

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 20, №2, стр. 923–941 (2023)

УДК 519.168, 519.712.3

DOI 10.33048/semi.2023.20.056

MSC 90C27, 05C85, 68W25

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ЗАДАЧ О ДВУХ
КОММИВОЯЖЕРАХ И О ДВУХ ЦИКЛОВЫХ ПОКРЫТИЯХ
НА МАКСИМУМ С ДВУМЯ ВЕСОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

А. Н. ГЛЕБОВ, С. С. ЛЫЛОВА, С. Г. ТОКТОХОЕВА

ABSTRACT. We present new polynomial approximation algorithms for the 2-Peripatetic Salesman Problem and the 2-Cycle Cover Problem. The m -Peripatetic Salesman Problem (m -PSP) is a generalization of the classical Traveling Salesman Problem. In the m -PSP, we need to find m edge disjoint Hamiltonian cycles of the extremal total weight in a complete weighted graph $G = (V, E)$. In the m -Cycle Cover Problem (m -CC), we need to find m edge disjoint cycle covers of the extremal weight in G . Many exact and approximation algorithms were proposed for the case of m -PSP where we are given only one weight function $w : E \rightarrow \mathbf{R}^+$ and the weight of m Hamiltonian cycles $H_1, H_2, \dots, H_m$ is defined as $w(H_1) + \dots + w(H_m)$. However, not so many results are known for the case when we are given m distinct weight functions $w_1, w_2, \dots, w_m$ and the weight of $H_1, H_2, \dots, H_m$ is defined as $w_1(H_1) + w_2(H_2) + \dots + w_m(H_m)$ (the m -PSP- m W problem). Here we present a series of polynomial algorithms with approximation ratios $1/2$ and higher for the 2-PSP-max-2W. As a supporting result, we produce a polynomial algorithm with the asymptotic ratio $\frac{2}{3}$ for the 2-CC-max-2W problem.

Keywords: Traveling Salesman Problem, 2-Peripatetic Salesman Problem, Cycle Cover Problem, approximation algorithm, guaranteed approximation ratio, weight function

GLEBOV A.N., LYLOVA S.S., TOKTOKHOEVA S. G., APPROXIMATION ALGORITHMS FOR 2-PSP-2W-MAX AND 2-CC-2W-MAX.

© 2022 ГЛЕБОВ А. Н., ЛЫЛОВА С. С., ТОКТОХОЕВА С. Г..

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0017).

Поступила 11 декабря 2022 г., опубликована 9 ноября 2023 г.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача об m коммивояжерах (m -Peripatetic Salesman Problem или m -PSP) является естественным обобщением классической задачи коммивояжера (Traveling Salesman Problem или TSP) и состоит в поиске m реберно непересекающихся гамильтоновых циклов с минимальным или максимальным суммарным весом ребер в полном взвешенном графе $G = (V, E)$. Из результатов работ [4, 5, 6] следует, что все содержательные постановки задачи m -PSP, как на минимум, так и на максимум, являются NP-трудными. Поэтому важное значение имеет разработка полиномиальных приближенных алгоритмов для разных версий этой задачи. За последние 20 лет было предложено множество таких алгоритмов, однако большинство из них относятся к случаю, когда во входном графе $G = (V, E)$ задана всего одна весовая функция ребер $w : E \rightarrow \mathbf{R}^+$, которая является общей для всех гамильтоновых циклов $H_1, H_2, \dots, H_m$, составляющих решение задачи. Это означает, что суммарный вес этих циклов определяется как $w(H_1) + w(H_2) + \dots + w(H_m)$.

При указанном предположении, для симметричного варианта задачи m -PSP (когда входной граф является неориентированным, а веса ребер удовлетворяют тождеству $w(xy) = w(yx)$) были получены следующие результаты. Агеев и Пяткин [2] разработали полиномиальный 2-приближенный алгоритм для метрической версии задачи 2-PSP-min (когда веса ребер удовлетворяют неравенству треугольника). Для задачи 2-PSP-max с произвольной весовой функцией в [1, 14] были построены полиномиальные алгоритмы с гарантированными оценками $3/4$ и $7/9$. В [10] было получено несколько полиномиальных приближенных алгоритмов, включая алгоритм с оценкой точности $6/5$, для специального случая задачи 2-PSP-min, когда веса ребер принимают значения 1 и 2 (задача 2-PSP(1,2)-min). Для метрического варианта задачи m -PSP-max (при произвольном m) в [11] был разработан полиномиальный алгоритм с гарантированной оценкой $5/6$, а для евклидовой задачи m -PSP-max в [3] был получен асимптотически точный полиномиальный алгоритм. Для несимметричного варианта задачи m -PSP-max (когда входной граф является ориентированным) в [13] был построен полиномиальный алгоритм с асимптотической оценкой точности $2/3$.

Гораздо меньше результатов было получено для задачи m -PSP в случае, когда во входном графе $G = (V, E)$ задано m весовых функций $w_1, w_2, \dots, w_m : E \rightarrow \mathbf{R}^+$, а суммарный вес гамильтоновых циклов $H_1, H_2, \dots, H_m$ определяется как $w_1(H_1) + w_2(H_2) + \dots + w_m(H_m)$ (так называемая задача m -PSP- mW). Так в работах [12, 15] исследовалась постановка задачи 2-PSP-min-2W с весами ребер 1 и 2 и были предложены полиномиальные алгоритмы с оценками точности $7/5$ [12] и $4/3$ [15]. В [17] для метрической задачи 2-PSP-max-2W был получен полиномиальный алгоритм с асимптотической оценкой $11/16$. При этом ни в одной из ранее опубликованных работ ни при каком $m \geq 2$ не был предложен полиномиальный алгоритм с гарантированной оценкой точности в наиболее общем случае задачи m -PSP- mW , когда весовые функции $w_1, w_2, \dots, w_m$ принимают произвольные неотрицательные значения.

В настоящей статье впервые получена серия полиномиальных приближенных алгоритмов с оценками точности $1/2$ и выше для задачи 2-PSP-max-2W а также для связанной с ней задачи о двух реберно непересекающихся цикловых покрытиях максимального суммарного веса в графе с двумя весовыми функциями (задача 2-CC-max-2W).

В разделе 2 статьи вводятся необходимые определения и обозначения. В разделах 3 и 4 описываются полиномиальные $1/2$ -приближенные алгоритмы для задачи 2-PSP-max-2W в ее симметричной и несимметричной постановках соответственно. Раздел 5 посвящен обоснованию того, что оценка точности $1/2$ полученных выше алгоритмов является наилучшей в определенном смысле. В разделе 6 разработан полиномиальный приближенный алгоритм для задачи 2-CC-max-2W с асимптотической оценкой

точности $\frac{2}{3}$. В заключительном разделе 7, основываясь на методах и подходах из раздела 6, построен полиномиальный алгоритм для задачи 2-PSP-max-2W, оценка точности которого превышает $1/2$.

Отметим, что задача об m реберно непересекающихся цикловых покрытиях максимального веса в графе с одной весовой функцией (задача m -CC-max) является полиномиально разрешимой при любом значении m . Однако сложностной статус задачи m -CC-max- mW при $m \geq 2$ нам не известен.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть $G = G(V, E, w_1, w_2)$ — полный неориентированный или ориентированный граф с n вершинами и неотрицательными весовыми функциями ребер (дуг) $w_1 : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ и $w_2 : E \rightarrow \mathbb{R}^+$. Для каждого подграфа G' графа (орграфа) G через $w(G')$ обозначается суммарный вес ребер (дуг), составляющих G' .

Для каждой вершины $v \in V$ (ор)графа G через $d(v)$ обозначим *степень вершины* v , то есть количество инцидентных v ребер (дуг). В случае ориентированного графа G будем также использовать следующие обозначения:

$d^+(v)$ — *полустепень исхода* — количество исходящих из v дуг;

$d^-(v)$ — *полустепень захода* — количество входящих в v дуг;

Ясно, что $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$ для любой вершины $v \in V$.

Подграф G' неориентированного графа G называется k -*регулярным*, если для каждой его вершины v выполняется равенство $d(v) = k$. Подграф G' ориентированного графа G будем называть (k, k) -*регулярным*, если для каждой его вершины v выполняются равенства $d^+(v) = d^-(v) = k$. *Цикловым покрытием* или *2-фактором* (*ориентированным 2-фактором*) в неориентированном (ориентированном) графе G называется любой его остоновый $((1, 1)$ -регулярный) подграф, то есть набор из вершинно непересекающихся циклов (контуров), покрывающих все вершины G .

