leq w(g) + w(h)$. Поэтому множество

$$\mathrm{Lim}(M) = \{x \mid x \in S(M),\ w(x) < \infty\}$$

Sozutov, A.I., Suchkov, N.M., Suchkova, N.G., On subgroups of group Lim(N).

Работа поддержана РФФИ (грант 19-01-00566 А).

Поступила 15 декабря 2019 г., опубликована 27 февраля 2020 г.

образует группу, которая является естественным расширением группы $\mathrm{Fin}(M)$. Поскольку бесконечный цикл

$$x = (\dots 2n \dots 4\ 2\ 1\ 3 \dots 2n-1 \dots)$$

имеет параметр ограниченности $w(x) = 2$, то $x \in \mathrm{Lim}(M)$. Таким образом, $\mathrm{Lim}(M)$ — смешанная группа.

Из ограниченных подстановок множества Z в работе [1] построена смешанная группа $F = AB$, где A, B — локально конечные подгруппы, а в [2] установлено, что в F изоморфно вложимы любая счетная свободная группа и 2-группа Алешина. Далее, в [3, 4] доказано, что F совпадает с коммутантом группы $H = \mathrm{Lim}(Z)$; группа $G = \mathrm{Lim}(N)$ факторизуема двумя локально конечными подгруппами; F и G порождаются инволюциями, в разложении которых на независимые транспозиции участвует только транспозиции вида $(\alpha\ \alpha+1)$.

В работах [4, 5, 6] начато исследование нормального строения группы $G = \mathrm{Lim}(N)$. Если группа $\mathrm{Fin}(N)$ содержит точно одну нетривиальную нормальную подгруппу, состоящую из всех четных финитарных подстановок множества N, то нормальных в группе G подгрупп бесконечно много. При их изучении весьма полезным оказалось понятие (вполне) рассеянного подмножества множества N.

Пусть $m \in N$, $X \subseteq N$ и элементы X упорядочены естественным образом.

Определение 2. *Множество X называется m-плотным, если расстояние между его соседними элементами не превосходит m.*

Ясно, что если $L \subseteq N$, то множество L разбивается на максимальные m-плотные подмножества. Обозначим через $B_m(L)$ множество всех классов этого разбиения.

Определение 3. *Множество L называется m-рассеянным, если все классы множества $B_m(L)$ конечны и вполне m-рассеянным при ограниченности их порядков. Множество L называется (вполне) рассеянным, если оно (вполне) m-рассеянное при любом натуральном m.*

В частности, каждое конечное подмножество из N вполне рассеянное; $L_1 = \bigcup_{n\in N}\{2^n,\ 2^n+1\}$ — бесконечное вполне рассеянное множество, так как если m — фиксированное натуральное число, $2^n - (2^{n-1}+1) > m$, то в силу определений $\{2^n, 2^n+1\} \in B_m(L_1)$ и имеется лишь конечное число других классов множества $B_m(L_1)$; аналогично из определений легко вытекает, что $L_2 = \bigcup_{n\in N}\{2^n,\ 2^n+1, \dots,\ 2^n+n\}$ — рассеянное, но не вполне рассеянное множество; при любом фиксированном $q \in N$ множество $L_3 = \{kq \mid k \in N\}$ не является рассеянным.

Сформулируем теперь основные результаты работ [4] – [6]. Пусть R — локально конечный радикал группы G; $N(g)$ — нормальное замыкание в G её элемента g.

Предложение 1. *Подстановка g группы G тогда и только тогда содержится в R, когда $supp(g)$ — вполне рассеянное множество.*

Предложение 2. *Если множество $supp(g)$ не вполне рассеянное, то $N(g)$ содержит элемент бесконечного порядка.*

Предложение 3. *Подгруппа $N(g)$ тогда и только тогда является собственной в группе G, когда $supp(g)$ — рассеянное множество.*

В настоящей статье продолжено исследование подгруппового строения группы $G = \mathrm{Lim}(N)$; сначала дадим

Определение 4. *Произвольную группу X назовем ограниченной, если она изоморфно вложима в группу G.*

Теорема 1. *Группа $H = Lim(Z)$ является ограниченной.*

Отсюда и из упомянутого выше результата работы [2] вытекает

Теорема 2. *Счётная свободная группа и 2-группа Алешина являются ограниченными.*

Теорема 3. *Счётная периодическая абелева группа и счетная свободная абелева группа являются ограниченными.*

Следующие два утверждения связаны с нормальным строением группы G.

