S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 514.764
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 53C20

РИМАНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ПОЛНОТЫ

В.А. Попов

Abstract. This article deals with locally given Riemannian analytic manifold. One of the main tasks is to define its regular analytic extension in order to generalize the notion of completeness. Such extension is studied for metrics whose Lie algebra of all Killing vector fields has no center. The generalization of completeness for an arbitrary metric is given too. Another task is to analyze the possibility of extending local isometry to isometry of some manifold. It can be done for metrics whose Lie algebra of all Killing vector fields has no center. For such metric there exists a manifold on which any Killing vector field generates one parameter group of isometries. We prove the following almost necessary condition under which Lie algebra of all Killing vector fields generates a group of isometries on some manifold. Let $\mathfrak{g}$ be Lie algebra of all Killing vector fields on Riemannian analytic manifold, $\mathfrak{h}$ is its stationary subalgebra, $\mathfrak{z}$ is its center and $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ is its commutant. G is Lie group corresponding to Lie algebra $\mathfrak{g}$ and H is subgroup corresponding to $\mathfrak{h}$. If $\mathfrak{h}\cap(\mathfrak{z}+[\mathfrak{g},\mathfrak{g}])=\mathfrak{h}\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, then H is closed in G.

Keywords: Riemannian analytic manifold; analytic extension; Lie algebra and Lie group; Killing vector field.

1. Введение

Уже достаточно давно была научно обоснована «криволинейность» нашего пространства. Геометрия нашего пространства не подчиняется законам евклидовой геометрии, а определяется общим понятием римановой метрики. Однако, если мы можем определить локальные свойства окружающего пространства, глобальное устройство вселенной в целом представить очень сложно. Преобладает мнение, высказанное великим ученым А. Пуанкаре, что по аналогии с поверхностью земли, вселенная представляет из себя замкнутое (компактное) пространство, обладающее свойством односвязности (т. е. любая (криволинейная) окружность ограничивает «криволинейный» круг на этом пространстве. А. Пуанкаре выдвинул гипотезу, согласно которой замкнутое односвязное трехмерное пространство топологически эквивалентно трехмерной сфере, что приводит к некоторой аналогии строения вселенной со строением поверхности земли. В недавнее время чисто математическая гипотеза Пуанкаре была окончательно доказана российским математиком Г.Я Перельманом.

Помимо топологического подхода возможен аналитический подход к изучению глобальных свойств риманова пространства. Этот подход связан с тем, что риманов тензор задается аналитическими функциями, которые имеют свойство однозначного аналитического продолжения. Рассмотрим риманово аналитическое многообразие M и шар $U \subset M$ малого радиуса с центром в некоторой точке $x_0 \in M$. Под аналитическим продолжением локально заданной метрики будем подразумевать любое риманово аналитическое многобразие N такое что существует аналитическая изометрия $\varphi : U \to M$. Поставим задачу найти наиболее естественное аналитическое продолжение данной метрики. Естественным требованием является свойство непродолжаемости искомого многобразия, введённого ещё в классических монографиях Хелгасона [1] и С. Кобояси, Ш. Номидзу [2]. Однако непродолжаемые многобразия могут быть весьма неестественными. Например, односвязная накрывающая правой полуплоскости выколотыми точками $\left(\frac{1}{n}; \frac{k}{n}\right)$, $k, n \in N$.

В исследованиях по геометрии римановых пространств в целом, как правило, существенным требованием является полнота рассматриваемого многообразия. Для полного односвязного риманова аналитического многообразия любая изометрия $\varphi : U \to V$ между двумя связными открытыми подмножествами $U \subset M$, $V \subset M$ аналитически продолжается до изометрии $\varphi : M \to M$ [1].

Однако, в общем случае шар U риманова аналитического многобразия нельзя изометрически вложить в полное риманово аналитическое многобразие, т. е., вообще говоря, локально заданная риманова метрика аналитически не продолжается до метрики полного риманова многобразия. Возникает вопрос об обобщении понятия полноты. Естественным обобщением такого рода является непродолжаемость риманова аналитического многобразия. Однако, непродолжаемые многобразия могут быть весьма неестественными.

Зададимся вопросом, можно ли по заданным локальным свойствам римановой аналитической метрики, т. е. метрики, заданной на малом шаре U, построить риманово аналитическое многобразие M, содержащее U в качестве открытого подмножества, и допускающего аналитическое продолжение локальных изометрий до изометрий всего многообразия. Т. е. любая изометрия $\varphi : U \to V$ между двумя связными открытыми подмножествами $U \subset M$, $V \subset M$ аналитически продолжается до изометрии $\varphi : M \to M$. Непреодолимым препятствием для такого продолжения является следующий факт. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли всех векторных полей Киллинга на римановом аналитическом многообразии M и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – её стационарная подалгебра, для фиксированной точки $p \in M$ $X \in \mathfrak{h}$ $X(p) = 0$. Пусть G – односвязная подгруппа, порождённая алгеброй $\mathfrak{g}$, и H – её подгруппа, порождённая подалгеброй $\mathfrak{h}$. Пусть G действует на односвязном многообразии M, тогда орбита фиксированной точки $p \in M$ является подмногообразием изометричным фактор группе G/H. Но фактор группа G/H является многообразием лишь в случае замкнутости подгруппы H в G, а это выполняется не всегда.

Целью данной работы является определение псевдополного многообразия, являющееся «наиболее полным» аналитическим продолжением произвольной локально заданной римановой аналитической метрик. Изучается аналитическое продолжение локально заданной римановой метрики. Рассмотрим случаи вполне неоднородной метрики и метрики, для которой алгебра Ли всех векторных поле Киллинга не имеет центра. В этих случаях дадим определение квазиполного многобразия M, обладающего свойством единственности и продолжаемости всех локальных изометрий $f : U \to V$, где U, V – связные открытые подмножества многобразия M, до изометрии $f : M \to M$. Ориентированное риманово аналитическое многообразие, алгебра векторных полей которого имеет нулевой центр, называется квазиполным, если оно непродолжаемо и не допускает нетривиальных сохраняющих ориентацию и все векторные поля Киллинга локальных изометрий в себя.

Приведем определение псевдополного многообразия, приводящее к «наиболее полному» продолжению локально заданной метрики и применимое к произвольной локально заданной метрики. Риманово аналитическое односвязное ориентированное многобразие M, называется псевдополным, если оно обладает следующими свойствами. M непродолжаемо. Не существует локально изометрического сохраняющего ориентацию накрывающего отображения $f : M \to N$, где N – односвязное риманово аналитическое многобразие, а $f(M)$ открытое подмножество в N не равное N. Среди псевдополных многообразий выделим «наиболее симметричные» правильные псевдополные многообразия. Далее изучим псевдополные многобразия малых размерностей и приведем их классификацию. Второй целью является изучение локально однородных многобразий, причем, не только римановых, но и псевдоримановых. Далее приведем условия, при которых H замкнута в G. Строение незамкнутых подгрупп хорошо известно. Однако, соответствующие исследования носят число алгебраический характер и никак не учитывают локальные свойства римановой метрики. Описание свойств незамкнутой подгруппы $H \subset G$ содержится в классической работе А. И. Мальцева [3]. Если подгруппа Ли H односвязной группы Ли G не замкнута в G, то группа G содержит тор T такой что пересечение $H \cap T$ является всюду плотной обмоткой этого тора. Однако этот факт трудно установить исходя из локальных свойств заданной римановой аналитической метрики, то есть исходя из свойств алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и стационарной подалгебры $\mathfrak{h}$. Можно ли найти свойства алгебры Ли всех векторных полей Киллинга, при выполнении которых подгруппа H, определяемая стационарной подалгеброй $\mathfrak{h}$, будет замкнутой в односвязной группе G, порождённой алгеброй $\mathfrak{g}$. В этом направлении отметим результат Мостова, согласно которому H замкнута в G, если $\mathfrak{h}$ полупроста. Кроме того, Мостов доказал, что H замкнута в G, если $dim\mathfrak{g} - dim\mathfrak{h} < 5$, [4].

Попытаемся найти необходимые и достаточные свойства алгебры Ли $\mathfrak{g}$ всех векторных полей Киллинга на римановом аналитическом многобразии M и её стационарной подалгебры $\mathfrak{h}$, при выполнении которых H замкнута в G. Чисто алгебраических средств здесь недостаточно. Для исследования проблемы замкнутости стационарной подгруппы H в односвязной группе G привлекается изучение аналитического продолжения локально заданной римановой аналитической метрики. Многобразия, являющиеся аналитическим продолжением произвольной локально заданной римановой аналитической метрики, имеет одну и ту же алгебру Ли всех векторных полей Киллинга. Поэтому вопрос замкнутости группы H в G эквивалентен вопросу об аналитической продолжаемости данной локально заданной римановой аналитической метрики на локально однородном пространстве до метрики полного многообразия. Понятие аналитического продолжения римановой аналитической метрики присутствовало в классических монографиях Хелгасона [1] и С. Кобояси, Ш. Номидзу [2], но развития не получило.

Аналитическое продолжение римановых аналитических многообразий, не имеющих ветроных полей Киллинга, мзучается в диссертации Д.Х. Смита [5]. В работах [6], [7], [8] изучается, причём не только для римановых многообразий, но также для псевдоримановых пространств и пространств аффинной связности, случай, когда $\mathfrak{g}$ имеет нулевой центр. Доказывается, что в этом случае подгруппа H, определяемая стационарной подалгеброй $\mathfrak{h}$, будет замкнутой в односвязной группе G, порождённой алгеброй $\mathfrak{g}$. Помимо алгебраического подхода, развивается аналитический подход для изучения аналитического продолжения римановых аналитических многообразий. Основной темой данной работы является исследование локально однородных многообразий, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ всех векторных полей Киллинга которых имеет нетривиальный центр $\mathfrak{z}$. Выводятся свойства алгебры $\mathfrak{g}$, ее стационарной подалгебры $\mathfrak{h}$ и центра $\mathfrak{z}$, обеспечивающего замкнутость подгруппы H, определяемой стационарной подалгеброй $\mathfrak{h}$, в односвязной группе G, порождённой алгеброй $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{z}$ – центр алгебры $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{r}$ – ее радикал, а $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ – ее коммутант. Если $\mathfrak{h}\cap(\mathfrak{z}+[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = \mathfrak{h}\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, то H замкнута в G. Если для любой полупростой подалгебы $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{g}$ такой, что $\mathfrak{p}+\mathfrak{r}=\mathfrak{g}$, где $\mathfrak{r}$ – радикал $\mathfrak{g}$, имеет место $(\mathfrak{p}+\mathfrak{z})\cap\mathfrak{h} = \mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}$, то H замкнута в G.