Частичным туром T в графе (орграфе) G назовем набор вершинно непересекающихся (ориентированных) цепей, покрывающих все вершины G . *Смешанным туром* в (ор)графе G назовем набор вершинно непересекающихся (ориентированных) цепей и циклов, покрывающих все вершины G . При этом некоторые цепи могут состоять из одной вершины; будем называть такие цепи (*синглами*), а цепи, состоящие из более чем одной вершины — *нетривиальными* цепями. Через $|T|$ и $p(T)$ обозначается число ребер и число цепей в смешанном туре T , соответственно. Ясно, что для любого смешанного тура T выполняется равенство: $|T| + p(T) = |V(G)|$.

Заметим, что любой частичный тур T в графе (орграфе) G можно дополнить до (ориентированного) гамильтонова цикла H , добавляя к T ребра (дуги), соединяющие концевые вершины цепей тура T . При этом, в силу неотрицательности весовых функций w_1 и w_2 , справедливы неравенства $w_1(H) \geq w_1(T)$ и $w_2(H) \geq w_2(T)$. Также очевидно, что из любого циклового покрытия или смешанного тура Z (ор)графа G можно получить частичный тур T , удаляя из Z часть ребер (хотя бы по одному ребру из каждого цикла в Z). При этом выполняются неравенства $w_1(T) \leq w_1(Z)$ и $w_2(T) \leq w_2(Z)$.

Двудольной моделью орграфа G назовем двудольный неориентированный граф B с долями $V = V(G)$ и V' , где V' — множество дубликатов всех вершин орграфа G , и $\{X, Y'\} \in E(B) \Leftrightarrow (X, Y) \in E(G)$.

Симметричная (несимметричная) задача о двух коммивояжёрах на максимум с двумя различными весовыми функциями обозначается через 2-PSP-max-2W (2-APSP-max-2W) и заключается в нахождении двух непересекающихся по ребрам (дугам) (ориентированных) гамильтоновых циклов H_1, H_2 в графе (орграфе) G , для которых суммарный вес составляющих их ребер (дуг) максимален:

$$w_1(H_1) + w_2(H_2) \rightarrow \max$$

(в ориентированном случае допускается, что цикл H_i содержит дугу (X, Y) , а цикл H_j содержит встречную дугу (Y, X)). Через w^* будем обозначать вес оптимального решения задачи 2-PSP-max-2W (2-APSP-max-2W).

Далее в статье приводится описание и анализ приближенных алгоритмов $A_{1/2}$ и $\tilde{A}_{1/2}$ для задач 2-PSP-max-2W и 2-APSP-max-2W. Основная идея обоих алгоритмов заключается в нахождении в графе двух цикловых покрытий максимального веса относительно весовых функций w_1 и w_2 соответственно и последующем преобразовании этих покрытий в два реберно непересекающихся гамильтоновых цикла, составляющих искомого $\frac{1}{2}$ -приближенное решение задачи.

3. АЛГОРИТМ $A_{1/2}$ ДЛЯ ЗАДАЧИ 2-PSP-MAX-2W

Если $n \leq 14$, то с помощью полного перебора находим в графе G два непересекающихся по ребрам гамильтоновых цикла H_1^*, H_2^* , составляющих оптимальное решение задачи 2-PSP-max-2W. Предположим, что $n \geq 15$.

Этап 1. С помощью алгоритма Габова из [9] находим в графе G цикловое покрытие C_1 , имеющее наибольший вес $w_1(C_1)$. Далее с помощью того же алгоритма находим в G цикловое покрытие C_2 , имеющее наибольший вес $w_2(C_2)$. Поскольку каждый из гамильтоновых циклов H_1^* и H_2^* является цикловым покрытием G , то выполняются неравенства $w_1(C_1) \geq w_1(H_1^*)$ и $w_2(C_2) \geq w_2(H_2^*)$. Следовательно, $w_1(C_1) + w_2(C_2) \geq w^*$. При этом цикловые покрытия C_1 и C_2 могут иметь общие ребра.

Этап 2. Удалим из цикловых покрытий C_1 и C_2 часть ребер, применяя алгоритм удаления ребер, описанный в разделе 3.1. В результате получим два реберно непересекающихся частичных тура T_1, T_2 , для веса которых справедливо неравенство

$$w_1(T_1) + w_2(T_2) \geq \frac{1}{2}w_1(C_1) + w_2(C_2) \geq \frac{1}{2}w^*.$$

При этом каждый из туров T_1, T_2 состоит не менее чем из трех цепей, и длина любой его цепи не превосходит 5.

Этап 3. Используя процедуру $T \rightarrow H$, описанную в разделе 3.2 и основанную на процедуре $T^{3n} \rightarrow H$ из работы [10], дополняем тур T_1 до гамильтонова цикла H_1 , не имеющего общих ребер с туром T_2 . Далее с помощью той же процедуры $T \rightarrow H$ дополняем тур T_2 до гамильтонова цикла H_2 , не используя ребер из уже построенного цикла H_1 . Предъявляем пару реберно непересекающихся гамильтоновых циклов H_1 и H_2 в качестве искомого $1/2$ -приближенного решения задачи 2-PSP-max-2W.

Основные свойства данного алгоритма описываются следующей теоремой.

Теорема 1. *Представленный выше алгоритм $A_{1/2}$ находит в полном взвешенном неориентированном графе $G = (V, E, w_1, w_2)$ два реберно непересекающихся гамильтоновых цикла H_1, H_2 , суммарный вес которых удовлетворяет неравенству $w_1(H_1) + w_2(H_2) \geq \frac{1}{2}w^*$. Время работы алгоритма $A_{1/2}$ оценивается как $O(n^3)$, где n — число вершин графа G .*

Доказательство этой теоремы приводится в разделе 3.3.

3.1. Процедура построения частичных туров.

Процедура получает на вход два цикловых покрытия C_1 и C_2 с максимальным суммарным весом относительно функций w_1 и w_2 соответственно. Далее происходит удаление части ребер из C_1 и C_2 с целью получения реберно непересекающихся частичных туров T_1 и T_2 необходимого веса.

Назовём ребро графа G *двойным*, если оно входит в оба цикловых покрытия C_1 и C_2 , и *одиночным*, если оно принадлежит только одному из этих покрытий.

Процедура удаления двойных ребер.

Рассмотрим в графе G подграф D с множеством вершин V и множеством всех двойных ребер G . Ясно, что D является подграфом каждого из цикловых покрытий C_1 и C_2 . Следовательно, D — это смешанный тур в G .

Рассмотрим произвольную компоненту связности P (цепь или цикл) в D . Пусть $P = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$, где $v_k = v_0$, если P является циклом. Определим две суммы весов ребер:

$$W_1 = w_2(e_1) + w_1(e_2) + w_2(e_3) + w_1(e_4) + \dots$$

$$W_2 = w_1(e_1) + w_2(e_2) + w_1(e_3) + w_2(e_4) + \dots$$

Если $W_1 > W_2$, то удалим из C_1 ребра $e_1, e_3, e_5, \dots$, а из C_2 удалим ребра $e_2, e_4, e_6, \dots$. Если $W_2 \geq W_1$, то удалим из C_1 ребра $e_2, e_4, e_6, \dots$, а из C_2 удалим ребра $e_1, e_3, e_5, \dots$. В результате в каждом из цикловых покрытий C_1, C_2 будет удалено каждое второе ребро цепи (цикла) P , а суммарный вес всех удаленных ребер не превосходит $\frac{1}{2}(W_1 + W_2) = \frac{1}{2}(w_1(P) + w_2(P))$. При этом для каждого $i = 1, 2$, все не удаленные из C_i ребра цепи (цикла) P попарно несмежны, за исключением, возможно, пары ребер e_1, e_k , в случае, когда P является циклом нечетной длины k .

Процедура удаления одиночных ребер.

Рассмотрим произвольный цикл C в C_1 . Обозначим через $U = e_1, e_2, e_3, \dots, e_t$ последовательность всех одиночных ребер из C , где ребра обозначены в порядке их обхода по циклу. Определим две суммы весов ребер:

$$W_1 = w_1(e_1) + w_1(e_3) + w_1(e_5) + \dots$$

$$W_2 = w_1(e_2) + w_1(e_4) + w_1(e_6) + \dots$$

Если $W_1 > W_2$, то удалим из C_1 ребра $e_2, e_4, e_6, \dots$. Если $W_2 \geq W_1$, то удалим из C_1 ребра $e_1, e_3, e_5, \dots$. Заметим, что сумма весов всех удаленных одиночных ребер цикла C не превосходит $\frac{1}{2}w_1(U)$. Аналогично поступим с каждым циклом из C_1 и из C_2 , при этом ребра из C_2 будем рассматривать относительно весовой функции w_2 .