Теорема 4. *Группа G не удовлетворяет условиям минимальности и максимальности для локально конечных нормальных подгрупп.*

Теорема 5. *Группа G содержит континуальное множество локально конечных нормальных подгрупп.*

По мнению авторов доказательство нижеприведенных гипотез будет существенным продвижением в изучении класса ограниченных групп.

Гипотеза 1. *Универсальная счетная локально конечная группа Ф. Холла является ограниченной.*

Гипотеза 2. *Группа рациональных чисел по сложению не является ограниченной.*

Все обозначения, используемые в данной статье, любо оговариваются, либо стандартны [7].

2. Вспомогательные результаты

Для каждого $n \in N$ положим

$$B_n = \{k2^n - 2^{n-1} \mid k \in N\}.$$

Лемма 1. *Множества $B_1, \dots,\ B_n, \dots$ составляют разбиение множества N.*

Доказательство. Предположим, что при $i < j$ пересечение $B_i \cap B_j$ содержит число r. Тогда найдутся такие числа $s,\ t \in N$, что

$$r = s2^i - 2^{i-1} = t2^j - 2^{j-1}, \quad 2^{i-1} = 2^i(s - t2^{j-i} + 2^{j-i-1}).$$

Но из последнего равенства следует, что 2^i делит 2^{i-1}. Получили противоречие. Таким образом, $B_i \cap B_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Далее, любой элемент $x \in N$ можно представить в виде $x = q2^m$, где m — целое неотрицательное число, q — нечетное натуральное число. Если $q = 2d - 1$, $d \in N$, то $x = d2^{m+1} - 2^m$. Итак, $x \in B_{m+1}$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 2. *Класс ограниченных групп замкнут относительно взятия счетных прямых произведений.*

Доказательство. Пусть $T = \prod\limits_{n=1}^{\infty} T_n$ — прямое произведение ограниченных групп T_n и $T_n \simeq H_n \leq G$. Фиксируем натуральное n и для $k \in N$ обозначим через $v_k = k2^n - 2^{n-1}$ произвольный элемент множества B_n. Заметим, что $|v_k - v_s| = 2^n|k - s|$. Каждой подстановке $h \in H_n$ сопоставим подстановку $\overline{h}$ группы $S(N)$ следующим образом: $\alpha^{\overline{h}} = \alpha$ при $\alpha \in N \setminus B_n$, а если $\alpha = v_k \in B_n$, то полагаем $\alpha^{\overline{h}} = v_k^{\overline{h}} = v_{k^h}$. В силу вышеизложенного $w(\overline{h}) = 2^n w(h)$, т.е. $\overline{h} \in G$. Нетрудно понять, что отображение $h \to \overline{h}$ есть изоморфизм группы H_n на группу $\overline{H}_n = \{\overline{h} \mid h \in H_n\}$. Из построения группы $\overline{H}_n$ $(n \in N)$ и леммы 1 следует, что группы $\overline{H}_i$, $\overline{H}_j$ поэлементно перестановочны при любых индексах $i \neq j$ и $\overline{H}_i \cap \langle \overline{H}_j \mid j \in N,\ j \neq i\rangle = \{1\}$. Это означает, что $G \geq \overline{H} = \langle \overline{H}_n \mid n \in N\rangle = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \overline{H}_n$ — прямое произведение групп $\overline{H}_n \simeq H_n$, $n \in H$. Поэтому $T \simeq \overline{H}$, а значит, T — ограниченная группа. Лемма доказана. $\square$

Пусть A, B — подмножества множества N. Запись $A < B$ будет обозначать, что $a < b$ при любых $a \in A$, $b \in B$.