Принципиальным является исследование случая вполне неоднородной римановой метрики, т. е. метрики не допускающих никаких движений (полей Киллинга). В этом случае удаётся определить, так называемое, квазиполное многообразие, обладающее свойством непродолжаемости и единственности для каждой локально заданной вполне неоднородной метрики, [6]. Определение квазиполного многообразия удаётся обобщить на случай, когда алгебра Ли всех векторных полей Киллинга для заданной локально определённой римановой аналитической метрики не имеет центра, [7], [8]. Такое многобразие M обладает свойством максимально возможной симметрии, т. е. любая изометрия $f : U \to V$ между связными открытыми подмножествами многообразия M аналитически продолжается до изометрии $f : M \to M$. Однако, квазиполное многообразие обладает не только тем недостатком, что оно определено не для произвольной локально заданной метрики, но оно в определённом смысле не является «самым полным». Поэтому далее для произвольной локально заданной римановой метрики мы приведём понятие псевдополного многообразия, исследуем его свойства и связь с квазиполным многообразием, а также опишем псевдополные многобразия в случае малых размерностей.

2. Аналитическое продолжение римановых многообразий и обобщение понятия полноты

Класс всех локально изометричных римановых аналитических многообразий будем называть также классом многообразий, происходящих из данного ростка риманова аналитического многобразия, а конкретное многообразие из этого класса будем называть аналитическим продолжением данного ростка.

Естественным требованием к аналитическому продолжению ростка является непродолжаемость полученного многообразия. Перейдем к точным определениям и формулировкам.

Определение 1. *Аналитическим продолжением риманова аналитического многообразия M назовём риманово аналитическое многобразие N такое, что существует аналитическое вложение M в N как собственного открытого подмножества. Многообразие, не допускающее аналитического продолжения называется непродолжаемым.*

Определение 2. *Локальной изометрией между двумя римановыми аналитическими многообразиями M и N называется изометрия $\varphi : U \to V$ между открытыми подмножествами $U \subset M$, $V \subset N$. Многообразия между которыми существует локальная изометрия назовём локально изометричными.*

Любое векторное поле $X \in \mathfrak{g}$ аналитически продолжается вдоль любой кривой на многобразии M, и, тем самым, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ определяет алгебру Ли $\mathfrak{g}$ векторных полей Киллинга на любом односвязном многообразии N локально изометричном M. Этот факт верен также для многообразий аффинной связности.

Лемма 1. *Пусть M – аналитическое многообразие аффинной связности, X – инфинитеземальное аффинное преобразование, заданное в области $U \subset M$, и пусть $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$, такая непрерывная кривая в M такая, что $\gamma(t) \in U$. Тогда векторное поле аналитически продолжаемо вдоль $\gamma(t)$. Если кривые $\gamma(t)$ и $\delta(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $\gamma(0) = \delta(0)$, $\gamma(1) = \delta(1) = x_1$ гомотопны, то продолжения векторных полей в точку x_1 вдоль этих кривых совпадают.*

Доказательство. Предположим, что X аналитически продолжаемо в окрестность любой точки $\gamma(t)$ при $0 \leq t < t_1$. Докажем, что X продолжается и в окрестность точки $q = \gamma(t_1)$. Пусть V - нормальная окрестность точки q, являющаяся нормальной окрестностью каждой из своих точек ([1]). Рассмотрим $t < t_1$ такое, что $p = \gamma(t) \in V$.

Векторное поле X порождает локальную однопараметрическую группу изометрий ϕ_s в окрестности каждой точки $\gamma(t)$, $t < t_1$. Докажем, что для всех достаточно малых значений s локальные изометрии φ_s аналитически продолжаются и в окрестность точки $q = \gamma(t_1)$. Тогда векторное поле скоростей этой локальной группы изометрий и будет аналитическим продолжением векторного поля X в окрестность точки q.

Рассмотрим связное открытое множество V_0, содержащее точки p и q, замыкание которого также принадлежит V, $\overline{V_0} \subset X$, $p, q \in V_0$. Рассмотрим малую окрестность $V' \in V_0$ точки q и соединим точку p отрезком геодезической $\alpha(t)$, $0 \leq t \leq 1$, с произвольной точкой $q' \in V'$. Пусть $Y = d\alpha/dt(0) \in T_pM$ и $p_s = \varphi_s(p)$, $Y_s = \varphi_s(Y)$. Из точки p_s проведём геодезическую $\beta(t)$, $0 \leq t \leq 1$, такую, что $d\beta/dt(0) = \gamma_s$. При достаточно малых значениях s $\beta(t) \in V_0$, $0 \leq t \leq 1$. Положим $\varphi_s(q') = \beta(1)$. Полученное таким образом отображение и есть аналитическое продолжение изометрии φ_s. □

Принципиальным является исследование случая вполне неоднородной римановой метрики, т. е. метрики без векторных полей Киллинга. В этом случае удаётся определить квазиполное многообразие, обладающее свойством непродолжаемости и единственности для каждой локально заданной вполне неоднородной метрики, [6].

Определение 3. *Риманово аналитическое многообразие называется вполне неоднородным многообразием, если на нём не существует векторных полей Киллинга. Риманову метрику вполне неоднородного многообразия назовём вполне неоднородной метрикой.*

По лемме 1 все многообразия локально изометричные вполне неоднородному многообразию являются вполне неоднородными.

Определение 4. *Вполне неоднородное ориентированное риманово аналитическое многообразие называется квазиполным, если оно непродолжаемо и не допускает нетривиальных сохраняющих ориентацию локальных изометрий в себя.*

Приведём основные свойства вполне неоднородных квазиполных многообразий, [6]. Для произвольного вполне неоднородного многообразия M рассмотрим множество $S \subset M$ всех неподвижных точек всевозможных сохраняющих ориентацию локальных изометрий многобразия в себя.

Теорема 1. *Для произвольного вполне неоднородного риманова аналитического многообразия множество $S \subset M$ является аналитическим подмножеством коразмерности не меньше, чем 2. Следовательно, $M \setminus S$ является связным многообразием.*

Теорема 2. *Для любого вполне неоднородного риманова аналитического многообразия M' существует локально изометричное ему квазиполное многообразие M и локально изометричекое накрывающее отображение $f : M' \setminus S \to M$. Таким образом, квазиполное многообразие обладает свойством единственности для каждой вполне неоднородной локально заданной римановой аналитической метрики.*

Определение квазиполного многообразия удаётся обобщить на случай, когда алгебра Ли всех векторных полей Киллинга для заданной локально определённой римановой аналитической метрики не имеет центра, [7]. Таковыми являются и многие локально однородные многообразия, в частности все локально симметрические пространства.

Определение 5. *Риманово аналитическое многообразие M называется локально однородным, если в любой точке $p \in M$ векторные поля Киллинга образуют базис касательного пространства T_pM .*

Эквивалентное определение локально однородного многообразия M состоит в том, что любых точек $p, q \in M$ существует локальная изометрия φ многообразия M такая, что $\varphi(p) = q$

Определение 6. *Ориентированное риманово аналитическое многообразие, алгебра Ли всех векторных полей которого имеет нулевой центр, называется квазиполным, если оно непродолжаемо и не допускает нетривиальных сохраняющих ориентацию и все векторные поля Киллинга локальных изометрий в себя.*

Исследуем ориентированные римановы аналитические многообразия, алгебра Ли всех векторных полей Киллинга которых не имеет центра с целью доказать, что каждое такое многообразие локально изометрично квазиполному многообразию, а локально однородное квазиполное многообразие является полным однородным многообразием.

Обозначим через $Z(M)$ псевдогруппу всех, сохраняющих ориентацию и векторные поля Киллинга, локальных изометрий риманова аналитического многобразия M, $\varphi \in Z(M)$ если $\forall X \in \mathfrak{g}\ \varphi(X) = X$.

Лемма 2. *Пусть M – риманово аналитическое многообразие, удовлетворяющее свойству однозначного продолжения векторных полей Киллинга и алгебра Ли всех векторных полей Киллинга которого не имеет центра. Тогда множество $S \subset M$, состоящее из неподвижных точек всевозможных изометрий $\varphi \in Z(M)$, является аналитическим подмножеством коразмерности не меньше, чем 2*

Доказательство. Докажем, что для любого открытого множества $U \subset M$ с компактным замыканием имеется только конечное число локальных изометрий из U в себя, принадлежащих псевдогруппе $Z(M)$. Предположим противное и рассмотрим бесконечную последовательность локальных изометрий $\varphi_i \in Z(M)$, область определения и множество значений которых лежат в U. При доказательстве леммы 3 работы [6] по бесконечной последовательности локальных изометрий φ_i на некотором открытом множестве $V \subset U$ было построено векторное поле Киллинга X, которое при переходе к подпоследовательности удовлетворяет следующему условию. $\forall t, |t| < 1, \forall i \in N, \exists k(i) \in N$ так, что $\lim\limits_{i\to\infty} \varphi_i^{k(i)} = ExptX$, где $ExptX$ – локальная однопараметрическая группа изометрий, порожденная векторным полем X. Следовательно для любого векторного поля Y на V $\exists i \in \mathbb{N}$ такое, что выполняется неравенство $|(Exptx)_* Y - Y| \leq |\varphi_i^{k(i)} Y - Y| + |(ExptX)_* Y - \varphi_i^{k(i)} Y| \leq 0 + |Y - (Exp(-tX))_* \varphi^{k(i)} Y| \leq \frac{1}{2}|(Exptx)_* Y - Y|$. Следовательно, $\forall Y \in \mathfrak{g}\ (ExptX)_* Y = Y$, т.е. $[X, Y] = 0$. Но это противоречит отсутствию центра в алгебре $\mathfrak{g}$.

Полученное противоречие доказывает существование только конечного числа локальных изометрий из U в U, принадлежащих псевдогруппе $Z(M)$. А отсюда, как было показано в [7], уже легко следует тот факт, что множество S является аналитическим подмножеством коразмерности не меньшей, чем 2. $\square$

В силу леммы 2 многообразие $M \setminus S$ связно.