Лемма 1. В результате применения процедур удаления двойных и одиночных ребер цикловые покрытия C_1 и C_2 преобразуются в реберно непересекающиеся частичные туры T_1 и T_2 . Длина любой цепи в каждом из туров T_1, T_2 не превосходит 5. При этом выполняется неравенство

$$w_1(T_1) + w_2(T_2) \geq \frac{1}{2}(w_1(C_1) + w_2(C_2)) \geq \frac{1}{2}w^*.$$

Доказательство. Из описания процедур сразу следует, что T_1 и T_2 — это смешанные туры в G , не содержащие общих ребер, для которых выполняется требуемое неравенство. Докажем, что T_1 и T_2 являются частичными турами. Для этого достаточно убедиться, что из каждого цикла C в каждом из цикловых покрытий C_1, C_2 удаляется хотя бы одно ребро. Действительно, если цикл C содержит хотя бы два одиночных ребра, то одно из них удаляется процедурой удаления одиночных ребер. В противном случае C содержит цепь из $|C| - 1 \geq 2$ двойных ребер, и хотя бы одно из них удаляется процедурой удаления двойных ребер.

Остается доказать, что длина любой цепи в каждом из туров T_1, T_2 не превосходит 5. Пусть P — произвольная цепь из T_1 (для цепи из T_2 доказательство аналогично). Рассмотрим в цикловом покрытии C_1 цикл $C = (v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_0)$, содержащий цепь P . Если все ребра C изначально были двойными, то после процедуры удаления двойных ребер цепь P может содержать только одно или два ребра (а именно, ребра $e_1 = v_0v_1$ и $e_k = v_{k-1}v_0$, в случае нечетного k). Пусть цикл C содержит хотя бы одно одиночное ребро. Без потери общности, можно считать, что ребро $e_1 = v_0v_1$ является одиночным. Из процедур удаления ребер следует, что в цепи P не может быть двух последовательных двойных ребер и есть только одно или два одиночных ребра, а именно, ребра $e_1 = v_0v_1$ и $e_t = v_{j-1}v_j$ при нечетном t . Если цепь P содержит только одно одиночное ребро $v_{i-1}v_i$, то она может содержать еще только два двойных ребра:

$v_{i-2}v_{i-1}$ и v_iv_{i+1} . В этом случае длина P не превосходит 3. Если же цепь P содержит одиночные ребра $e_1 = v_0v_1$ и $e_t = v_{j-1}v_j$, то она может содержать еще только три двойных ребра: $v_{j-2}v_{j-1}$, v_jv_0 и v_1v_2 (при $j = k - 1$). В этом случае длина цепи P не превосходит 5. Лемма 1 доказана.

3.2. Процедура $T \rightarrow H$ замыкания частичного тура в гамильтонов цикл.

В статье [10] была описана процедура, которая, получая на вход частичный тур T и частичный тур или гамильтонов цикл S , не имеющий общих ребер с T , за время $O(n)$ дополняет тур T до гамильтонова цикла H , не имеющего общих ребер с S . Условием корректной работы этой процедуры является наличие в туре T не менее трех нетривиальных цепей. Поэтому сначала мы добьемся того, чтобы каждый из построенных на Этапе 2 алгоритма частичных туров T_1, T_2 содержал не менее трех нетривиальных цепей.

Согласно лемме 1 каждая цепь в T_1 и T_2 содержит не более шести вершин. Из неравенства $n \geq 15$ следует, что число цепей в каждом из туров T_1 и T_2 не меньше трех. Если хотя бы три из этих цепей являются нетривиальными, то получаем требуемое. Если тур T_1 содержит только две нетривиальные цепи, то общее число вершин в этих цепях не больше 12, а значит, T_1 содержит по крайней мере $15 - 12 = 3$ сингла. Поскольку в туре T_2 нет треугольников, то какие-то два из этих синглов не соединены ребром в T_2 . Добавляя ребро между ними к туру T_1 , получаем третью нетривиальную цепь в T_1 . Если тур T_1 содержит только одну нетривиальную цепь, то в нем есть не менее $15 \setminus 6 = 9$ синглов, из которых можно составить две тройки синглов, и в каждой тройке соединить какие-то два сингла ребром. В результате получаем три нетривиальных цепи в туре T_1 . Аналогично поступаем с туром T_2 .

Теперь, когда каждый из туров T_1, T_2 содержит хотя бы по три нетривиальных цепи, при помощи упомянутой выше процедуры из [10], дополняем частичный тур T_1 до гамильтонова цикла H_1 , не имеющего общих ребер с туром T_2 . Далее при помощи той же процедуры дополняем тур T_2 до гамильтонова цикла H_2 , не имеющего общих ребер с уже построенным циклом H_1 . В итоге получаем два реберно непересекающихся гамильтоновых цикла H_1 и H_2 , составляющих искомое приближенное решение задачи 2-PSP-max-2W.

3.3. Доказательство теоремы 1.

Из неравенства в лемме 1, неотрицательности весовых функций w_1, w_2 и того факта, что построенные процедурой $T \rightarrow H$ гамильтоновы циклы H_1 и H_2 содержат все ребра частичных туров T_1 и T_2 соответственно, следует, что

$$w_1(H_1) + w_2(H_2) \geq w_1(T_1) + w_2(T_2) \geq \frac{1}{2}w^*.$$

Трудоемкость алгоритма $A_{1/2}$ определяется временем работы алгоритма Габова на Этапе 1, которое оценивается как $O(n^3)$. Теорема 1 доказана.

4. АЛГОРИТМ $\tilde{A}_{1/2}$ ДЛЯ ЗАДАЧИ 2-APSP-MAX-2W

Приведенный ниже алгоритм $\tilde{A}_{1/2}$ основан на тех же идеях, что и алгоритм $A_{1/2}$ для задачи 2-PSP-max-2W, но имеет ряд отличий.

Если $n \leq 18$, то с помощью полного перебора находим в орграфе G два непересекающихся по ребрам ориентированных гамильтоновых цикла H_1, H_2 , являющиеся оптимальным решением задачи 2-APSP-max-2W. Предположим, что $n > 18$.

Этап 1. Находим в G два ориентированных цикловых покрытия C_1 и C_2 с максимальным суммарным весом дуг относительно функций w_1 и w_2 соответственно. Для поиска C_1 и C_2 используем двудольную модель B орграфа G , в которой за время $O(n^3)$ находим два совершенных паросочетания максимального веса относительно каждой из весовых функций. Найденным паросочетаниям в B соответствуют искомые цикловые покрытия C_1 и C_2 максимального веса в G .

Этап 2. Используя процедуру “Построение ориентированных частичных туров”, описанную в разделе 4.1, выделим в $C_1 \cup C_2$ два реберно непересекающихся частичных тура T_1, T_2 , суммарный вес которых удовлетворяет неравенству:

$$w_1(T_1) + w_2(T_2) \geq \frac{1}{2}(w_1(C_1) + w_2(C_2)) \geq \frac{1}{2}w^*.$$

Этап 3. При помощи процедуры “Замыкание ориентированных частичных туров в гамильтоновы циклы”, описанной в разделе 4.2, дополним полученные на Этапе 2 частичные туры T_1, T_2 до реберно непересекающихся ориентированных гамильтоновых циклов H_1, H_2 , суммарный вес которых удовлетворяет неравенству:

$$w_1(H_1) + w_2(H_2) \geq w_1(T_1) + w_2(T_2) \geq \frac{1}{2}w^*.$$

Предъявляем пару гамильтоновых циклов H_1, H_2 в качестве искомого приближенного решения задачи 2-APSP-max-2W.

Основным результатом данного раздела статьи являются следующие

Теорема 2. *Представленный выше алгоритм $\tilde{A}_{1/2}$ находит в полном взвешенном ориентированном графе $G = (V, E, w_1, w_2)$ два реберно непересекающихся ориентированных гамильтоновых цикла H_1, H_2 , суммарный вес которых удовлетворяет неравенству $w_1(H_1) + w_2(H_2) \geq \frac{1}{2}w^*$. Время работы алгоритма $A_{1/2}$ оценивается как $O(n^3)$, где n — число вершин орграфа G .*

Доказательство теоремы 2 приводится в разделе 4.3. В разделе 5 доказывается, что в рамках используемого нами подхода оценка точности $1/2$ алгоритмов $A_{1/2}$ и $\tilde{A}_{1/2}$ является неулучшаемой.

4.1. Построение ориентированных частичных туров.

Процедура получает на вход два ориентированных цикловых покрытия C_1 и C_2 с максимальным суммарным весом относительно функций w_1 и w_2 соответственно. Далее процедура строит частичные туры необходимого веса путем удаления дуг из цикловых покрытий C_1 и C_2 .