Лемма 3. *Объединение конечного числа вполне рассеянных множеств есть вполне рассеянное множество.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай двух вполне рассеянных множеств L и Q. Допустим, что множество $T = L \cup Q$ не вполне рассеянное, т.е. найдется такое натуральное m, что порядки классов множества $B_m(T)$ неограниченны. Ясно, что тогда L, Q — бесконечные множества. Пусть

$$B_m(L) = \{L_1,\ L_2, \ldots,\ L_n, \ldots\},$$
$$B_m(Q) = \{Q_1,\ Q_2, \ldots,\ Q_n, \ldots\}.$$

Будем предполагать, что

$$L_1 < L_2 < \ldots < L_n < \ldots; \qquad Q_1 < Q_2 < \ldots < Q_n < \ldots.$$

В силу условия и определения 3 найдутся такие натуральные числа $l = l(m)$ и $q = q(m)$, зависящие только от m, что при любых натуральных n выполняются неравенства

$$|L_n| < l, \qquad |Q_n| < q. \tag{1}$$

Пусть x_n — наименьший элемент множества L_n, y_n —наибольший; u_n — наименьший элемент множества Q_n, v_n — наибольший. Легко видеть, что при каждом натуральном n мы имеем

$$y_n - x_n < ml, \quad v_n - u_n < mq, \quad x_{n+1} - y_n > m, \quad u_{n+1} - v_n > m. \tag{2}$$

Далее, обозначим $\lambda = m(q + 2)$. Так как множество L является и вполне λ-рассеянным, то существует такое натуральное число $f = f(m)$, которое превосходит порядок любого класса множества $B_\lambda(L)$.

Выберем такой класс E множества $B_m(T)$, что

$$|E| > m(q + l + 2)f \tag{3}$$

и представим для определенности, что наименьший элемент t_1 множества E содержится в L. Тогда $t_1 \in L_{k_1}$ для некоторого индекса k_1, а потому $L_{k_1} \subset E$ и $t_1 = x_{k_1}$. Пусть t_2 — наименьшее число множества $\{t \mid t \in E,\ t > y_{k_1}\}$.

Так как множество E является m-плотным и содержит y_{k_1}, то $t_2 - y_{k_1} \leq m$. В силу максимальности m-плотного подмножества L_{k_1} множества L отсюда заключаем, что $t_2 \notin L$. Следовательно, $t_2 \in Q$ и найдется такой индекс s, что $t_2 \in Q_s \subset E$. Если теперь t_3 — наименьший элемент множества $\{t \mid t \in E,\ t > v_s\}$, то аналогично предыдущему $t_3 - v_s \leq m$; $t_3 \in L_{k_2} \subset E$ для подходящего индекса k_2. Ясно, что $k_2 > k_1$.

Итак, множество L_{k_1} однозначно определяет множество L_{k_2}. Точно также, исходя из L_{k_2}, мы получим множество $L_{k_3} \subset E$ и так далее.

Оценим разность между наименьшим элементом x_{k_2} множества L_{k_2} и наибольшим элементом y_{k_1} множества L_{k_1}. Для этого заметим, что из включения $t_3 \in L_{k_2}$ вытекает неравенство $x_{k_2} \leq t_3$, а потому $x_{k_2} \leq v_s + m$. Так как $t_2 \in Q_s$, то $t_2 \geq u_s$. Значит, $y_{k_1} \geq u_s - m$. Поэтому

$$x_{k_2} - y_{k_1} \leq (v_s + m) - (u_s - m).$$

Поскольку $v_s - u_s < mq$ в силу (2), то окончательно получаем

$$x_{k_2} - y_{k_1} < m(q+2) = \lambda. \tag{4}$$

Так как $y_{k_1} - x_{k_1} < ml$ в силу первого из неравенств (2), то отсюда выводим

$$x_{k_2} - x_{k_1} < m(g + l + 2). \tag{5}$$

Заметим, что если класс $L_{k_i} \subset (B_m(L) \cap E)$ определен, исходя из класса $L_{k_{i-1}}$, то повторяя доказательства неравенств (4), (5), мы будем иметь

$$x_{k_i} - y_{k_{i-1}} < \lambda, \tag{6}$$

$$x_{k_i} - x_{k_{i-1}} < m(q + r + 2). \tag{7}$$

Теперь из соотношений (3), (7) следует, что классы L_{k_i} определены при $i = 1,\ 2, \ldots,\ f$.