Лемма 3. *Пусть M – риманово аналитическое многообразие, удовлетворяющее свойству однозначного продолжения векторных полей Киллинга и алгебра Ли всех векторных полей Киллинга которого не имеет центра. Тогда существует локально изометрическое накрывающее отображение из $M \setminus S$ в риманово аналитическое многобразие M_1, также удовлетворяющее свойству однозначного продолжения векторных полей Киллинга и псевдогруппа $Z(M_1)$ которого состоит только из тождественного преобразования.*

Доказательство. Профакторизуем многобразие $M \setminus S$ по псевдогруппе $Z(M)$. Из доказательства леммы 2 следует, что для каждой точки $x \in M \setminus S$ существует окрестность $U_{1x} \subset M \setminus S$ точки x, которая не допускает нетождественных сохраняющих ориентацию локальных изометрий в себя, принадлежащим псевдогруппе $Z(M)$. Это доказывает, что фактор отображение π, проектирующее многообразие $M \setminus S$ во множество $M_1 = M \setminus S/Z(M)$ является накрывающим отображением. Значит, для каждой точки $x \in M$ существует такая ее окрестность $U_x \subset M_1$ и такое открытое множество $V_x \subset \pi^{-1}(U_x)$, что отображение π устанавливает гомеоморфизм между множествами V_x и U_x. Определим риманово скалярное произведение. Сузив, если необходимо, множество $V_x \subset M \setminus S$, будем считать, что V_x является координатной окрестностью точки $y \in \pi^{-1}(U_x) \subset M \setminus S$. Тогда объявим множество $U_x \subset M_1$ координатной окрестностью точки $x \in M_1$. Рассмотрим две такие окрестности $U_1, U_2 \subset M_1$, $U_1 \cap U_2 \neq \oslash$. Заметим, что соответствующие множествам U_1,U_2 множества $V_1, V_2 \subset M \setminus S$ могут и не пересекаться. Положим $\pi^{-1}(U_1 \cap U_2) \cap V_1 = V_{10}$, $\pi^{-1}(U_1 \cap U_2) \cap V_2 = V_20$. Тогда существует изометрия $\alpha : V_10 \to V_20$. Пусть ψ_1 и ψ_2 – координатные отображения на V_1 и V_2 соответственно. Тогда $\psi_1\pi^{-1}$ и $\psi_2\pi^{-1}$ будут координатными отображениями на U_1 и U_2.

Рассмотрим произвольную точку $x \in M_1$ и произвольные векторы $X, Y \in T_xM_1$. Рассмотрим какую-нибудь точку $y \in \pi^{-1}(x) \subset M \setminus S$ и векторы $X_1, Y_1 \in T_yM$ такие, что $\pi_*X_1 = X$, $\pi_*Y_1 = Y$. Определим риманово скалярное произведение (X, Y) равным имеющемуся на T_xM риманову скалярному произведению (X_1, Y_1). Если взять другую точку $z \in \pi^{-1}(x)$ и векторы $X_2, Y_2 \in T_zM$ такие, что $\pi_*X_2 = X, \pi_*Y_2 = Y$, то существует локальная изометрия $\varphi \in Z(M)$ такая, что $\varphi(z) = y$, $\varphi_*X_2 = X_1$, $\varphi_*Y_2 = Y_1$. Следовательно, $(X_1, Y_1) = (X_2, Y_2)$. Это доказывает корректность определения римановой метрики на M_1.

Построенное риманово многообразие M_1 не допускает нетождественных сохраняющих ориентацию локальных изометрий, индуцирующих тождественное преобразование на алгебре векторных полей Киллинга $\mathfrak{g}$. Проекция $\pi : M \setminus S \to M_1$ является локально изометрическим накрывающим отображением. Остается доказать свойство однозначного продолжения векторных полей Киллинга на M_1. Рассмотрим векторное поле Киллинга X, заданное на некотором открытом множестве $U \subset M_1$, и такие открытые множества $U_0 \subset U$ и $V_0 \subset M \setminus S$, что накрывающее отображение π устанавливает изометрию между множествами V_0 и U_0. Тогда векторное поле $\pi_*^{-1}X$ однозначно продолжается с множества $V_0 \subset M$ на все многообразие M и задает векторное поле Y на M. Пусть точки $y, z \in M \setminus S$ таковы, что $\pi(x) = \pi(y)$ и $\pi_*Y(z) = \pi_*\varphi_*Y(y)$. Так как $\pi\varphi = \pi$ по определению π, то $\pi_*\varphi_* = \pi_*$ Следовательно, $\pi_*Y(z) = \pi_*\varphi_*Y(y) = \varphi_*Y(y)$.Это доказывает, что отображение π однозначно проектирует векторное поле Y, заданное на M, на векторное поле π_*Y, заданное на многообразии M_1. Полученное векторное поле π_*Y, и будет аналитическим продолжением векторного поля X на все многообразие M_1. □

Теорема 3. *Произвольное риманово аналитическое многообразие M, алгебра Ли векторных полей Киллинга не имеет центра локально изометрично квазиполному многообразию.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное риманово аналитическое многообразие M', алгебра Ли векторных полей Киллинга которого не имеет центра. Многобразие M_1, построенное при доказательстве леммы 3, не допускает локальных изометрий в себя, сохраняющих ориентацию и векторные поля Киллинга. Тогда квазиполным многообразием M будет некоторое максимальное аналитическое продолжение многообразия M_1. Будем считать, что все многообразия, которые мы будем рассматривать при доказательстве теоремы, обладают свойством однозначного аналитического продолжения векторных полей

Киллинга, т.е. алгебра Ли всех векторных полей Киллинга одинакова для всех многообразий и равна $\mathfrak{g}$. Если M' удовлетворяет этому свойству, то и многобразие M_1 ему удовлетворяет.

Рассмотрим множество Λ, состоящее из аналитических продолжений M_α многообразия M_1, удовлетворяющих свойству однозначного продолжения векторных полей Киллинга и не допускающих локальных изометрий тождественных на алгебре всех векторных полей Киллинга. Снабдим многообразие M_1 отмеченной точкой и отмеченным репером в отмеченной точке, а образы этой точки и этого репера отметим в многообразиях $M_\alpha \in \Lambda$. Введем на этом множестве следующее отношение порядка. $M_\alpha \leq M_\beta$, если существует изометрическое вложение $i_{\alpha\beta} : M_\alpha \to M_\beta$, переводящее отмеченную точку в отмеченную и отмеченный репер в отмеченный. В результате Λ становится частично упорядоченным множеством. Рассмотрим произвольное линейно упорядоченное подмножество Δ множества Λ, Построим прямой предел семейства многообразий $M_\alpha \in \Lambda$ и отображений $i_\alpha\beta$. Получим многобразие M_0, обладающее следующими свойствами. Для любого многобразия $M_\alpha \in \Delta$ существует изометрическое вложение $i_\alpha : M_\alpha \to M_0$, причем $i_\alpha(M_\alpha) \subset i_\beta(M_\beta)$, если $M_\alpha \leq M_\beta$. $M_0 = \bigcup_{M_\alpha \in \Delta} M_\alpha$. Докажем, что $M_0 \in \Lambda$. Произвольное векторное поле X на многообразии M_1 при помощи вложений $i_{1\alpha} : M_1 \to M_\alpha$ и $i_\alpha : M_\alpha \to M_0$ переносится на многобразие $i_\alpha(M_\alpha) \subset M_0$, причем, $(i_\alpha \cdot i_{1\alpha})_* X = (i_\beta \cdot i_{1\alpha})_* X$ на $i_\alpha(M_\alpha) \cap i_\beta(M_\beta)$, а векторное поле Киллинга $(i_\alpha \cdot i_{1\alpha})_* X$ однозначно продолжается с подмногообразия $i_\alpha(M_\alpha) \subset M_0$ на любое подмногообразие $i_\beta(M_\beta) \subset M_0$, $M_\beta \leq M_\alpha$, и значит, на все многобразие M_0. Таким образом, векторное поле Киллинга, заданное на произвольно малом открытом множестве $U \subset M_0$ однозначно продолжается до векторного поля Киллинга на M_0.

Рассмотрим теперь локальную изометрию $\varphi \in Z(M_0)$. Пусть точка $x_0 \in M_0$ принадлежит области определения изометрии φ. Тогда точки x_0 и $\varphi(x_0)$ лежат в некотором подмногобразии $i_\alpha(M_\alpha) \subset M_0$. Следовательно, $\varphi \in Z(i_\alpha(M_\alpha))$, и поэтому φ является тождественным преобразованием. Значит, псевдогруппа $Z(M_0)$ состоит только из тождественного преобразования. Итак, для произвольного линейно упорядоченного подмножества $\Delta \subset \Lambda$ мы построили верхнюю грань. По лемме Цорна множество Λ имеет максимальный элемент. Мы утверждаем, что многобразие M, являющееся таким максимальным элементом, и будет искомым квазиполным многобразием. Требуется доказать, что M непродолжаемо.

Предположим противное и обозначим через N нетривиальное продолжение многобразия M. Пусть $S \subset N$ так же, как и выше, обозначает множество неподвижных точек всевозможных локальных изометрий из псевдогруппы $Z(N)$. Точно так же, как и при доказательстве леммы 3 было профакторизовано многообразие $M \setminus S$, профакторизуем многообразие $N \setminus S$. В результате получим многообразие L, удовлетворяющее свойству однозначного продолжения векторных полей Киллинга и не допускающего локальных изометрий, сохраняющих ориентацию и все векторные поля Киллинга. Обозначим через i вложение $i : M \to N$. Докажем, что $i(M) \cap S = \oslash$. Если $x \in i(M)$, то и некоторый нормальный шар B с центром в x принадлежит $i(M)$. Если, кроме того, $x \in S$, то существует локальная изометрия $\varphi \in Z(M)$, удовлетворяющая условию $\varphi(x) = x$. Эта изометрия определяет изометрию шара B в себя, заданную в нормальных координатах линейным отображением – дифференциалом изометрии φ. Но существование такой изометрии противоречит тривиальности псевдогруппы $Z(M)$. Таким образом, i задает вложение $i : M \to N \setminus S$. Сквозное отображение $\pi \cdot i : M \to L$, где ß : $N \setminus S \to L$ – построенное при доказательстве леммы 3 накрывающее отображение, является также вложением. Так как, если $\pi \cdot i(x) = \pi \cdot i(y)$, то существует локальная изометрия $\varphi \in Z(M)$ такая, что $\varphi(x) = \varphi(y)$, следовательно $x = y$. В силу того, что M – максимальный элемент множества Λ, $\pi \cdot i$ является изометрией, и $N \setminus S$ накрывает M.