Назовём дугу $e = (x, y)$ *двойной*, если она входит в оба цикловых покрытия C_1 и C_2 , и *одиночной*, если она входит только в одно из покрытий. Назовем двойную дугу $e = (x, y)$ *сингулярной относительно C_i* , если встречная дуга $e' = (y, x)$ принадлежит цикловому покрытию C_i , то есть если C_i содержит цикл (x, e, y, e', x) длины 2. Назовем сингулярную дугу $e = (x, y)$ *2-сингулярной*, если встречная дуга $e' = (y, x)$ принадлежит обоим цикловым покрытиям C_1 и C_2 , и *1-сингулярной*, если e' принадлежит только одному из покрытий C_1 или C_2 . Назовем дугу $e = (x, y)$ циклового покрытия C_i *квазиодиночной*, если она либо одиночная, либо 1-сингулярная относительно C_{3-i} . В последнем случае дуги $e' = (y, x)$ и $e'' = (x, y)$ покрытия C_{3-i} будем называть *дополняющими* (для e).

Процедура удаления двойных дуг.

Определим орграф D как остовный подграф в G , состоящий из всех 2-сингулярных двойных дуг и всех двойных дуг, не являющихся сингулярными. Ясно, что каждая компонента связности D является цепью или циклом. Пусть $P = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$ — произвольная компонента связности в D , где $v_k = v_0$, если P является циклом.

Если P содержит 2-сингулярную дугу $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, то каждое из цикловых покрытий C_1 и C_2 содержит обе дуги $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ и $e'_i = (v_i, v_{i-1})$, а значит, содержит цикл $Z = (v_{i-1}, e_i, v_i, e'_i, v_{i-1})$ длины 2. Отсюда следует, что $k = 2$, $i = 1$ и $P = Z = (v_0, e_1, v_1, e'_1, v_0)$. Если $w_1(e_1) + w_2(e'_1) < w_2(e_1) + w_1(e'_1)$, то удалим из C_1 дугу e_1 , а из C_2 удалим дугу e'_1 . В противном случае удалим из C_1 дугу e'_1 , а из C_2 удалим дугу e_1 .

Пусть P не содержит 2-сингулярных (а значит, и вообще сингулярных) дуг. Определим две суммы весов дуг:

$$W_1 = w_2(e_1) + w_1(e_2) + w_2(e_3) + w_1(e_4) + \dots$$

$$W_2 = w_1(e_1) + w_2(e_2) + w_1(e_3) + w_2(e_4) + \dots$$

Если $W_1 > W_2$, то удалим из C_1 дуги $e_1, e_3, e_5, \dots$, а из C_2 удалим дуги $e_2, e_4, e_6, \dots$. Если $W_2 \geq W_1$, то удалим из C_1 дуги $e_2, e_4, e_6, \dots$, а из C_2 удалим дуги $e_1, e_3, e_5, \dots$. В результате в каждом из цикловых покрытий C_1, C_2 будет удалена каждая вторая дуга цепи (цикла) P , а суммарный вес всех удалённых дуг не превосходит $\frac{1}{2}(W_1 + W_2) = \frac{1}{2}(w_1(P) + w_2(P))$.

Процедура удаление квазиодиночных и дополняющих дуг.

Рассмотрим по отдельности каждый цикл C покрытия C_1 . Если C состоит только из двойных дуг, то C принадлежит также цикловому покрытию C_2 , а значит, является компонентой связности в орграфе D . В этом случае удаление дуг из C выполняется согласно процедуре удаления двойных дуг.

Пусть цикл C содержит хотя бы одну одиночную дугу. Обозначим через $U = e_1, e_2, e_3, \dots, e_t$ последовательность всех квазиодиночных дуг из C , где дуги обозначены в порядке их обхода по циклу. Для каждой 1-сингулярной дуги $e_i = (u, v)$ обозначим через $e'_i = (v, u)$ и $e''_i = (u, v)$ дополняющие ее дуги циклового покрытия C_2 . Для каждой одиночной дуги e_j из U также формально введем обозначения e'_j и e''_j , считая e'_j и e''_j фиктивными дугами и полагая $w_2(e'_j) = w_2(e''_j) = 0$. Определим две суммы весов дуг:

$$W_1 = (w_1(e_1) + w_2(e'_1)) + w_2(e''_1) + (w_1(e_3) + w_2(e'_3)) + w_2(e''_3) + \dots$$

$$W_2 = w_2(e'_1) + (w_1(e_2) + w_2(e'_2)) + w_2(e''_2) + (w_1(e_4) + w_2(e'_4)) + \dots$$

Если $W_1 > W_2$, то удалим из C_1 дуги $e_2, e_4, e_6, \dots$, а из C_2 удалим дуги $e''_1, e'_2, e''_3, e'_4, \dots$. Если $W_2 \geq W_1$, то удалим из C_1 дуги $e_1, e_3, e_5, \dots$, а из C_2 удалим дуги $e'_1, e''_2, e'_3, e''_4, \dots$ (разумеется, речь идет об удалении из C_2 только реально существующих дуг, дополняющих 1-сингулярные дуги цикла C).

Заметим, что сумма весов всех удаленных дуг не превосходит $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^t (w_1(e_i) + w_2(e'_i) + w_2(e''_i))$, то есть не превосходит полусуммы весов всех квазиодиночных и дополняющих дуг для цикла C . Применим описанную процедуру к каждому циклу из C_1 и C_2 .

Лемма 2. В результате процедур удаления двойных, квазиодиночных и дополняющих дуг цикловые покрытия C_1 и C_2 преобразуются в реберно непересекающиеся частичные туры T_1 и T_2 . Длина любой цепи в каждом из туров T_1, T_2 не превосходит 5. При этом выполняется неравенство

$$w_1(T_1) + w_2(T_2) \geq \frac{1}{2}(w_1(C_1) + w_2(C_2)) \geq \frac{1}{2}w^*.$$

Доказательство. Из описания процедур следует, что T_1 и T_2 — это смешанные туры без общих дуг, для веса которых выполняется требуемое неравенство. Докажем, что T_1 и T_2 являются частичными турами, то есть из каждого цикла C в каждом из цикловых покрытий C_1, C_2 удаляется хотя бы одна дуга. Если цикл C имеет длину не меньше 3 и содержит хотя бы две квазиодиночные дуги, то одна из них удаляется процедурой удаления квазиодиночных и дополняющих дуг. Если C имеет длину не меньше 3 и содержит не более одной квазиодиночной дуги, то C содержит цепь из $|C| - 1 \geq 2$ двойных дуг, хотя бы одна из которых удаляется процедурой удаления двойных дуг. Пусть C — цикл длины 2 в C_i . Если обе дуги в C являются одиночными, то одна из них удаляется процедурой удаления квазиодиночных и дополняющих дуг. Если ровно одна дуга в C является одиночной, то цикл C состоит из двух дополняющих дуг для некоторой 1-сингулярной дуги покрытия C_{3-i} . В этом случае одна из дуг цикла C также удаляется процедурой удаления квазиодиночных

и дополняющих дуг. Наконец, если цикл C образован двумя двойными дугами, то обе они являются 2-сингулярными, а значит, одна из них удаляется процедурой удаления двойных дуг.

Остается доказать, что длина любой цепи в каждом из туров T_1, T_2 не превосходит 5. Пусть P — цепь из T_1 , и пусть $C = (v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_0)$ — цикл из C_1 длины $k > 2$, содержащий P . Если цикл C состоит только из двойных дуг, то после процедуры удаления двойных дуг цепь P будет содержать только одну или две дуги ($e_1 = (v_0, v_1)$ и $e_k = (v_{k-1}, v_0)$, в случае нечетного k). Пусть C содержит одиночную дугу $e_1 = (v_0, v_1)$. Из процедур удаления двойных и квазиодиночных дуг следует, что в цепи P не может быть двух последовательных двойных дуг и может быть всего одна или две квазиодиночные дуги, а именно, дуги $e_1 = (v_0, v_1)$ и $e_t = (v_{j-1}, v_j)$ при нечетном t . Отсюда аналогично доказательству леммы 1 выводится, что длина цепи P не превосходит 5. Лемма 2 доказана.

4.2. Замыкание ориентированных частичных туров в гамильтоновы циклы.

В статье [16] была описана процедура, которая, получая на вход ориентированный частичный тур T и ориентированный частичный тур или гамильтонов цикл S , не имеющих общих дуг с T , за время $O(n)$ дополняет тур T до ориентированного гамильтонова цикла H , не имеющего общих дуг с S . Условием корректной работы этой процедуры является наличие в туре T не менее четырех цепей (среди которых могут быть синглы).

Так как $n > 18$, и по лемме 2 каждая цепь туров T_1 и T_2 содержит не более шести вершин, то каждый из этих туров состоит не менее чем из четырех цепей. Применяя процедуру из [16], сперва дополняем частичный тур T_1 до ориентированного гамильтонова цикла H_1 , не имеющего общих дуг с туром T_2 . Далее при помощи той же процедуры дополняем тур T_2 до ориентированного гамильтонова цикла H_2 , не имеющего общих дуг с уже построенным циклом H_1 . В итоге получаем два ориентированных гамильтоновых цикла H_1 и H_2 без общих дуг, составляющих искомое приближенное решение задачи 2-APSP-max-2W.