Пусть $t_1 = x_1$ — представитель класса $F \in B_\lambda(L)$. В силу (6) F содержит f классов $L_{k_1},\ L_{k_2}, \ldots, L_{k_f}$. В частности, $|F| \geq f$. С другой стороны, согласно определению числа f выполняется неравенство $|F| < f$. Полученное противоречии доказывает лемму. □

3. Ограниченные группы

В этом разделе мы докажем теоремы 1–3. Рассмотрим взаимно однозначное отображение ψ множества Z на множество N, полагая

$$\psi(\alpha) = \begin{cases} 2\alpha, \text{ если } \alpha > 0, \\ 2|\alpha| + 1, \text{ если } \alpha \leq 0. \end{cases}$$

Пусть

$$g = \ldots (\ldots \alpha \ \ \beta \ldots) \ldots -$$

разложение произвольной подстановки g множества Z на независимые циклы. Тогда

$$g^\varphi = \ldots (\ldots \psi(\alpha) \ \ \psi(\beta) \ldots) \ldots$$

есть подстановка множества N. Ясно, что φ изоморфно отображает группу $S(Z)$ на группу $S(N)$. Если при этом $|\alpha - \alpha^g| = |\alpha - \beta| \leq m$, то из определения отображения ψ легко вытекает, что $|\psi(\alpha) - \psi(\beta)| \leq 2m + 1$. Это означает, что из ограниченности подстановки $g \in S(Z)$ следует ограниченность подстановки $g^\varphi \in S(N)$. Таким образом, $H^\varphi < G$ и теорема 1 доказана.

Во введении мы отмечали, что теорема 2 является непосредственным следствие теоремы 1 и результатов работы [2].

Определение 5. *Если γ, ε — целые числа и $\gamma \le \varepsilon$, то множество*

$$U_\gamma^\varepsilon = \{\beta \mid \beta \in Z,\ \gamma \le \beta \le \varepsilon\}$$

будем называть отрезком целых чисел; γ — левый конец отрезка, ε — правый. В частности, $U_\gamma^\gamma = \{\gamma\}$.

Пусть $m \in N$ и $m > 1$. Рассмотрим следующее разбиение множества N на отрезки:

$$U_1^m,\ U_{m+1}^{2m}, \dots,\ U_{(k-1)m+1}^{km}, \dots$$

и подстановку

$$x = (\alpha_1 \dots \alpha_m)(\alpha_{m+1} \dots \alpha_{2m}) \dots (\alpha_{(k-1)m+1} \dots \alpha_{km}) \dots,$$

где $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} = U_1^m$, $\{\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{2m}\} = U_{m+1}^{2m}, \dots,$ $\{\alpha_{(k-1)m+1}, \dots, \alpha_{km}\} = U_{(k-1)m+1}^{km}, \dots$. Такую подстановку будем называть m-упорядоченной. Очевидно, $|x| = m$, $w(x) < m$.

Лемма 4. *Для каждого натурального n найдется такая mn-упорядоченная подстановка y, что $y^n = x$.*

Доказательство. Действительно, легко проверяется, что искомой является подстановка

$$y = (\alpha_1\ \alpha_{m+1} \dots\ \alpha_{(n-1)m+1}\ \alpha_2\ \alpha_{m+2} \dots\ \alpha_{(n-1)m+2} \dots\ \alpha_m\ \alpha_{2m} \dots\ \alpha_{nm}) \dots.$$

Лемма доказана. □

Лемма 5. *Квазициклическая p-группа является ограниченной при любом простом p.*

Доказательство. Полагаем

$$x_1 = (1 \dots p)(p+1 \dots 2p) \dots ((k-1)p + 1 \dots kp) \dots.$$

Очевидно, $|x_1| = p$, $w(x_1) < p$. В силу леммы 4 существует p^2-упорядоченная подстановка x_2 такая, что $x_2^p = x_1$. Снова согласно лемме 4 $x_3^p = x_2$ для некоторой p^3-упорядоченной подстановки x_3 и так далее. Таким образом, мы построим цепочку подгрупп

$$\langle x_1 \rangle < \langle x_2 \rangle < \langle x_3 \rangle < \dots < \langle x_n \rangle < \dots,$$

в которой $|x_n| = p^n$, $x_{n+1}^p = x_n$, $w(x_n) < p^n$ при всех натуральных n. Объединение подгрупп этой цепочки является квазициклической p-подгруппой группы G. Это доказывает лемму. □

Предложение 4 ([7], теоремы 9.1.3, 9.1.6)**.** *Периодическая абелева группа X изоморфна подгруппе прямого произведения квазициклических p-групп K_i, $i \in I$, $p \in \pi(X)$.*

Докажем теорему 3. Счётная свободная абелева группа является ограниченной, поскольку она изоморфна подгруппе прямого произведения счетного числа бесконечных циклических групп, а такое прямое произведение есть ограниченная группа в силу смещанности группы G и леммы 2.