Имеем накрывающее отображение $\pi : N \setminus S \to M$ и вложение $i : M \to N \setminus S$, причем $i(M)$ открыто в $N \setminus S$. Пусть имеется последовательность точек $x_n \in i(M)$, сходящаяся к $x \in N \setminus S$. Тогда последовательность $y_n = \pi(x_n)$ также сходится к некоторой точке $y \in M$. Но тогда, так как $x_n = i(y_n)$, то $x = i(y) \in i(M)$. Это доказывает замкнутость $i(M)$ в $N \setminus S$. Итак, $N \setminus S$ несвязно или $N \setminus S = M$, Но несвязность $N \setminus S$ противоречит лемме 2. Поэтому $N \setminus S = M$. Докажем, что $S = \oslash$. Предположим противное и рассмотрим нормальный шар B с центром в некоторой точке $x \in S \subset N$. Существует нетривиальная изометрия шара B в себя. Эта изометрия не оставляет неподвижными точки из $B \setminus S$ и, поэтому, является нетождественной локальной изометрией из псевдогруппы $Z(N \setminus S)$. Но, так как $N \setminus S = M$, то это противоречит тривиальности псевдо группы $Z(M)$. Это доказывает, $S = \oslash$, $N = M$ и M непролжаемо. □

Теорема 4. *Пусть φ – локальная изометрия из квазиполного многообразия M в квазиполное многобразие N. Тогда φ продолжается до изометрии φ : $M \to N$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $x \in M$ и гладкую кривую $\gamma(t)$, $0 \le t \le 1$, $\gamma(0) \in D(\varphi) \subset M$, $\gamma(1) = x$. Докажем, что изометрию φ, заданную в окрестности $U = D(\varphi) \subset M$ точки $x_0 = \gamma(0)$, можно продолжить вдоль кривой γ. Предположим, что такого продолжения не существует. Рассмотрим минимальное число $t_1 \in [0;1]$ среди чисел t таких, что изометрия φ не продолжается в окрестность точки $\gamma(t)$ вдоль кривой γ. Докажем, тем не менее, что вопреки предположению продолжение φ на некоторую окрестность точки $\gamma(t_1)$ вдоль кривой $\gamma(t)$ существует.

В силу предположения, сделанного относительно t_1, $\forall t \in [0; t_1)$, изометрия φ определена в некоторой окрестности точки $\gamma(t)$. Так что на N определена кривая $\delta(t) = \varphi(\gamma(t))$, $0 \le t \le t_1$. Пусть $x_1 = \gamma(t_1)$ и $\epsilon > 0$ таково, что окрестность $U_\epsilon = x \in M, \rho(x; x_1) < \epsilon$ является нормальной окрестностью каждой из своих точек. Так как $\forall y \in N \ \forall \epsilon_0 > 0$, $\exists \alpha$ такое, что $\forall t^{'}, t^{''} \in [0; t_1)$, при условии $|t_1 - t^{'}| < \alpha$, $|t_1 - t^{''}| < \alpha$, выполняются неравенства $|\rho(y; \delta(t^{'})) - \rho(y, \delta(t^{''}))| \le \rho(\delta(t^{'}); \delta(t^{''})) \le \int_{t^{'}}^{t^{''}} \sqrt{\langle \delta^{'}(t); \delta^{'}(t) \rangle} dt = \int_{t^{'}}^{t^{''}} \langle \gamma^{'}(t); \gamma^{''}(t) \rangle dt < \varepsilon_0$. Следовательно, $\forall y \in N$ существует $\lim\limits_{t \to t_1} \rho(y, \delta(t)) = \rho_1(y)$. Рассмотрим множество $V_\varepsilon = y \in N | \rho_1(y) < \varepsilon$. Существует изометрия $\varphi = \psi^{-1}$ некоторой окрестности $V_D \subset V_\varepsilon$ множества $D = \{y \in N | y = \delta(t), t_2 \le t < t_1\}$ на окрестность $U_D \subset U_\varepsilon$ множества $B = \{x \in M | x = \gamma(t), t_2 \le t < t_1\}$. Докажем, что ψ можно продолжить до изометрии $\psi : V_\varepsilon \to U_\varepsilon$. Докажем сначала, что ψ вдоль любой кривой $\nu(s), 0 \le s \le 1$ на V_ε, $\nu(0) \in V_D$, $\nu(1) = y$ – произвольная точка на V_ε. Если предположить, что это не так, то существует минимальное число s_1 среди чисел $u \in [0; 1]$, обладающих свойством: ψ не продолжается вдоль кривой $\nu(s)$

в какую-нибудь окрестность точки $\nu(u)$. Пусть $\sigma > 0$ и $s_2 < s_1$ таковы, что множество $B_\sigma = \{y \in N | \rho(y; \nu(s_2)) < \sigma\}$ является нормальной окрестностью точки $\nu(s_2)$ и $\rho(\nu(s_2); \nu(s_1)) < \frac{\sigma}{2}$. Следовательно, $\nu(s_1) \in B_\sigma$. Используя линейность отображения ψ в нормальных координатах, можно продолжить изометрию ψ, определенную на некоторой окрестности точки $\nu(s_2)$, до изометрии ψ, определенной на всем множестве B_σ, являющимся окрестностью точки $\nu(s)$. Это опровергает предположение о непродолжаемости ψ вдоль кривой $\nu(s)$.

Докажем теперь, что продолжение изометрии ψ воль всевозможных кривых на V_ε дает однозначное отображение $\psi : V_\varepsilon \to U_\varepsilon$. Предположим противное. Тогда существует замкнутая жорданова кривая $\nu(t)$, $0 \le t \le 1$, $\nu(0) = \nu(1)$, на V_ε такая, что кривая $\beta(t) = \psi(\nu(t))$ на U_ε будет незамкнутой, $\beta(0) \ne \beta(1)$. Но так как всевозможные аналитические продолжения изометрии ψ индуцируют одинаковые отображения на алгебре векторных полей Киллинга, то изометрия вида $\psi\psi^{-1}$, переводящая $\beta(0)$ в $\beta(1)$, принадлежит псевдогруппе $Z(M)$, а это противоречит тому, что M является квазиполным многообразием. Аналогично доказывается, что продолжение локальной изометрии $\phi = \psi^{-1}$ из U_ε в V_ε задает однозначное отображение на множестве $\varphi(V_\varepsilon) \subset U_\varepsilon$. Итак, имеем изометрическое вложение $V_\varepsilon \to U_\varepsilon$. Докажем, что оно является сюръективным отображением. Если предположить противное, то склеив многообразия N и U_ε по отображению ψ, получим нетривиальное продолжение многообразия N, что противоречит его непродолжаемости. Следовательно, имеем изометрию $\psi : V_\varepsilon \to U_\varepsilon$. Обратная изометрия $\psi^{-1} : U_\varepsilon \to V_\varepsilon$ дает продолжение изометрии ψ на окрестность U_ε точки $\gamma(t_1)$ воль кривой γ вопреки первоначальному предположению относительно t_1.

Таким образом, мы доказали, что локальная изометрия φ из M в N продолжается в любую точку $x \in M$ вдоль произвольной кривой на M. Точно также, как выше мы доказали, что продолжение изометрии ψ вдоль всевозможных кривых на V_ε дает взаимно однозначное отображение, определенное на всем V_ε, доказывается, что продолжение φ вдоль всевозможных кривых на M дает изометрическое вложение $\varphi : M \to N$. $\square$

Следствие 1. *Произвольное риманово аналитическое многообразие, алгебра Ли всех векторных полей Киллинга которого не имеет центра локально изометрично единственному квазиполному многообразию. То есть, локально заданная риманова аналитическая метрика, алгебра Ли векторных полей Киллинга которой не имеет центра, единственным образом продолжается до квазиполного многообразия.*

Доказательство. Пусть квазиполное многообразие M локально изометрично многообразию M' и пусть N – другое квазиполное многообразие, локально изометричное многообразию M'. Тогда существует локальная изометрия φ из N в M' и локальная изометрия ψ из M' в M. Суперпозиция изометрий φ и ψ является локально изометрией из N в M. По теореме 4 локальная изометрия из ψ в φ продолжается до изометрии $M \to N$. Что и требовалось доказать. $\square$

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли всех векторных полей Киллинга римановом аналитическом многообразии M', диффеоморфном шару, а $\mathfrak{h}$ – ее стационарная подалгебра. Пусть G – односвязная группа, порождённая алгеброй $\mathfrak{g}$ и H – её подгруппа, порождённая подалгеброй $\mathfrak{h}$. Если $\mathfrak{g}$ не имеет центра, то H замкнута в G.*

Доказательство. Так как M' диффеоморфно шару, его векторные поля Киллинга аналитически продолжаются на нем однозначно. По теореме 3 многообразие M' локально изоморфно квазиполному многообразию M, имеющему ту же самую алгебру Ли $\mathfrak{g}$ всех векторных полей Киллинга и ту же самую стационарную подалгебру $\mathfrak{h}$. Для произвольного векторного поля $X \in \mathfrak{g}$ при всех значениях параметра t меньших некоторого положитедьного числа δ элементы однопараметрической группы преобразований $ExptX$ являются локальными изометриями многообразия M. По теореме 4 они продолжаются до изометрий всего многообразия M. Но тогда определены изометрии $ExpntX = (ExptX)^n$. Таким образом, группа G действует на M, а H является ее стационарной подгруппой. Это означает, что орбита группы G на M накрывается однородным многообразием G/H. Следовательно, H замкнута в G. □

Отметим, что квазиполное многообразие являются наиболее сжатым, то есть универсально притягивающим объектом в категории всех локально изометричных многообразий. Для любого риманова аналитического многообразия M', алгебра векторных полей Киллинга которого не имеет центра, существует локально изометрическое отображение из $M' \setminus S'$ в квазиполное многобразие M, определенное на всем $M' \setminus S'$, где S' – множество неподвижных точек всех сохраняющих ориентацию и векторные поля Киллинга локальных изометрий многообразия M'.

Квазиполное многообразие единственно в классе всех аналитических продолжений данного ростка и обладает рядом замечательных свойств, [6]. Прежде всего, свойством максимальной симметрии, т. е. любая локальная изометрия $f : U \to V$ из квазиполного многообразия M в себя аналитически продолжается до изометрии $f : M \to M$. Однако, понятие квазиполного многообразия обладает не только тем недостатком, что оно определено не для всех локально заданных римановых аналитических метрик, но оно также не является в определённом смысле «самым полным». А именно, существует росток риманова аналитического многообразия, допускающий продолжение до полного многообразия, каноническое продолжение которого до квазиполного не является полным многообразием.

Пример 1. *Рассмотрим эллипсоид в трёхмерном пространстве, заданный уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Для того, чтобы получить квазиполное многообразие в классе всех римановых аналитических многообразий локально изометричных эллипсоиду, необходимо выбросить из эллипсоида 6 точек пересечения с осями координат и профакторизовать полученное многообразие по группе вращений на 180 градусов вокруг всех осей координат.*

Дать обобщение понятия полноты, приводящее к «самому полному» многообразию для произвольного ростка риманова аналитического многобразия оказывается возможным.

Определение 7. *Риманово аналитическое односвязное многообразие M, называется псевдополным, если оно обладает следующими свойствами. M непродолжаемо. Не существует локально изометрического накрывающего отображения $f; M \to N$, где N – односвязное риманово аналитическое многобразие, а $f(M)$ открытое подмножество в N не равное N.*

Исследуем аналитическое продолжение до псевдополного многообразия для различных классов ростков римановых аналитических многообразий. Прежде всего следует установить тот факт, что аналитическое продолжение до псевдополного многообразия существует для любого ростка риманова аналитического многобразия. Вместе с тем в общем случае это продолжение не единственно, однако, различные аналитические продолжения одного и того же ростка различаются не очень значительно.