4.3. Доказательство теоремы 2.

Из неравенства в лемме 2, неотрицательности весовых функций w_1, w_2 и того факта, что построенные гамильтоновы циклы H_1 и H_2 содержат все дуги частичных туров T_1 и T_2 соответственно, следует, что

$$w_1(H_1) + w_2(H_2) \geq w_1(T_1) + w_2(T_2) \geq \frac{1}{2}w^*.$$

Трудоемкость алгоритма $A_{1/2}$ определяется временем отыскания ориентированных цикловых покрытий C_1, C_2 на Этапе 1, которое оценивается как $O(n^3)$. Теорема 2 доказана.

5. "Неулучшаемость" оценки точности $1/2$

Нетрудно заметить, что если в качестве верхней границы для веса оптимального решения в задачах 2-PSP-max-2W и 2-APSP-max-2W использовать величину $w_1^* + w_2^*$, где w_1^* и w_2^* — это оптимумы для задачи о максимальном цикловом покрытии с весовыми функциями w_1 и w_2 соответственно (как это делается выше при анализе алгоритмов $A_{1/2}$ и $\tilde{A}_{1/2}$), то полученную оценку точности $1/2$ относительно этой верхней границы улучшить невозможно.

Действительно, рассмотрим входной граф (орграф) $G = (V, E, w_1, w_2)$, где $w_1 = w_2$, и веса всех ребер некоторого (ориентированного) гамильтонова цикла H равны 1, а веса всех остальных ребер графа равны нулю. В этом случае справедливы равенства $w_1^* = w_2^* = n$, причем единственным максимальным цикловым покрытием

относительно любой из весовых функций является гамильтонов цикл H . При этом для веса оптимального решения задачи 2-PSP-max-2W (2-APSP-max-2W) также выполняется равенство $w^* = n$, поскольку в графе G только ребра цикла H имеют ненулевой вес, равный 1, и каждое из этих ребер может принадлежать только одному из гамильтоновых циклов, составляющих оптимальное решение задачи 2-PSP-max-2W (2-APSP-max-2W). Поэтому для веса оптимального решения выполняется равенство $w^* = \frac{1}{2}(w_1^* + w_2^*) = n$, что не позволяет получить для задач 2-PSP-max-2W и 2-APSP-max-2W приближенных алгоритмов с оценками точности выше $1/2$ по отношению к сумме $w_1^* + w_2^*$. Приведенный пример показывает, что данный вывод остается в силе и в том случае, если в качестве w_1^* и w_2^* рассматривать оптимумы для задачи коммивояжера TSP-max с весовыми функциями w_1 и w_2 соответственно.

Сделанное замечание указывает на ограниченность использованного нами подхода, при котором алгоритм на первом этапе независимо находит два (пересекающихся по ребрам) максимальных цикловых покрытия для весовых функций w_1 и w_2 , а затем использует эти покрытия для построения приближенного решения задачи 2-PSP-max-2W (2-APSP-max-2W). При этом в качестве верхней границы для веса оптимального решения используется сумма $w_1^* + w_2^*$. Чтобы преодолеть это ограничение, мы переходим к разработке приближенного алгоритма для задачи 2-CC-max-2W, который находит в графе два *реберно непересекающихся* цикловых покрытия C_1 и C_2 , и к разработке основанного на аналогичных идеях алгоритма для задачи 2-PSP-max-2W с оценкой точности, превышающей $1/2$.

6. АЛГОРИТМ $A_{2/3-\varepsilon}$ ДЛЯ ЗАДАЧИ 2-CC-MAX-2W

В этом разделе через C_1^* и C_2^* обозначаются два реберно непересекающихся цикловых покрытия во входном графе G , составляющие оптимальное решение задачи 2-CC-max-2W. Положим $c_1^* = w_1(C_1^*)$ и $c_2^* = w_2(C_2^*)$. Тогда вес оптимального решения задачи 2-CC-max-2W равен $c^* = c_1^* + c_2^*$.

В приведенном ниже алгоритме используется тот факт, что полиномиальный алгоритм поиска циклового покрытия максимального веса корректно работает не только для полного входного графа, но и для произвольного.

Если $n \leq 9$, то с помощью полного перебора находим в графе G два реберно непересекающихся цикловых покрытия C_1^* , C_2^* , составляющие оптимальное решение задачи 2-CC-max-2W. Предположим, что $n \geq 10$.

Этап 1.1. Находим в графе G цикловое покрытие C_1 , имеющее наибольший вес $w_1(C_1)$. Удаляем из G все ребра покрытия C_1 , и в полученном графе $G \setminus C_1$ находим цикловое покрытие F_2 , имеющее наибольший вес $w_2(F_2)$. В результате получаем пару реберно непересекающихся цикловых покрытий C_1, F_2 в G , причем $w_1(C_1) \geq c_1^*$.

Этап 1.2. Находим в G цикловое покрытие C_2 , имеющее наибольший вес $w_2(C_2)$. Удаляем из G все ребра покрытия C_2 , и в полученном графе $G \setminus C_2$ находим цикловое покрытие F_1 , имеющее наибольший вес $w_1(F_1)$. Тем самым получаем пару реберно непересекающихся цикловых покрытий F_1, C_2 , причем $w_2(C_2) \geq c_2^*$.

Этап 2. Формируем смешанный тур K_1 , состоящий из всех ребер циклового покрытия C_2 , не принадлежащих C_1 , и из всех таких ребер $e \in C_1 \cap C_2$, что $w_1(e) \geq w_2(e)$. Аналогично формируем смешанный тур K_2 , состоящий из всех ребер покрытия C_1 , не принадлежащих C_2 и из всех таких ребер $e \in C_1 \cap C_2$, что $w_2(e) > w_1(e)$. Из данного определения следует, что K_1 и K_2 — это два реберно непересекающихся смешанных тура в G , где $K_1 \subseteq C_2$, $K_2 \subseteq C_1$ и $K_1 \cup K_2 = C_1 \cup C_2$. Также нетрудно понять, что пара туров K_1, K_2 обладает наибольшим реберным весом $w_1(K_1) + w_2(K_2)$ среди всех таких пар реберно непересекающихся смешанных туров, что первый из них целиком содержится в C_2 , а второй — в C_1 .

Этап 3. Применяя процедуру, описанную в разделе 6.1, преобразуем смешанный тур K_1 в цикловое покрытие Z_1 , не содержащее ребер тура K_2 и имеющее вес $w_1(Z_1) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$. Далее с помощью той же процедуры преобразуем тур K_2 в цикловое покрытие Z_2 , не содержащее ребер из уже построенного покрытия Z_1 и имеющее вес $w_2(Z_2) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_2(K_2)$.

Этап 4. Обозначим через (J_1, J_2) ту из пар реберно непересекающихся цикловых покрытий (C_1, F_2) , (F_1, C_2) , (Z_1, Z_2) , которая имеет наибольший вес $w_1(J_1) + w_2(J_2)$. Предъявляем пару цикловых покрытий (J_1, J_2) в качестве искомого приближенного решения задачи 2-CC-max-2W.

Основным результатом данного раздела статьи является следующая

Теорема 3. *Представленный выше алгоритм $A_{2/3-\varepsilon}$ находит в полном взвешенном графе $G = G(V, E, w_1, w_2)$ два реберно непересекающихся цикловых покрытия J_1, J_2 , для веса которых выполняется неравенство $w_1(J_1) + w_2(J_2) \geq \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{n-3}\right) c^*$. Время работы алгоритма $A_{2/3-\varepsilon}$ оценивается как $O(n^3)$, где n — число вершин графа G .*

Доказательство этой теоремы приводится в разделе 6.2.

6.1. Преобразование смешанных туров в реберно непересекающиеся цикловые покрытия.

Описанная в этом разделе процедура получает на вход два реберно непересекающихся смешанных тура K_1 и K_2 (в частности, любой из этих туров может быть цикловым покрытием в G) и преобразует тур K_1 в цикловое покрытие Z_1 , не имеющее общих ребер с K_2 и такое, что $w_1(Z_1) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$. Процедура корректно работает при условии $n \geq 10$.