Пусть теперь X — счетная периодическая абелева группа. В силу предложения 4 мы можем считать, что X — подгруппа прямого произведения квазициклических групп. Тогда любой элемент из X содержится в прямом произведении конечного числа этих групп. Отсюда и из счетности X заключаем, что $X \leq Y$, где Y — прямое произведение конечного или счетного числа квазициклических групп. Согласно леммам 2, 5 Y — ограниченная группа, а значит, таковой является и её подгруппа X. Доказательство теорем 3 завершено.

4. Доказательство теорем 4, 5

Пусть

$$L = \{\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots\ \alpha_k, \ldots\} -$$

подмножество множества N и при этом $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k < \ldots$.

Лемма 6. *Если*

$$\alpha_2 - \alpha_1 < \alpha_3 - \alpha_2 < \ldots < \alpha_k - \alpha_{k-1} < \alpha_{k+1} - \alpha_k < \ldots,$$

то L — вполне рассеянное множество.

Доказательство. Действительно, из условия следует, что для каждого $m \in N$ найдется такое наименьшее натуральное $t = t(m)$, что $\alpha_k - \alpha_{k-1} > m$ при всех $k > t$. Это означает, что множество $B_m(L)$ составляют классы $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_t\}$, $\{\alpha_{t+1}\}$, $\{\alpha_{t+2}\}, \ldots$. В силу определения отсюда выводим, что множество L вполне рассеянное. Лемма доказана. □

Для каждых α, $n \in N$ положим

$$V_\alpha^n = U_{\alpha-n}^{\alpha+n} \cap N,$$

где $U_{\alpha-n}^{\alpha+n}$ — отрезок целых чисел с концами $\alpha - n$, $\alpha + n$.

Лемма 7. *Пусть L — вполне рассеянное множество. Тогда вполне рассеянным является и множество*

$$S = \bigcup_{i \in N} V_{\alpha_i}^n.$$

Доказательство. Предположим, что множество S не вполне рассеянное. Это означает существование такого натурального m, что порядки классов множества $B_m(S)$ неограничены. Если $r = m + 2n$, то по условию порядок любого класса $B_r(L)$ меньше некоторого числа $\mu = \mu(r)$. Пусть теперь $T \in B_m(S)$ и $|T| > \mu(2n+1)$. Если α_t — наименьшее число множества $T \cap L$, то из определения множества S и очевидного неравенства $|V_\alpha^n| \leq 2n+1$ вытекает, что T содержит подмножество

$$V_{\alpha_t}^n \cup V_{\alpha_t+1}^n \cup \ldots \cup V_{\alpha_t+\mu}^n.$$

Отсюда следует, что α_t, $\alpha_{t+1}, \ldots,\ \alpha_{t+\mu}$ являются элементами некоторого класса $Q \in B_r(L)$. Но из вышеизложенного следует, что $|Q| < \mu$. Получили противоречие. Лемма доказана. □

Для каждого натурального q рассмотрим множество

$$L_q = \{q2,\ q2^2, \ldots,\ q2^n, \ldots\},$$

состоящее из элементов геометрической прогрессии. В силу леммы 6 множество L_q вполне рассеянное. Пусть $m \in N$. Ясно, что найдется такое натуральное число $n(m)$, что $q2^{n(m)} > m$ и множества

$$V^m_{q2^{n(m)}},\ V^m_{q2^{n(m)+1}}, \dots,\ V^m_{q2^{n(m)+k}}, \dots$$

попарно не пересекаются. Из леммы 7 следует, что объединение T^q_m всех этих множеств является вполне рассеянным множеством. Положим

$$P_m(q) = \{x \mid x \in G;\ (V^m_{q2^i})^x = V^m_{q2^i}\ (i \geq n(m));\ \beta^x = \beta(\beta \in N \setminus T^q_m)\}.$$

Очевидно, $P_m(q)$ — подгруппа группы G, а так как носитель любой подстановки этой подгруппы содержится в множестве T^q_m, которое вполне рассеянное, то $P_m(q)$ содержится в локально конечном радикале R группы G (предложение 1). В частности, $P_m(q)$ — локально конечная подгруппа. Так как $\mathrm{Fin}(N) \lhd R$, то R содержит подгруппу $H_m(q) = \mathrm{Fin}(N)P_m(q)$.