Теорема 5. *Любое локально заданное риманово аналитическое многобразие допускает аналитическое продолжение до псевдополного многообразия. Если в классе локально изометричных римановых аналитических многообразий имеется полное многообразие, то это многобразие является единственным псевдополным многобразием в этом классе.*

Доказательство. На множестве всех односвязных аналитических продолжений данного ростка риманова аналитического многобразия введём следующее отношение порядка. Многобразие M больше или равно многобразия N, $M \succeq N$, если существует локально изометрическое отображение $f; N \to M$. Тем самым, множество односвязных локально изометричных друг другу римановых аналитических многобразий превращается в частично упорядоченное множество. По лемме Цорна это множество содержит максимальный элемент. Этот элемент по определению и будет псевдополным многообразием.

Рассмотрим полное риманово аналитическое многобразие M. Если предположить, что M не является псевдополным, то существует локально изометрическое отображение $f; M \to N$ такое, что что некоторая точка $x \in N$, $x \notin f(M)$. Пусть $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$, геодезическая, соединяющая точку $\gamma \in f(M)$ с точкой x. Тогда прообраз этой геодезической при $0 \leq t \leq \delta$ не продолжается до геодезической при всех t на многобразии M, что противоречит полноте этого многобразия. □

Псевдополное многобразие не единственно в классе всех локально изометричных римановых аналитических многобразий.

Пример 2. *Рассмотрим росток A двумерного риманова аналитического многобразия, носителем которого является сфера с метрикой $ds^2 = \frac{f(z,\overline{z})}{\sqrt{1+|z|^2}} dz d\overline{z}$, где $f(z,|z|)$ – аналитическая функция на сфере, удовлетворяющая условию $f(z,|z|) \neq |A'(z)|^2 f(A(z), A(\overline{z}))$ для любого дробно линейного преобразования $A(z)$. Такая метрика имеет особенность в точке $z = \infty$. Сфера с данной метрикой является псевдополным многобразием. Устраним особенность в точке $z = \infty$ при помощи преобразования $z = w^2 + a$, $a \in C$. В результате, получим сферу двулистно накрывающую первоначальную и имеющую метрику $ds^2 = \frac{4|w|^2 f(w^2+a, \overline{w}^2+\overline{a})}{(1+|w^2+a|^2)} dw d\overline{w}$. Эта метрика имеет особенность в точке $w = 0$, что является естественным, так как сфера w ветвится над сферой z в точке $z = a$, соответствующей точке $w = 0$. При различных a получаем различные псевдополные многобразия с координатой w.*

Как показывает пример 2, имеется большое множество не очень естественных псевдополных многобразий. С целью избежать разветвления над регулярными точками сузим понятие псевдополного многобразия.

Определение 8. *Риманово аналитическое односвязное многообразие M, называется правильным псевдополным многообразием, если не существует накрывающего локально изометрического отображения $f : M \setminus S \to N$ в другое псевдополное многобразие N локально изометричное многообразию M.*

Теорема 6. *Локальная изометрия из правильного псевдополного многообразия M в правильное псевдополное многобразие N аналитически продолжается вдоль непрерывных кривых в любую точку M за исключением аналитического подмножества S коразмерности не меньше, чем 2.*

Доказательство. Доказательство приведём для случая, когда алгебра Ли всех векторных полей Киллинга не имеет центра. Рассмотрим подмножества $S \subset M$ и $S' \subset N$, состоящие из всех неподвижных точек локальных изометрий, сохраняющих ориентацию векторные поля Киллинга. Множества S и S' являются аналитическими подмножествами многообразий M и N коразмерности не меньшей, чем 2, [7], [8]. Пусть M_0 – квазиполное многобразие, локально изометричное многобразиям M и N. Тогда существуют накрывающие локально изометрические отображения $f : M \setminus S \to M_0$ и $g : N \setminus S' \to M_0$, [7], [8]. При этом, из определения правильного псевдополного многобразия следует, что $f(M \setminus S) = M_0$ и $g(N \setminus S') = M_0$. Рассмотрим произвольную кривую $\gamma(t) \subset M \setminus S$ такую, что область определения первоначально заданной локальной изометрии φ между многообразиями M и N содержит точку $\gamma(0)$, её образ $\delta(t) = f(\gamma(t)) \subset M_0$ и связную компоненту $\beta(t)$ прообраза $g^{-1}(\delta(t)) \subset N \setminus S'$, содержащую точку $\varphi(\gamma(0))$. Тогда первоначально заданная локальная изометрия φ аналитически продолжается до изометрии некоторой окрестности кривой $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$, на некоторую окрестность кривой $\beta(t)$, $0 \leq t \leq 1$, принадлежащую $N \setminus S'$.

Пусть M – правильное псевдополное риманово аналитическое многообразие, алгебра Ли всех векторных полей которого не имеет центра, S – множество неподвижных точек всех сохраняющих ориентацию и векторные поля Киллинга локальных изометрий многобразия M, M_0 – квазиполное многобразие локально изометричное M, $\tilde{M}_0 S$ – односвязная накрывающая многобразия M_0. Тогда имеют место аналитические локально изометрические накрытия $\tilde{M}_0 \to M \setminus S \to M_0$. □

Для произвольного ориентированного риманова аналитического многообразия M обозначим через $Z(M)$ псевдогруппу, состоящую из всех локальных изометрий многообразия M, сохраняющих ориентацию и все векторные поля Киллинга. Рассмотрим фактор многообразие K_M многообразия $M \setminus S$ по псевдогруппе $Z(M)$. Определим объединение многообразий K_M и K_N, склеивая их по множеству $K_{M \cap N}$. Под пересечением $M \cap N$ подразумевается отождествление максимальных подмножеств, на которые продолжается первоначально заданная локальная изометрия между односвязными накрывающими $\tilde{M}$ и $\tilde{N}$ многобразий M и N. На многобразии $M \setminus S$ рассмотрим распределение $\mathfrak{z}^{\perp}$, состоящее из векторов, перпендикулярных центру $\mathfrak{z}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ всех векторных полей Киллинга.

Теорема 7. *Пусть M – псевдополное риманово аналитическое многообразие, $\mathfrak{z}^{\perp}$ – распределение касательных векторов, перпендикулярных центру $\mathfrak{z}$*

алгебры всех векторных полей Киллинга, S – множество неподвижных точек сохраняющих ориентацию и все векторные поля Киллинга локальных изометрий. Если $\mathfrak{z}^{\perp}$ инволютивно, то односвязная накрывающая $\widetilde{M \setminus S}$ многообразия $M \setminus S$ изометрична прямому произведению евклидова пространства и односвязной накрывающей $\tilde{K}$ вполне геодезического подмногообразия $K \subset M$ касательного к $\mathfrak{z}^{\perp}$. $\widetilde{M \setminus S} \approx \mathbf{R}^k \times \tilde{K}$.

Доказательство. Ввиду инволютивности распределений $\mathfrak{z}$ и $\mathfrak{z}^{\perp}$ некоторая окрестность U отмеченной точки $p \in M$ имеет вид $U = V \times W$, где V – открытое подмножество интегрального подмногообразия распределения $\mathfrak{z}$, а W – открытое подмножество интегрального подмногообразия распределения $\mathfrak{z}^{\perp}$. Пусть $x^1; x^2; \ldots; x^k$ – координаты на V, а $y^1; y^2; \ldots; y^m$ – координаты на W. Тогда в координатах $x^1; x^2; \ldots; x^k; y^1; y^2; \ldots; y^m$ компоненты g_{ij} не зависят от $x^1; x^2; \ldots; x^k$, и так как подмногообразия V и W перпендикулярны, то компоненты при $dx^i dy^j$ равны 0. Поэтому, метрика на U имеет вид $ds^2 = ds_1^2(y) + f_{ij}(y) dx^i dx^j$. Вследствие непродолжаемости псевдополного многообразия $M \setminus S$ содержит полные интегральные подмногообразия распределения $\mathfrak{z}$, т.е. прямые произведения евклидова пространства и тора $\mathbf{R}^k \times T^l$. Поэтому $M \setminus S$ является расслоением над $K^{'} \subset K$ со слоями $\mathbf{R}^k \times T^l$. Так как распределение $\mathfrak{z}^{\perp}$ инволютивно, это расслоение содержит сечение $K^{'}$, и поэтому тривиально, $M \setminus S = \mathbf{R}^k \times T^l \times K^{'}$. Так как M непродолжаемо, то $K^{'} = K$. Следовательно, односвязная накрывающая многобразия $M \setminus S$ изометрична прямому произведению односвязных пространств, $\widetilde{M \setminus S} \approx \mathbf{R}^k \times \tilde{K}$. □

Следствие 3. *Рассмотрим риманово аналитическое многообразие $M^{'}$ размерности n, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ которого коммутативна, то есть совпадает со своим центром $\mathfrak{z}$, и $dim\mathfrak{g} = dim\mathfrak{z} = n - 1$. Тогда существует не более двух псевдополных многообразий локально изометричных $M^{'}$.*

Доказательство. Так как $codim\mathfrak{z} = 1$, то $dim\mathfrak{z}^{\perp} = 1$, и $\mathfrak{z}^{\perp}$ инволютивно. По теореме 5 для псевдополного многообразия M локально изометричного многообразию $M^{'}$ имеет место разложение $M \setminus S = \mathbf{R}^s \times T^l \times K$. Вполне геодезическое подмногообразие K изометрично прямой $\mathbf{R}$ или окружности S^1 или лучу $(a; \infty)$ или интервалу $(a; b)$. Рассмотрим фактор множество $\overline{K} = M/Z(M)$. Если $K = \mathbf{R}$ или $K = S^1$, то $\overline{K} = K$. Если $K = (a; \infty)$, то $\overline{K} = [a; \infty)$ или $\overline{K} = K = (a; \infty)$. Если $K = (a; b)$, то $\overline{K} = [a; b)$ или $\overline{K} = (a; b]$ или $\overline{K} = [a; b]$ или $\overline{K} = K = (a; b)$.

В случае, если $K = \mathbf{R}$ или $K = S^1$, то соответствующий росток риманова аналитического многобразия имеет единственное продолжение до псевдополного многобразия, и это многобразие изометрично евклидовому пространству. Продолжение ростка до псевдополного многобразия будет единственным в случае $S = \varnothing$, т. е. $\overline{K} = K$.