Далее нам понадобится следующая

Лемма 3. *Пусть T — смешанный тур во взвешенном графе $G = (V, E, w)$. Если тур T содержит $t \geq 6$ ребер, то в T найдутся также два несмежных ребра e и e' , что $w(e) + w(e') \leq 2w(T)/t$.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный граф L , вершинами которого являются все ребра тура T , при этом в графе L две вершины смежны, если соответствующие им ребра тура T несмежны в G (иными словами L — это дополнение реберного графа $L(T)$ тура T). Так как каждое ребро тура T смежно не более чем с двумя другими ребрами из T , то степень каждой вершины графа L не меньше $(t-1)-2 = t-3$. Поскольку $t-3 \geq t/2$ при $t \geq 6$, по теореме Дирака (см. разд. 10 в [7]) граф L содержит гамильтонов цикл $H = (e_1, e_2, \dots, e_t, e_1)$. Рассмотрим в туре T пары несмежных ребер $(e_1, e_2), (e_2, e_3), \dots, (e_{t-1}, e_t), (e_t, e_1)$. Поскольку суммарный вес ребер во всех этих парах равен $2(w(e_1) + w(e_2) + \dots + w(e_t)) = 2w(T)$, то выбирая в качестве (e, e') ту из указанных пар ребер, которая имеет наименьший вес, получаем искомую оценку $w(e) + w(e') \leq 2w(T)/t$. Лемма 3 доказана.

Для каждой вершины $x \in V$ обозначим через $K_i(x)$ множество всех ребер тура K_i , инцидентных вершине x . Ясно, что $|K_i(x)| \leq 2$. Будем полагать $K_i(x) = \emptyset$, если в графе G отсутствует вершина x .

Приступим к описанию процедуры. Если смешанный тур K_1 состоит только из циклов, то он является искомым цикловым покрытием Z_1 . Предположим, что K_1 содержит хотя бы одну цепь. Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. Тур K_1 содержит ровно одну цепь $P = u_1, u_2, \dots, u_k$ (здесь и далее в обозначениях для цепи указывается только последовательность ее вершин). Тогда

$|K_1| = n - 1$. Если $k \geq 3$ и ребро u_1u_k не принадлежит туру K_2 , то, добавляя это ребро к туру K_1 , получим искомое цикловое покрытие Z_1 .

Пусть $k \geq 3$ и $u_1u_k \in K_2$. Существует не более одной такой вершины $x \in V$, что оба ребра xu_1 и xu_k принадлежат туру K_2 (в этом случае в K_2 имеется цикл (x, u_1, u_k, x) длины 3). Положим $R = K_1(x) \cup \{u_1u_2, u_2u_3, u_{k-2}u_{k-1}, u_{k-1}u_k\}$ — это подмножество ребер тура K_1 мощности не более 6. Тогда $|K_1 \setminus R| \geq n - 7$. Выберем во множестве $K_1 \setminus R$ ребро $e = yz$ наименьшего веса. Тогда $w_1(e) \leq w_1(K_1)/(n - 7)$. Удалим ребро e из тура K_1 . Тогда полученный тур $K_1 - e$ содержит ровно две цепи, концевыми вершинами которых являются u_1, u_k, y, z в каком-то порядке. Из условий $e \notin R$ и $u_1u_k \in K_2$ следует, что все вершины u_1, u_k, y, z попарно различны, тур K_1 не содержит ни одного из ребер yu_1, yu_k, zu_1, zu_k и хотя бы одна пара ребер yu_1, zu_k или yu_k, zu_1 не содержит ребра из K_2 . Добавляя эту пару ребер к туру $K_1 - e$, получаем искомое цикловое покрытие Z_1 веса $w_1(Z_1) \geq w_1(K_1) - w_1(e) \geq \left(1 - \frac{1}{n-7}\right) w_1(K_1) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$.

Пусть $k = 2$. Определим множество ребер R , состоящее из ребра u_1u_2 и все таких ребер $uv \in K_1$, что в туре K_2 имеется хотя бы два ребра, соединяющих вершины из $\{u, v\}$ с вершинами из $\{u_1, u_2\}$. Так как в турах K_1 и K_2 каждая вершина имеет степень не больше 2, то $|R| \leq 5$. Тогда $|K_1 \setminus R| \geq n - 6$. Выберем во множестве $K_1 \setminus R$ ребро $e = yz$ наименьшего веса $w_1(e) \leq w_1(K_1)/(n - 6)$. Удалим ребро e из тура K_1 . Полученный тур $K_1 - e$ содержит ровно две цепи, одной из которых является $P = u_1u_2$, а вторая цепь получается из какого-то цикла тура K_1 удалением ребра $e = yz$. Из условия $e \notin R$ следует, что тур K_1 не содержит ни одного из ребер yu_1, yu_2, zu_1, zu_2 и хотя бы одна пара ребер yu_1, zu_2 или yu_2, zu_1 не включает ребер из K_2 . Добавляя эту пару ребер к туру $K_1 - e$, получаем искомое цикловое покрытие Z_1 веса $w_1(Z_1) \geq w_1(K_1) - w_1(e) \geq \left(1 - \frac{1}{n-6}\right) w_1(K_1) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$.

Пусть $k = 1$, то есть цепь $P = u_1$ является синглом в K_1 . Существует не более двух вершин $x_1, x_2 \in V$, смежных в туре K_2 с вершиной v_1 . Положим $R = K_1(x_2) \cup K_1(x_2)$ — это подмножество ребер тура K_1 мощности не более 4. Тогда $|K_1 \setminus R| \geq n - 5$. Выберем во множестве $K_1 \setminus R$ ребро $e = yz$ наименьшего веса $w_1(e) \leq w_1(K_1)/(n - 5)$. Тогда тур $K_1 - e$ содержит ровно две цепи, одной из которых является $P = u_1$, а вторая цепь получается из какого-то цикла в K_1 удалением ребра $e = yz$. Из условия $e \notin R$ следует, что никакое из ребер yu_1, zu_1 не принадлежит ни одному из туров K_1, K_2 . Добавляя ребра yu_1 и zu_1 к туру $K_1 - e$, получаем искомое цикловое покрытие Z_1 веса $w_1(Z_1) \geq w_1(K_1) - w_1(e) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1(K_1) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$.

Случай 2. $p(K_1) = 2$, то есть тур K_1 содержит две цепи $P_1 = u_1, u_2, \dots, u_k$ и $P_2 = v_1, v_2, \dots, v_l$. Тогда $|K_1| = n - 2$. Если хотя бы одно из ребер $u_1v_1, u_1v_l, u_kv_1, u_kv_l$ не принадлежит туру K_2 , то добавим это ребро к туру K_1 . В результате получим смешанный тур веса не меньше $w_1(K_1)$, содержащий ровно одну цепь. Преобразуем этот тур в цикловое покрытие Z_1 , как описано в Случае 1. Далее будем считать, что все ребра $u_1v_1, u_1v_l, u_kv_1, u_kv_l$ принадлежат туру K_2 . Если $k \geq 3$ и ребро u_1u_k не принадлежит K_2 , то добавляя это ребро к туру K_1 и переходя к Случаю 1, получим искомое цикловое покрытие Z_1 . Аналогично рассматривается случай, когда $l \geq 3$ и $v_1v_l \notin K_2$. Поскольку в туре K_2 каждая из вершин u_1, u_k, v_1, v_l имеет степень не больше 2, то остается рассмотреть только следующие два подслучая.

Случай 2.1. Одна из цепей P_1 или P_2 является синглом в K_1 . Можно считать, что $P_2 = v_1$. В этом случае $u_1v_1 \in K_2$, $u_kv_1 \in K_2$ и если $k \geq 3$, то $u_1u_k \in K_2$. При $k \geq 2$ полагаем $R = \{u_1u_2, u_{k-1}u_k\}$, а при $k = 1$ выберем такую вершину $x \in V \setminus \{u_1, v_1\}$, что $xu_1 \in K_2$ и $xv_1 \in K_2$, и положим $R = K_1(x)$ (если такая вершина x существует, то она единственна). В обоих случаях имеем $|R| \leq 2$ и $|K_1 \setminus R| \geq n - 4 \geq 6$.

По лемме 3 смешанный тур $K_1 \setminus R$ содержит такие два несмежных ребра $e_1 = y_1 z_1$ и $e_2 = y_2 z_2$, что $w_1(e_1) + w_1(e_2) \leq \frac{2}{n-4} w_1(K_1 \setminus R) \leq \frac{2}{n-4} w_1(K_1)$. Удалим из K_1 ребра e_1 и e_2 . Так как они несмежны между собой, то все вершины y_1, y_2, z_1, z_2 попарно различны. При этом из определения множества R и условия $e_1, e_2 \notin R$ следует, что $\{y_1, y_2, z_1, z_2\} \cap \{u_1, u_k, v_1\} = \emptyset$. Если $k \geq 2$, то в туре K_2 вершина v_1 несмежна с вершинами из множества $\{y_1, y_2, z_1, z_2\}$, а каждая из вершин u_1, u_k смежна не более чем с одной вершиной из этого множества (поскольку $u_1 v_1 \in K_2$ и $u_k v_1 \in K_2$). Без потери общности будем считать, что в туре K_2 вершины u_1 и u_k несмежны с вершинами y_1 и y_2 соответственно. Добавляя к туру $K_1 \setminus \{e_1, e_2\}$ ребра $u_1 y_1, u_k y_2, v_1 z_1, v_1 z_2$, получаем искомое цикловое покрытие Z_1 веса $w_1(Z_1) \geq w_1(K_1) - (w_1(e_1) + w_1(e_2)) \geq \left(1 - \frac{2}{n-4}\right) w_1(K_1) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$. Пусть $k = 1$. Тогда $u_1 v_1 \in K_2$ и в туре K_2 каждая из вершин u_1, v_1 смежна не более чем с одной вершиной из множества $\{y_1, y_2, z_1, z_2\}$. Так как $e_1, e_2 \notin R$, то ни одна из вершин y_1, y_2, z_1, z_2 не может быть смежна в K_2 одновременно с обеими вершинами u_1 и v_1 . Поэтому можно считать, что в туре K_2 вершина u_1 смежна только с v_1 и y_1 , а v_1 смежна только с u_1 и y_2 . Добавляя к туру $K_1 \setminus \{e_1, e_2\}$ ребра $u_1 y_2, u_1 z_2, v_1 y_1, v_1 z_1$, получаем искомое цикловое покрытие Z_1 веса $w_1(Z_1) \geq \left(1 - \frac{2}{n-4}\right) w_1(K_1) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$.