В силу определения числа $n(m)$ мы можем предполагать, что $n(m+1) > n(m)$ при всех натуральных m. Тогда для каждого $j \geq n(m+1)$ выполняется включение $V^m_{q2^j} \subset V^{m+1}_{q2^j}$. Значит, если $y \in P_m(q)$, то $y \in H_{m+1}(q)$. Отсюда заключаем, что $H_m(q) < H_{m+1}(q)$, $m = 1, 2, \dots$. Таким образом,

$$H(q) = \bigcup_{m \in N} H_m(q) -$$

локально конечная подгруппа группы R.

Покажем, что $H(q) \lhd G$. Пусть $1 \neq h \in P_m(q)$, $q \in G$ и $w(g) = s$. Мы утверждаем, что $h^q \in H_t(q)$, где $t = m + s + 1$. Действительно, рассмотрим разложение h на независимые циклы. Если этих циклов конечное число, то $h^g \in \mathrm{Fin}(N) < H_t(q)$. Пусть $h_1, \dots, h_k, \dots$ — независимые циклы из разложения подстановки h. Считаем, что наименьший элемент цикла h_k меньше аналогичного элемента цикла h_{k+1} $(k = 1,\ 2, \dots)$. Тогда найдется такой индекс j, что при $i > j$ все элементы цикла h_i содержится в некотором множестве $V^m_{q2^{r(i)}} \subset V^t_{q2^{r(i)}}$. Фиксируем такое i и пусть β — любой элемент цикла h_i. Так как $|\beta - \beta^g| \leq s$, то $\beta^g \in V^t_{q2^{r(i)}}$. Это означает, что подстановка $(h_{j+1} \dots h_{j+k}) \dots)^g$ содержится в $P_t(q)$, а поскольку $h^q_1 \cdot \ldots \cdot h^g_j \in \mathrm{Fin}(N)$, то $h^g \in H_t(q)$. Этим доказана нормальность подгруппы $H(q)$ в группе G.

Лемма 8. *Если $x \in H(q)$, $y \in H(r)$, где q, r — различные нечетные натуральные числа, то пересечение $supp(x) \cap supp(y)$ конечно.*

Доказательство. В силу условия существуют такие натуральные числа m_1, m_2, что $x \in H_{m_1}(q)$, $y \in H_{m_2}(r)$. Значит, $x \in H_m(q) = \mathrm{Fin}(N)P_m(q)$, $y \in H_m(r) = \mathrm{Fin}(N)P_m(r)$, где $m = \max(m_1, m_2)$. Так как носитель любого элемента группы $\mathrm{Fin}(N)$ конечен, то для доказательства леммы достаточно предполагать, что $x \in P_m(q)$, $y \in P_m(r)$.

Пусть α — произвольный элемент множества $\mathrm{supp}(x) \cap \mathrm{supp}(y)$. Тогда из определения группы $P_m(q)$ следует, что $|\alpha - q2^{n_1}| \leq m$ для некоторого $n_1 \in N$. Аналогично существует такое $n_2 \in N$, что $|\alpha - r2^{n_2}| \leq m$. Из этих неравенств непосредственно получим

$$|q2^{n_1} - r2^{n_2}| \leq 2m.$$

Заметим теперь, что имеется лишь конечное число пар $(n_1, n_2) \in N \times N$, для которых выполняется последнее неравенство (при фиксированных $m \in N$ и различных нечетных $q,\ r$). Отсюда и из двух предыдущих неравенств следует, что лемма верна. $\square$

Пусть $N_1 = \{2k-1 \mid k \in N\}$ — множество всех нечетных натуральных чисел; $\varnothing \neq A \subseteq N_1$. Обозначим

$$H(A) = \langle H(q) \mid q \in A \rangle.$$

Ясно, что $H(A)$ — локально конечная нормальная подгруппа группы G.