Пусть $K = (a; \infty)$, а $\overline{K} = [a; \infty)$. Тогда точки подмножества $S \subset M$ отображаются при факторизации $\overline{K} = M/Z(M)$ в точку $a \in \overline{K}$. Точка $x \in S$ является особой точкой некоторого поля $X \in \mathfrak{z}$, $X(x) = 0$, а любая изометрия φ из M в себя такая, что $\varphi(x) = x$, имеет вид $\varphi = ExpY$, $Y \in \mathfrak{z}$. Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{z}_0 \subset \mathfrak{z}$, состоящую из векторных полей Киллинга $X \in \mathfrak{z}$ обращающихся в ноль в точке x, $X(x) = 0$. Тогда $\mathfrak{z}_0$ порождает группу изометрий некоторого шара B аналитически продолжающуюося до группы изометрий многобразия

M и изоморфную фактор группе группы $\mathfrak{z}_0 = \mathbf{R}^s$ по некоторой решётке Γ, действующей на многообразии M. Тогда M является полным многообразием изометричным пространству $\mathbf{R}^s \times T^l$. Аналогичная конструкция применима к случаю, когда $K = (a; b)$, а $\overline{K} = [a; b)$ или $\overline{K} = (a; b]$, т. е. когда $\overline{K}$ получается из K присоединением одной точки a или b. В этом случае псевдополное многообразие также единственно и изометрично многообразию $\mathbf{R}^s \times T^l \times \overline{K}$; однако, это многообразие уже не является полным.

Наконец рассмотрим случай $K = (a; b)$, $\overline{K} = [a; b]$, т. е. когда $\overline{K}$ получается из K присоединением двух точек a и b. Рассмотрим псевдополное многообразие M_1 и точки множества $S_1 \subset M_1$, проектирующиеся в точку $a \in \overline{K}$. Тогда так же, как и при рассмотрении предыдущих случаев, рассмотрим многообразие $M_1^{'}$, получающееся присоединением множества S_1 к фактор-многообразию многообразия $M \subset S$ по некоторой решетке $\Gamma_1 \subset \mathfrak{z} = \mathbf{R}^{n-1}$ так, что $M_1^{'} = \mathbf{R}^s \times T^l \times \overline{K_1})$, где $\overline{K_1} = [a; b)$. Аналогично, рассмотрим псевдополное многообразие M_2 и точки множества $S_2 \subset M_2$, проектирующиеся в точку $b \in \mathbf{K}$. Многобразие $M_2^{'}$ получается присоединением множества S_2 к фактор-многообразию многообразия $M \setminus S$ по некоторой решетке $\Gamma_2 \subset z = \mathbf{R}^{n-1}$ так, что $M_2^{'} = \mathbf{R}^s \times T^l \times \overline{K}_2$, где $K_2 = (a; b]$. Если решётки Γ_1 и Γ_2 не совпадают, то многообразия $M_1 = M_1^{'}$ и $M_2 = M_2^{'}$ являются двумя различными псевдополными многообразиями. Если же решетки Γ_1 и Γ_2 совпадают, то многообразия M_1 и M_2 изометричны и определяют полное многобразие $M = M_1 = M_2$. $\square$

Перейдём к описанию псевдополных многообразий малых размерностей.

Рассмотрим росток $\mathcal{A}$ двумерного риманова вещественно аналитического многообразия. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ векторных полей Киллинга двумерного многообразия имеет размерность не больше, чем 3. Если $dim\mathfrak{g} = 3$, то росток $\mathcal{A}$ является ростком многообразия постоянной кривизны и продолжается до полного многобразия – сферы, плоскости или гиперболической плоскости. Если $dim\mathfrak{g} = 2$, то росток $\mathcal{A}$ является ростком левоинвариантной римановой метрики на двумерной группе Ли, которая и будет продолжением данного ростка до полного многообразия. Случай $dim\mathfrak{g} = 1$ описан в только что доказанном следствии к теореме 7.

Рассмотрим вполне неоднородные двумерные римановы аналитические многобразия. Фактор многообразие K, построенное ранее как объединение всех фактор многообразий, локально изометричным друг другу, по псевдогруппе всех локальных изометрий, сохраняющих все векторные поля Киллинга и ориентацию, является ни чем иным как квазиполным многообразием. Рассмотрим множество $\overline{K} = K \cup T$, получающееся присоединением к многообразию K образов точек $x \in S \subset M_a$ при фактор отображениях $\pi : M_a \to M_a/Z(M_a) = \overline{K}_a \subset \overline{K}$, заданных на всевозможных аналитических продолжениях M_a ростка $\mathcal{A}$. Тогда подмножество $T \subset \overline{K}$ состоит из изолированных точек, и на $\overline{K}$ можно ввести структуру аналитического многобразия. Рассмотрим точку $z_0 \in T \subset \overline{K}$. Тогда существует достаточно малый шар U_0 с центром в точке $x_0\ inU_0$ такой, что фактор отображение $\pi : U_0 \to K$ является факторизацией шара U_0 по конечной группе вращений с центром в $x_0 \in U_0$, $\pi(x_0) = z_0$. Пусть z – комплексная координата на U_0, такая, что точка x_0 имеет координату 0. Тогда отображение π имеет вид $z \to w = z^m$, а метрика на множестве $V_0 = \pi(U_0) \subset K$

имеет вид $ds^2 = |w|^{\frac{-2(m-1)}{m}} ds_1^2(w;?w)$, где $ds_1^2(w;?w)$ – аналитическая риманова метрика на шаре $V_0 \subset K$.

Обозначим через $\tilde{K}$ односвязную накрывающую множества $\overline{K}$. Тогда прообразом $\tilde{T} \subset \tilde{K}$ множества $T \subset \overline{K}$ является дискретное множество точек $a_i \in \overline{K}$. На $\tilde{K} \setminus \tilde{T}$ однозначно определяется аналитическая риманова метрика так, что накрытие будет локально изометричным. Тогда метрика в окрестностях точек a_i имеет вид $ds^2 = |w|^{\frac{-2(m-1)}{m}} ds_1^2(w;\overline{w})$, если комплексная координата w выбрана так, что точка a_i имеет координату 0. Односвязное многобразие $\tilde{K}$ диффеоморфно комплексной плоскости, кругу или сфере.

Рассмотрим случай, когда $\tilde{K}$ отождествляется с комплексной плоскостью $\mathcal{C}$. Тогда существует функция $f(z)$ голоморфная на $\tilde{K} \setminus \tilde{T}$ и имеющая ветвление порядка m_i в точках a_i. Эта функция $f(z)$ называется функцией Вейерштрасса, $f(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \sqrt[m_i]{1 - \frac{z}{a_i}} \exp \frac{1}{m_i}(\frac{z}{a_i} + \frac{1}{2}(\frac{z}{a_i})^2 + ... + \frac{1}{p_i}(\frac{z}{a_i}))^{p_i}$, где числа $p_i \in \mathcal{N}$ таковы, что $\forall z \in \mathcal{C}$ сходится ряд $\sum_{i=1,\infty} \frac{z}{a_i}^{p_i}$. Рассмотрим риманову поверхность M функции $f(z)$. Поверхность M накрывает комплексную плоскость C так, что накрывающее отображение $\pi : M \to C$ имеет ветвление порядка m_i над точками $a_i \in \mathcal{C}$ и не разветвлено в остальных точках. Определим риманову метрику на M положив $\mathfrak{g}(X;Y) = \mathfrak{g}(\pi_* X; \pi_* Y)$, где $X, Y \in T_x M$, $\pi_* X, \pi_* Y \in T_{\pi(x)} K$. Эта метрика не имеет особенностей в точках $x_i \in M$ таких, что $\pi(x_i) = a_i$. Легко доказать, что для любого односвязного многобразия N, локально изометричного M, любая локальная изометрия φ из N в M аналитически продолжается до локально изометрического отображения $\varphi : N \to M$. Т.о. M является единственным аналитическим продолжением данного ростка до псевдополного многообразия.

В случае, если $\tilde{K}$ круг, то аналогично случаю комплексной плоскости строится единственное аналитическое продолжение данного ростка до псевдополного многобразия. Это многообразие также является римановой поверхностью голоморфной функции $f(z)$ на $\tilde{K}$, имеющей ветвление порядка m_i над точками $a_i \in \tilde{T} \subset \tilde{K}$. $f(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \sqrt[m_i]{\frac{z - a_i}{z - a_0}} \exp \sum_{k=1}^{q_i} \frac{(a_j - a_i)^k}{k(z - a_i)^k}$, где a_j – точка на границе круга, ближайшая к a_i, а числа $q_i \in N$ таковы, что $| \ln \frac{z - a_j}{z - a_i} + \sum_{k=1}^{q_i} \frac{(a_j - a_i)^k}{k(z - a_i)^k}| < (\frac{1}{2})^i$.

Рассмотрим случай, когда $\tilde{K}$ сфера. Здесь множество $\tilde{T} \subset \tilde{K}$ состоит из конечного числа точек $a_0, a_1, \dots, a_l$, в каждой из которых метрика имеет особенность вида $ds^2 = |w|^{\frac{(-2(m-1)}{m}} ds_1^2(w;\overline{w})$, Функция $f(z) = \prod_{i=1}^{l} \sqrt[m_i]{\frac{z - a_i}{z - a_0}}$ на сфере имеет ветвление порядка m_i в точках a_i, $i = 1; 2; \dots ; l$ и ветвление порядка m в точке a_0. Так же, как и выше, рассмотрим риманову поверхность M функции $f(z)$. Накрывающее отображение $\pi : M \to \tilde{K} = S^2$ является накрытием над $\tilde{k} \setminus \tilde{T}$ и имеет ветвление порядка m_i над точками $a_i \in \tilde{T} \subset \tilde{K}$, $i = 1; 2; \dots ; l$, и ветвление некоторого порядка m в точке a_0. Тогда метрика на M, индуцированная метрикой на $\tilde{K}$ и накрывающим отображением π, не имеет особенности в точках $\pi^{-1}(a_i)$, если $m \neq m_0$, и имеет особенность в точке $\pi^{-1}(a_0)$. Полученное многобразие является правильным псевдополным многообразием. Вместо точки $a_o \in \tilde{T} \subset \tilde{K}$ можно взять любую другую точку $a_j \in T \subset \tilde{K}$ и построить описанным выше способом другое правильное псевдополное многообразие. Таким образом, мы получим все аналитические продолжения до псевдополного многобразия данного ростка.