Случай 2.2. $k = l = 2$, то есть $P_1 = u_1 u_2$, $P_2 = v_1 v_2$. При этом ребра $u_1 v_1, u_1 v_2, u_2 v_1, u_2 v_2$ принадлежат туру K_2 . Это означает, что в туре K_2 имеется цикл $(u_1, v_1, u_2, v_2, u_1)$ длины 4. По лемме 3 смешанный тур $K_1 \setminus \{u_1 v_1, u_2 v_2\}$ содержит такие два несмежных ребра $e_1 = y_1 z_1$ и $e_2 = y_2 z_2$, что $w_1(e_1) + w_1(e_2) \leq \frac{2}{n-4} w_1(K_1 \setminus \{u_1 v_1, u_2 v_2\}) \leq \frac{2}{n-4} w_1(K_1)$. Удалим из тура K_1 ребра e_1 и e_2 . Так как ни одно из этих ребер не принадлежит множеству $\{u_1 v_1, u_2 v_2\}$, то $\{y_1, y_2, z_1, z_2\} \cap \{u_1, u_2, v_1, v_2\} = \emptyset$. Из наличия в туре K_2 цикла $(u_1, v_1, u_2, v_2, u_1)$ следует, что ни одна из вершин u_1, u_2, v_1, v_2 не смежна в K_2 с вершинами из множества $\{y_1, y_2, z_1, z_2\}$. Добавляя к туру $K_1 \setminus \{e_1, e_2\}$ ребра $u_1 y_1, u_2 z_1, v_1 y_2, v_2 z_2$, получим искомое цикловое покрытие Z_1 веса $w_1(Z_1) \geq \left(1 - \frac{2}{n-4}\right) w_1(K_1) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$.

Случай 3. $p(K_1) = 3$, то есть тур K_1 содержит три цепи $P_1 = u_1, u_2, \dots, u_k$, $P_2 = v_1, v_2, \dots, v_l$ и $P_3 = w_1, w_2, \dots, w_m$. Тогда $|K_1| = n - 3$. Если хотя бы одно из чисел k, l, m не равно 1, скажем, $m > 1$, то какое-то из ребер $u_1 v_1, u_1 w_1, u_1 w_m$ не принадлежит туру K_2 . Добавляя это ребро к туру K_1 , получаем смешанный тур, содержащий ровно две цепи, после чего переходим к Случаю 2.

Пусть $k = l = m = 1$. Тогда все три цепи тура K_1 являются синглами, а в туре K_2 имеется цикл (u_1, v_1, w_1, u_1) длины 3 (иначе снова можно перейти к Случаю 2). Удалим из тура K_1 три ребра $e_1 = y_1 z_1$, $e_2 = y_2 z_2$ и $e_3 = y_3 z_3$ наименьшего веса (сейчас мы допускаем, что среди этих ребер могут быть смежные, то есть среди вершин $y_1, z_1, y_2, z_2, y_3, z_3$ могут быть повторяющиеся). Тогда $w_1(e_1) + w_1(e_2) + w_1(e_3) \leq \frac{3}{n-3} w_1(K_1)$. Добавляя к туру $K_1 \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$ ребра $u_1 y_1, u_1 z_1, v_1 y_2, v_1 z_2, w_1 y_3, w_1 z_3$, получим искомое цикловое покрытие Z_1 веса $w_1(Z_1) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$.

Случай 4. $p(K_1) \geq 4$, то есть тур K_1 содержит не менее четырех цепей. В этом случае среди ребер графа G , соединяющих концы различных цепей тура K_1 , найдется ребро, не принадлежащее туру K_2 . Добавим это ребро к туру K_1 . Будем действовать так до тех пор, пока в K_1 не останется ровно три цепи. После этого перейдем к Случаю 3.

Нетрудно убедиться, что время работы описанной процедуры преобразования смешанного тура K_1 в цикловое покрытие Z_1 не превосходит $O(n^2)$.

6.2. Доказательство теоремы 3.

Трудоёмкость алгоритма $A_{2/3-\varepsilon}$ определяется временем отыскания цикловых покрытий C_1, C_2, F_1, F_2 на Этапах 1.1 и 1.2, которое оценивается как $O(n^3)$.

Докажем оценку точности $\frac{2}{3} - \frac{1}{n-3}$. Рассмотрим в графе G пару реберно непересекающихся цикловых покрытий C_1^*, C_2^* , составляющих оптимальное решение задачи 2-СС- $\max$ -2W. Согласно ранее введенным обозначениям имеем $c_1^* = w_1(C_1^*)$, $c_2^* = w_2(C_2^*)$ и $c^* = c_1^* + c_2^*$ — это оптимум задачи 2-СС- $\max$ -2W. Тогда для найденных алгоритмом на Этапах 1.1 и 1.2 цикловых покрытий C_1 и C_2 справедливы оценки $w_i(C_i) \geq c_i^*$, $i = 1, 2$.

Определим следующие множества ребер (смешанные туры) в G : $X_1 = C_1^* \setminus C_2$; $Y_1 = C_1^* \cap C_2$; $X_2 = C_2^* \setminus C_1$; $Y_2 = C_2^* \cap C_1$. Тогда для каждого $i = 1, 2$ множества X_i и Y_i образуют разбиение множества ребер циклового покрытия C_i^* , что влечет равенства $w_i(X_i) + w_i(Y_i) = c_i^*$, $i = 1, 2$.

Заметим, что множество ребер X_1 представляет из себя смешанный тур в графе $G \setminus C_2$, а построенное на Этапе 1.2 алгоритма цикловое покрытие F_1 также содержится в этом графе и имеет в нем наибольший вес $w_1(F_1)$. Так как смешанный тур X_1 с помощью процедуры, описанной в разделе 6.1, можно преобразовать в цикловое покрытие F_1' , реберно непересекающееся с C_2 (то есть содержащееся в графе $G \setminus C_2$) и имеющее вес $w_1(F_1') \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(X_1)$, то для веса максимального циклового покрытия F_1 в $G \setminus C_2$ выполняется оценка $w_1(F_1) \geq w_1(F_1') \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(X_1)$. Аналогично доказывается, что $w_2(F_2) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_2(X_2)$.

Из определения смешанных туров Y_1 и Y_2 следует, что они не имеют общих ребер, так как первый из них содержится в цикловом покрытии C_1^* , а второй — в C_2^* , где $C_1^* \cap C_2^* = \emptyset$. Кроме того, тур Y_1 содержится в цикловом покрытии C_2 , а тур Y_2 — в C_1 . На Этапе 2 алгоритма было установлено, что определенная на этом этапе пара смешанных туров K_1, K_2 имеет наибольший вес $w_1(K_1) + w_2(K_2)$ среди всех таких пар реберно непересекающихся смешанных туров, что первый из них содержится в C_2 , а второй — в C_1 . Отсюда следует, что $w_1(K_1) + w_2(K_2) \geq w_1(Y_1) + w_2(Y_2)$. Поэтому для построенных на Этапе 3 цикловых покрытий Z_1 и Z_2 справедлива оценка $w_1(Z_1) + w_2(Z_2) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) (w_1(K_1) + w_2(K_2)) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) (w_1(Y_1) + w_2(Y_2))$.