Лемма 9. *Пусть A, B — различные непустые подмножества множества N_1. Тогда $H(A) \neq H(B)$.*

Доказательство. Пусть, например, $q \in A$ и $q \notin B$. Предположим, что $H(q) \leq H(B)$ и рассмотрим инволюцию

$$v_q = (2q\ \ 2q+1)(4q\ \ 4q+1)\dots(2^n q\ \ 2^n q+1)\dots$$

группы $H(q)$ с бесконечным носителем $\mathrm{supp}(v_q)$. Мы имеем $v_q = h_1 \cdot \ldots \cdot h_s$, где $h_1 \in H(r_1), \dots,\ h_s \in H(r_s)$ для некоторых различных элементов $r_1, \dots, r_s$ множества B. Очевидно,

$$\mathrm{supp}(v_q) \subseteq \bigcup_{k=1}^{s} \mathrm{supp}(h_k),$$

а потому

$$\mathrm{supp}(v_q) \subseteq \bigcup_{k=1}^{s} (\mathrm{supp}(v_k) \cap \mathrm{supp}(h_k)).$$

В силу леммы 8 $|\mathrm{supp}(v_k) \cap \mathrm{supp}(h_k)| < \infty$, $1 \leq k \leq s$. Но тогда из последнего включения следует конечность $\mathrm{supp}(v_k)$. Получили противоречие. Итак, $H(q)$ содержится в $H(A)$ и не содержится в $H(B)$. В частности, $H(A) \neq H(B)$. Лемма доказана. $\square$

Перейдем теперь к непосредственному доказательству теорем 4, 5. Рассмотрим множества

$$A_k = \{1,\ 3, \dots, 2k-1\}, \quad k = 1,\ 2, \dots.$$

Очевидно, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k \subset$. В силу леммы 9 мы имеем бесконечную строго возрастающую цепочку

$$H(A_1) < H(A_2) < \ldots < H(A_k) < \ldots$$

локально конечных нормальных в группе G подгрупп $H(A_k)$, $k \in N$. Это означает, что группа G не удовлетворяет условию максимальности для таких подгрупп.

Пусть $B_k = N_1 \setminus A_k$, $k \in N$. Тогда $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_k \supset \ldots$. Согласно лемме 9

$$H(B_1) > H(B_2) > \ldots > H(B_k) > \ldots -$$

бесконечная строго убывающая цепочка локально конечных нормальных в группе G подгрупп $H(B_k)$, $k \in N$. Существование такой цепочки завершает доказательство теоремы 4.

Поскольку множество всех подмножеств счетного множества N_1 континуально, то снова по лемме 9 таковым является и множество

$$\{H(A) \mid \varnothing \neq A \subseteq N_1\},$$

состоящее из локально конечных нормальных в группе G подгрупп. Теорема 5 доказана.

References

[1] N.M. Suchkov, *Example of a mixed group factorized by two periodic subgroups*, Algebra and Logic, **23**:5 (1984), 573–577. MR0817031.

[2] N.M. Suchkov, *On subgroups of the product of locally finite groups*, Algebra and Logic, **24**:4 (1985), 408–413. MR083009.

[3] N.M. Suchkov, N.G. Suchkova, *On groups of limited permutations*, Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics, **3**:2 (2010), 262–266.

[4] N.M. Suchkov, N.G. Suchkova, *On normal subgroups of limited permutation groups*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 344–353. MR3493735.

[5] N.M. Suchkov, N.G. Suchkova, *On locally finite radical of the group of limited permutations*, Trudy Inst. Math. Mekh. UrO RAN, **22**:3 (2016), 259–264. MR3555731.

[6] N.M. Suchkov, N.G. Suchkova, *Normal closures of elements in group Lim*(N), Siberian Electronic Mathematical Reports, **16** (2019), 158–164.

[7] M. I. Kargapolov, Y. I. Merzlyakov, *Foundation of group theory*, Science, Moscow, 1982. MR0677282.

Anatoly Ilyich Sozutov
Siberian Federal University,
79, Svobodny ave.,
Krasnoyarsk, 660041, Russia
E-mail address: sozutov_ai@mail.ru

Nikolai Mihailovich Suchkov
Siberian Federal University,
79, pr. Svobodny ave.,
Krasnoyarsk, 660041, Russia
E-mail address: ns7654321@mail.ru

Nadezhda Georgievna Suchkova
Siberian Federal University,
79, Svobodny ave.,
Krasnoyarsk, 660041, Russia
E-mail address: ns7654321@mail.ru