Перейдём к описанию трёхмерных псевдополных многообразий. По-прежнему, будем обозначать через

Рассмотрим случай, когда $dim\mathfrak{z} = 1$. Сначала рассмотрим случай, когда $\tilde{K}$ диффеоморфно плоскости. Рассмотрим многобразие $M_0 \approx \tilde{K} \times \mathfrak{z}$. Пусть U_0 – малый шар, снабженный изначально заданной римановой метрикой на $V_0 = U_0/Z(U_0) \subset \tilde{K}$. Распространим метрику, заданную на U_0 на многобразие $V_0 \times \mathfrak{z}$. Пусть $x^1; x^2; x^3$ – координаты на $V_0 \times \mathfrak{z}$ такие, что $x^1; x^2$ – координаты на V_0, а x^3 – координата на $\mathfrak{z}$. Компоненты метрического тензора $g_{ij}(x^1; x^2)$ не зависят от x^3. Функции $g_{ij}(x^1; x^2)$ аналитически продолжаются вдоль любой кривой на $\tilde{K}$ и задают метрику на $M_0 \approx \tilde{K} \times \mathfrak{z}$. Тогда $M_0/Z(M_0) = K$, следовательно, $(M_0) = K \times \Gamma$, где Γ – группа накрытия $\tilde{K} \to K$. Тогда для правильного псевдополного многобразия M многобразие $M\S = K \times \mathfrak{z}/\Gamma_0$, где Γ_0 – дискретная подгруппа группы $\mathfrak{z}$.

Рассмотрим теперь случай, когда фактор многобразие K диффеоморфно сфере. Разобьём K в объединение двух открытых дисков $K = K_1 \cup K_2$. Построим, как и выше, римановы многобразия $M_1 = K_1 \times R$ и $M_2 = K_2 \times R$, являющимися аналитическими продолжениями первоначально заданного ростка, у которых подмногообразия R являются интегральными кривыми векторного поля $X \in \mathfrak{z}$. Локальные изометрии f из M_1 в M_2 продолжаются вдоль любой кривой на $(K_1 \cap K_2) \times R$. Если такое продолжение однозначно, получим полное многобразие $M \approx S^2 \times R$, являющееся продолжением заданного ростка. Предположим теперь, что существует замкнутая кривая $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$, на $(K_1 \cap K_2) \times R$, продолжение изометрии f вдоль которой неоднозначно, $f(\gamma(0)) = y_1 \neq y_2 = f(\gamma(1)$. Пусть $x^1; x^2; x^3$ – координаты на M_1, такие, что $x^1; x^2$ образуют координаты на K_1, а x^3 – координата на R, а $y^1; y^2; y^3$ – координаты на M_2, такие, что $y^1; y^2$ образуют координаты на K_2, а y^3 – координата на R. Так как x^3 и y^3 являются координатами на алгебре Ли $\mathfrak{z}$, то изометрия f в координатах $x^1; x^2; x^3; y^1; y^2; y^3$ имеют вид $y^1 = y^1(x^1; x^2)$, $y^2 = y^2(x^1; x^2)$, $y^3 = x^3 + f(x^1; x^2)$, где функции $y^1; y^2$ являются функциями перехода от карты на K_1 к карте на K_2 на сфере и поэтому однозначны. А функция $f(x^1; x^2)$ неоднозначно продолжается вдоль замкнутой кривой $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$, на $K_1 \cap K_2$. Пусть $f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = a \in R$. Рассмотрим окружность $S^1 = R/Z$. Тогда продолжение функции f вдоль кривой γ будет однозначно, если считать, что f принимает значения не на прямой R, а на окружности S^1. Тогда также однозначно будет продолжение функции f вдоль кривых γ^n, $n \in Z$. Но, поскольку любая кривая на $K_1 \cap K_2$ гомотопна кривой γ^n, продолжение функции $f : U_0 \to S^1$ вдоль всевозможных кривых однозначно на $K_1 \cap K_2$. В таком случае функция f является функцией перехода расслоения на окружности над сферой S^2, и мы имеем компактные линзовые пространства в качестве аналитических продолжений заданного ростка.

3. Локально однородные римановы аналитические многообразия, алгебра Ли векторных полекй Киллинга которых имеет нетривиальный центр

Исследуем случай, когда алгебра $\mathfrak{g}$ имеет ненулевой центр $\mathfrak{z}$ и укажем свойства алгебр $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{z}$, обеспечивающие замкнутость подгруппы H в G.

Определим локальную группу локальных изометрий. Рассмотрим произвольное риманово аналитическое многообразие M, алгебру Ли $\mathfrak{g}$, состоящую из векторных полей Киллинга на нем и группу Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Под локальной группой (chunk of a group) будем подразумевать малую окрестность единицы группы $U \subset G$. Она состоит из локальных изометрий многообразия M. Рассмотрим нормальный шар $B_{2\delta}$ радиуса 2δ с центром в $p \in M$. Окрестность единицы U в группе G состоит из элементов $g \in G$, определяющих изометрии из шара B_δ радиуса δ с центром в отмеченной точке $p \in M$ в шар $B_{2\delta}$ радиуса 2δ с центром в $p \in M$. Отметим, что $H \subset U$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$, как правило, не порождает группы изометрий многообразия M, но порождает псевдогруппу U локальных изометрий. Орбита локальной группы локальных изометрий многообразия M является локально однородным многообразием N. Заметим также, что подгруппа H, порожденная стационарной подалгеброй $\mathfrak{h}$ образует группу изометрий шара B_δ с центром в отмеченной точке многообразия M.

Изучим сначала некоторые свойства локальной группы локальных изометрий с точки зрения абстрактных групп преобразований. Рассмотрим локальную группу $U \subset G$ как подгруппу группы локальных диффеоморфизмов многообразия M с отмеченной точкой p, $G \subset Diff M$. Назовем элемент $\tilde{n} \in G \subset Diff M$ умножением справа, если существует такой элемент $n \in G$, что для всех $x \in M$ таких, что $x = g(p)$, $\tilde{n}(x) = gn(p)$. Так как $\forall h \in H$ $gh(p) = g(p) = x$, то $\tilde{n}(x) = gn(p) = ghn(p)$. Следовательно, $n(p) = hn(p) \Rightarrow p = n^{-1}hn(p) \Rightarrow n^{-1}hn \in H$. Т. о., умножение справа на элемент n определено корректно, если $\forall h \in H \exists h_1 \in H$ такой, что для любой локальной изометрии $g \in G$ выполняется равенство $ghn = gnh_1$. Другими словами, n принадлежит нормализатору $N(H)$ группы H в G. Обозначим через N локальную группу, состоящую из элементов $n \in G$, умножение справа на которые в группе G порождают локальные изометрии многообразия M, а через $\mathfrak{n}$ – ее алгебру Ли. Тогда $\mathfrak{h} \lhd \mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$. Заметим, что сами умножения справа, то есть элементы $\tilde{n}$, а также элементы центра Z локальной группы G принадлежат N. Обозначим через V орбиту отмеченной точки p локальной группы N на M. Присоединенное действие элементов $n \in N$, $g \to n^{-1}gn$, задает локальные изометрии на V.

Найдем подгруппу $G_0 \subset G$, состоящую из «умножений слева». Рассмотрим отображение f из группы G, заданной как группа преобразований множества G в себя, определённое по формуле $f(g) = g(e) = ge$, где e – тождественная локальная изометрия. Тогда, так как $\tilde{n}(e) = \tilde{n}e = en = n$, то будем считать, что $f(\tilde{n}) = n$. Строго говоря, $f(\tilde{n})$ – это класс смежности nH, но все элементы nh, $h \in H$, определяют одну и ту же локальную изометрию многообразия M. На множестве $f(G)$ определим умножение $g_1g_2 = g_1(e)g_2(e)$. Так определённое умножение превращает $f(G)$ в подгруппу $G_0 \subset G$. Левые умножения $g \in G_0$ дополняются правыми умножениями $\tilde{n}$, то есть любой элемент $g \in G \subset Diff G$, $g(x) = gx$ $\forall x \in G$, представим в виде $g = g_0\tilde{n}$, $g_0\tilde{n}(x) = g_0xn$ $\forall x \in G$. Так как элементы n, hn и nh, $n \in N$, $h \in H$, определяют с помощью умножений справа в группе G одну и ту же локальную изометрию на M, то группа «умножений справа» отождествляется с фактор группой $\tilde{N} = N/H$, а алгебра Ли этой группы отождествляется с фактор алгеброй $\mathfrak{n}/\mathfrak{h}$. Следовательно, $G = G_0\tilde{N}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \tilde{n}$.

Рассмотрим $V \subset B_{2\delta}$ – орбиту отмеченной точки p группы локальных изометрий $\tilde{N}$. Группа «левых умножений» $N \subset G_0$ (точнее ее окрестность единицы) действует на V, причем n, hn и nh, $n \in N$, $h \in H$, определяют с помощью умножений слева в группе N одну и ту же локальную изометрию на V, то группа «умножений слева» в группе N также отождествляется с фактор группой $\tilde{N} = N/H$, а алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{n}}$ этой группы отождествляется с фактор алгеброй $\mathfrak{n}/\mathfrak{h}$.

Таким образом, внутренние автоморфизмы группы $\tilde{N}$ являются изометриями V и порождают присоединенное представление группы $\tilde{N}$ в алгебре $\tilde{\mathfrak{n}}$ и образуют присоединенную группу $Int(\tilde{n})$ алгебры $\tilde{n}$. Так как $\tilde{N} = N/H$ действует на V транзитивно, то $\tilde{n}$ можно отождествить с касательным пространством T_pV, и $Int(\tilde{n})$ является замкнутой подгруппой группы $GL(T_pV)$ линейных преобразований пространства T_pV. Но, так как $Int(\tilde{n})$ сохраняет невырожденную положительно определенную риманову форму на T_pV, то $Int(\tilde{n})$ является замкнутой подгруппой компактной группы ортогональных преобразований $SO(T_pV)$, и поэтому компактна.

Группа $Int(\tilde{n})$ изоморфна группе $\tilde{N}/Z(\tilde{N})$, где $Z(\tilde{N})$ – центр группы $\tilde{N}$. Поэтому группа $\tilde{N}/Z(\tilde{N})$ компактна, и алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{n}}$ является компактной алгеброй [1]. Поэтому $\tilde{n}$ разлагается в прямую сумму своего центра $\mathfrak{z}$ и коммутанта $[\tilde{\mathfrak{n}};\tilde{\mathfrak{n}}]$, $\tilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{z} \oplus [\mathfrak{n};\mathfrak{n}]$. Так как все «правые умножения» коммутируют со всеми «левыми умножениями», то $\mathfrak{z}$ совпадает с центром всей алгебры векторных полей Киллинга $\mathfrak{g}$. Таким образом, имеет место разложение в прямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{z} \oplus [\tilde{\mathfrak{n}};\tilde{\mathfrak{n}}]$. $[\tilde{\mathfrak{n}};\tilde{\mathfrak{n}}]$ порождает «чисто правые умножения» не совпадающие с "левыми умножениями".

Теорема 8. *Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли всех векторных полей Киллинга на локально однородном псевдоримановом аналитическом многообразии M. $\mathfrak{h}$ – её стационарная подалгебра, $\mathfrak{z}$ – центр алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть G – односвязная подгруппа, порождённая алгеброй $\mathfrak{g}$ и H – её подгруппа порождённая подалгеброй $\mathfrak{h}$. Если $\mathfrak{h} \cap (\mathfrak{z} + [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, то H замкнута в G.*

Доказательство. Предположим противное. Рассмотрим замыкание $\overline{H}$ группы H в G и подалгебру $\overline{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{g}$ подгруппы $\overline{H} \subset G$. Подалгебра $\mathfrak{h}$ является нормальной подалгеброй алгебры $\overline{\mathfrak{h}}$ [3]. Будем считать, перейдя, если нужно, к сопряженной группе $g^{-1}Hg$, что для отмеченной точки $p \in M$ и любого $X \in \mathfrak{h}$ $X(p) = 0$. Рассмотрим однопараметрическую подгруппу $\overline{h_t} \subset \overline{H}$, $\overline{h}_t \notin H$, определяемую векторным полем $\overline{X} \subset \mathfrak{h}$, $\overline{X} \notin \mathfrak{h}$. Как доказано в [3], существует тор T в простой компактной подгруппе $P \subset G$ такой что, $H \subset T$ является всюду плотной обмоткой тора T. Поэтому можно считать, что $\overline{h_t} \subset T \subset P$. Тогда векторное поле Киллинга $\overline{X}$ касательных векторов к орбитам локальной однопараметрической группы $\overline{h_t}$ принадлежит алгебре $\mathfrak{t}$ группы T и, следовательно, $\overline{X} \subset \mathfrak{t} \subset \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ – алгебра Ли группы P. Рассмотрим окрестность единицы U в группе G и шар B_δ радиуса δ с центром в отмеченной точке $p \in M$ такие, что все элементы $g \in U$ группы G определяют локальные изометрии из шара B_δ в шар $B_{2\delta}$ радиуса 2δ с центром в $p \in M$. Отметим, что $H \in U$. Так как элементы $\overline{h_t}$ принадлежат замыканию $\overline{H}$ группы H в G, то для каждого малого

t внутренний автоморфизм $x \to \overline{h}_t x \overline{h}_t^{-1}$ группы G является пределом последовательности внутренних автоморфизмов $x \to h_n x {h_n}^{-1}$, $h_n \in H$. При малых t и больших n эти автоморфизмы определяют локальные изометрии шара B_δ в шар $B_{2\delta}$.

Внутренние автоморфизмы $x \to h_n x h_n^{-1}$ порождающие втоморфизмы $x \to \tilde{h}_t x \tilde{h}_t^{-1}$ определяют отображения на шаре B_δ, являющимися пределами изометрий, то они также задают изометрию шара B_δ в шар B_δ. Тогда, так как для всех достаточно малых t определена локальная изометрия $x \to \overline{h_t} x$ шара B_δ в шар $B_{2\delta}$ то определена и локальная изометрия $x \to x\overline{h_t}^{-1} = x\overline{h_{-t}}$, и тем самым, локальная однопараметрическая группа изометрий, порождённая умножениями справа на элементы $\overline{h_t}$.

Все умножения справа коммутируют с умножениями слева, то есть с элементами группы G_0, однако, могут не коммутировать друг с другом. Докажем, что локальная изометрия $\overline{h_t}$ коммутирует со всеми правыми умножениями. Для этого докажем, что действие элемента $\overline{h_t}$ в группе внутренних автоморфизмов группы G, $g \to \overline{h_t}^{-1} g \overline{h_t}$, задает тождественное отображение на орбите V отмеченной точки p группы $\tilde{N}$. Рассмотрим последовательность $h_n \in H$ сходящуюся к $\overline{h_t}$. Так как H является нормальным делителем в N, то $nh_n = h_n n h_n'$, где $h_n' \in H$, то $nH = h_n^{-1} n h_n H$. Следовательно, внутренние автоморфизмы $g \to h_n^{-1} g h_n$ индуцируют тождественное отображение на V. Переходя к пределу, получим, что внутренний автоморфизм $g \to \overline{h_t}^{-1} g \overline{h_t}$ индуцируют тождественное отображение на V.

Так как векторное поле X, порождающее локальную однопараметрическую группу $\overline{h_t}$, принадлежит компактной подалгебре алгебры $\mathfrak{g}$, то X принадлежит коммутанту $[\mathfrak{g};\mathfrak{g}]$ алгебры $\mathfrak{g}$.

Векторное поле Z касательных векторов к орбитам локальной однопараметрической группы z_t умножений справа на $\overline{h_t}$ является векторным полем Киллинга и принадлежит центру алгебры всех векторных полей Киллинга на M, то $Z \in \mathfrak{z}$. Из разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{z} \oplus [\tilde{\mathfrak{n}};\tilde{\mathfrak{n}}]$ следует, что $Z \in [\mathfrak{g};\mathfrak{g}]$. Следовательно, $X + Z \in [\mathfrak{g};\mathfrak{g}]$, но $X + Z \in \mathfrak{h}$. Это доказывает теорему от противного. $\square$

Теорема 9. *Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли всех векторных полей Киллинга на локально однородном псевдоримановом аналитическом многообразии M. $\mathfrak{h}$ – её стационарная подалгебра, $\mathfrak{z}$ – центр алгебры $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{r}$ – её радикал. Пусть G – односвязная подгруппа, порождённая алгеброй $\mathfrak{g}$ и H – её подгруппа порождённая подалгеброй $\mathfrak{h}$. Тогда, если для любой полупростой алгебры $\mathfrak{p} \in \mathfrak{g}$ такой что $\mathfrak{p} + (r) = \mathfrak{g}$ имеет место равенство $(\mathfrak{p} + \mathfrak{z}) \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$, то H замкнута в G.*

Доказательство. Предположим противное и рассмотрим замыкание $\overline{H}$ группы H в G. Также как и при доказательстве теоремы 5 рассмотрим однопараметрическую подгруппу z_t, порождённую умножением справа на элементы однопараметрической группы локальных изометрий $\overline{h}_t$ в группе G. Пусть $\overline{X}$ – векторное поле Киллинга касательных векторов к орбитам локальной однопараметрической группы локальных изометрий $\overline{h}_t^{-1}$, а Z – векторное поле Киллинга локальной однопараметрической группы локальных изометрий z_t.

Пусть $\mathfrak{p}$ – полупростая подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$, содержащая векторное поле $\overline{X}$, $\overline{X} \in \mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$. Докажем, что $Z + \overline{X} \in \mathfrak{h}$ и $Z + \overline{X} \in \mathfrak{p}$. В односвязной группе Ли

G рассмотрим радикал R (подгруппу, соответствующую подалгебре $\mathfrak{r}$ и полупростую подгруппу P, соответствующую подалгебре $\mathfrak{p}$. Тогда R – нормальный делитель группы G, $\mathfrak{r}$ – нормальный делитель алгебры $\mathfrak{g}$, $R \cap P = e$, $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{p} = 0$ и имеет место разложение Леви-Мальцева $G = RP$.

Группа G содержит открытую окрестность единицы (chunk of a group), действующую как локальная группа локальных изометрий в окрестности отмеченной точки $p \in M$. Так как z_t принадлежит центру группы G, то $z_t \in R$, и так как подгруппа H является нормальным делителем группы $\overline{H}$, [3], то $\overline{\mathfrak{h}_t}^{-1} z_t H = \overline{\mathfrak{h}_t}^{-1} H \overline{\mathfrak{h}}_t = H$. Следовательно, локальные изометрии $\overline{h_t}^{-1} z_t$ оставляют точку p неподвижной и, поэтому, принадлежат стационарной подгруппе H. Но, так как $\overline{X} \in \mathfrak{p}$, а $Z \notin \mathfrak{p}$, то $(Z + \overline{X}) \notin \mathfrak{p}$. А так как $(Z + \overline{X}) \in \mathfrak{h}$, то доказанное означает, что для выбранной максимальной полупростой алгебры $\mathfrak{p}$ справедливо утверждение $(\mathfrak{p} + \mathfrak{z}) \cap \mathfrak{h} \neq \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$. Что и доказывает теорему от противного. □

4. Заключение

Обозначим вопросы, связанные с обобщением полноты риманова аналитического многообразия, требующие своего решения. Во первых, хотелось бы окончательно привести необходимые и достаточные условия замкнутости стационарной подгруппы группы локальных изометрий на римановом многообразии. Причём, эти условия должны быть выражены в локальных терминах, т. е. как свойства алгебры Ли всех векторных полей Киллинга. Кроме того, необходимо развить теорию обобщённо полных многообразий для случая существования нетривиального центра в алгебре Ли всех векторных полей Киллинга. В частности, дать обобщение квазиполного многообразия в общем случае. Также желательно более подробно описать псевдополные многообразия в общем случае и для конкретных римановых метрик. Теоремы 8 и 9 доказывают необходимые и «почти достаточные» условия замкнутости стационарной подгруппы. Хорошо бы найти необходимые и достаточные условия замкнутости стационарной подгруппы в односвязной группе Ли, порождаемой всеми векторными полями Киллинга.

References

[1] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, Inc., Harcourt Brace Jovanovich, Publishers: Boston, San Diego, New York, USA, 1978.

[2] S. Kobayashi, K. Nomidzu, *Foundations of Differential Geometry*, Interscience Publisher, a division of John Wiley & Sons; New York, USA, 1969.

[3] A.I. Maltsev, *On the theory of Lie groups in the large*, Mathem. Sb., 1945, v. 16(38), pp. 163 – 190. **1** (1945), 163–1190.

[4] G. D. Mostow, *ExtensAnn. Math., 1950, v. 52, pp. 606 – 636.ibility of Local Lie Groups of Transformations and Groups on Surfaces*, Ann. Math., 1950, v. 52, pp. 606 – 636. **1** (1950), 606 – 636.

[5] G.H. Smith, *Analytic extension of Riemannian manifolds*, BULL. AUSTRAL. MATH. SOC. Vol. 18 (1978), pp. 147-148. **1** (1978), 147–148.

[6] V.A. Popov, *Extendability of Locally Defined Isometries of a Riemannian Manifold*, J. Math. Sb. 1988, 135(177), №1, pp. 45-64. **23**:4 (1988), 45–64.

[7] V.A. Popov, *On the Extendibility of Locally Defined isometries of a Pseudo-Riemannian Manifolds*, Journal of Mathematical sciences. V. 217, №5, September, 2016, pp. 624 – 627. **1** (2016), 624–628.

[8] V.A. Popov, *On Closeness of Stationary Subgroup of Affine Transformation Groups*, Lobachevskii Journal of Mathematics. V. 38, №4, 2017, pp. 724 – 729 **1** (2017), 724–729

Vladimir Aleksandrovich Popov
Financial University under the Govenment of the Russian Federation,
pr. Leningradskiy, 49,
125167, Moscow, Russia
Email address: vlapopov@gmail.com