Предположим, что заявленная оценка точности алгоритма $A_{2/3-\varepsilon}$ неверна. Тогда для построенных на Этапе 4 цикловых покрытий J_1 и J_2 справедливо неравенство $w_1(J_1) + w_2(J_2) < \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{n-3}\right) c^*$. Из определения покрытий J_1 и J_2 , следует, что $w_1(C_1) + w_2(F_2) < \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{n-3}\right) c^*$, $w_1(F_1) + w_2(C_2) < \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{n-3}\right) c^*$ и $w_1(Z_1) + w_2(Z_2) < \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{n-3}\right) c^*$. Складывая последние три неравенства и используя ранее полученные соотношения, приходим к следующей цепочке неравенств:

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{3}{n-3}\right) c^* &> (w_1(C_1) + w_2(C_2)) + (w_1(F_1) + w_2(F_2)) + (w_1(Z_1) + w_2(Z_2)) \geq \\ &= (c_1^* + c_2^*) + \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) (w_1(X_1) + w_2(X_2)) + \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) (w_1(Y_1) + w_2(Y_2)) = \\ &= c^* + \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) (w_1(X_1) + w_1(Y_1)) + w_2(X_2) + w_2(Y_2) = \\ &= c^* + \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) (c_1^* + c_2^*) = c^* + \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) c^* = \left(2 - \frac{3}{n-3}\right) c^*. \end{aligned}$$

Из полученного противоречия следует, что $w_1(J_1) + w_2(J_2) \geq \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{n-3}\right) c^*$, то есть заявленная оценка точности $\frac{2}{3} - \frac{1}{n-3}$ верна. Теорема 3 доказана.

7. АЛГОРИТМ $A_{>1/2}$ ДЛЯ ЗАДАЧИ 2-PSP-MAX-2W

В этом разделе, как и в разделе 3, через H_1^*, H_2^* обозначается пара реберно непересекающихся гамильтоновых циклов, составляющих оптимальное решение задачи

2-PSP-max-2W. Положим $w_i^* = w_i(H_i^*)$, $i = 1, 2$; $w^* = w_1^* + w_2^*$. Для каждого гамильтонова цикла C в G обозначим через w_i^C весовую функцию ребер, которая совпадает с w_i на всех ребрах не из цикла C и равна нулю на всех ребрах из C . Назовем *про-туром* любой частичный тур или гамильтонов цикл в G .

В представленном ниже алгоритме $A_{>1/2}$ в качестве вспомогательной процедуры может использоваться любой известный полиномиальный алгоритм A' для задачи одного коммивояжера на максимум, обладающий гарантированной оценкой точности $L > 2/3$. Примером такого алгоритма может служить разработанный Сердюковым [18] алгоритм с оценкой точности $3/4$, а наилучшей на сегодня оценкой $4/5$ обладает алгоритм из [8]. Трудоемкость этих и многих других приближенных алгоритмов для задачи TSP-max оценивается как $O(n^3)$. При этом важно отметить, что большинство этих алгоритмов корректно работает лишь при условии, что входной граф G является полным. Это не позволяет применить подход, ранее использованный в алгоритме $A_{2/3-\varepsilon}$, при котором цикловое покрытие максимального веса находилось в графе, из которого были удалены ребра другого циклового покрытия. Вместо этого в предложенном здесь алгоритме $A_{>1/2}$ обнуляются веса ребер, принадлежащих некоторому гамильтонову циклу, однако сами эти ребра не удаляются из графа. Оценка точности алгоритма $A_{>1/2}$ является асимптотической, со значениями в пределах от $1/2$ до $4/7$, и зависит от оценки L алгоритма A' для задачи TSP-max (точное значение оценки точности приводится ниже в теореме 4).

Приступим к описанию алгоритма $A_{>1/2}$. Если $n \leq 5$, то с помощью полного перебора находим в графе G два реберно непересекающихся гамильтонова цикла H_1^*, H_2^* , составляющие оптимальное решение задачи 2-PSP-max-2W. Предположим, что $n \geq 6$.

Этап 1.1. Применяя L -приближенный алгоритм A' для задачи TSP-max к графу G с весовой функцией w_1 , находим в G гамильтонов цикл C_1 , имеющий вес $w_1(C_1) \geq Lw_1^*$. Далее применяя тот же алгоритм к графу G с весовой функцией $w_2^{C_1}$, находим гамильтонов цикл F_2' . Если циклы C_1 и F_2' не имеют общих ребер, то полагаем $F_2 = F_2'$ и переходим на Этап 2. Иначе удаляем из F_2' все ребра цикла C_1 и получаем частичный тур $T_2 = F_2' \setminus C_1$, реберно непересекающийся с C_1 и имеющий вес $w_2(T_2) = w_2^{C_1}(F_2')$. Применяя к туру T_2 процедуру из раздела 7.1, преобразуем T_2 в гамильтонов цикл F_2 , не содержащий ребер из C_1 и имеющий вес $w_2(F_2) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_2(T_2) = \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_2^{C_1}(F_2')$.

Этап 1.2. Применяя алгоритм A' к графу G с весовой функцией w_2 , находим в G гамильтонов цикл C_2 веса $w_2(C_2) \geq Lw_2^*$. Далее применяя тот же алгоритм к графу G с весовой функцией $w_1^{C_2}$, находим гамильтонов цикл F_1' . Если циклы C_2 и F_1' не имеют общих ребер, то полагаем $F_1 = F_1'$ и переходим на Этап 2. Иначе формируем частичный тур $T_1 = F_1' \setminus C_2$, реберно непересекающийся с C_2 и имеющий вес $w_1(T_1) = w_1^{C_2}(F_1')$. С помощью процедуры из раздела 7.1 преобразуем тур T_1 в гамильтонов цикл F_1 , не содержащий ребер из C_2 и имеющий вес $w_1(F_1) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1(T_1) = \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1^{C_2}(F_1')$.

Этап 2. Формируем про-тур K_1 , состоящий из всех ребер гамильтонова цикла C_2 , не принадлежащих циклу C_1 , и из всех таких ребер $e \in C_1 \cap C_2$, что $w_1(e) \geq w_2(e)$. Аналогично формируем про-тур K_2 , состоящий из всех ребер цикла C_1 , не принадлежащих C_2 и из всех таких ребер $e \in C_1 \cap C_2$, что $w_2(e) > w_1(e)$. Тогда про-туры K_1 и K_2 не имеют общих ребер, при этом $K_1 \subseteq C_2$, $K_2 \subseteq C_1$ и $K_1 \cup K_2 = C_1 \cup C_2$. Ясно, что пара про-туров K_1, K_2 обладает наибольшим весом $w_1(K_1) + w_2(K_2)$ среди всех таких пар реберно непересекающихся про-туров, что первый из них содержится в C_2 , а второй — в C_1 .

Этап 3. С помощью процедуры из раздела 7.1 преобразуем про-тур K_1 в гамильтонов цикл Z_1 , не содержащий ребер из K_2 и имеющий вес $w_1(Z_1) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1(K_1)$. Далее с помощью той же процедуры преобразуем про-тур K_2 в гамильтонов цикл Z_2 , не содержащий ребер из уже построенного цикла Z_1 и имеющий вес $w_2(Z_2) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_2(K_2)$.

Этап 4. Обозначим через (H_1, H_2) ту из пар реберно непересекающихся гамильтоновых циклов (C_1, F_2) , (F_1, C_2) , (Z_1, Z_2) , которая имеет наибольший вес $w_1(H_1) + w_2(H_2)$. Предъявляем пару циклов (H_1, H_2) в качестве искомого приближенного решения задачи 2-PSP-max-2W.

Основным результатом данного раздела является следующая

Теорема 4. *Представленный выше алгоритм $A_{>1/2}$ находит в полном взвешенном графе $G = G(V, E, w_1, w_2)$ два реберно непересекающихся гамильтоновых цикла H_1, H_2 , для которых выполняется неравенство $w_1(H_1) + w_2(H_2) \geq \frac{2L}{2+L} \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w^*$, где L — оценка точности алгоритма A' , применяемого на Этапах 1.1. и 1.2. Время работы алгоритма $A_{>1/2}$ оценивается как $O(n^3)$, где n — число вершин графа G .*

Доказательство этой теоремы приводится в разделе 7.2.

7.1. Преобразование про-туров в реберно непересекающиеся гамильтоновы циклы.

Описанная в этом разделе процедура получает на вход два реберно непересекающихся про-тура K_1 и K_2 (любой из них может быть гамильтоновым циклом) и преобразует про-тур K_1 в гамильтонов цикл Z_1 , не имеющий общих ребер с K_2 и такой, что $w_1(Z_1) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1(K_1)$. Процедура корректно работает при условии $n \geq 6$.

Если про-тур K_1 является гамильтоновым циклом, то полагаем $Z_1 = K_1$ и завершаем работу. Пусть K_1 является частичным туром в G . Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. Тур K_1 состоит из единственной (гамильтоновой) цепи $P = u_1, u_2, \dots, u_n$. Тогда $|K_1| = n - 1$. Если ребро $u_1 u_n$ не принадлежит про-туру K_2 , то, добавляя это ребро к K_1 , получаем искомым гамильтонов цикл Z_1 .

Пусть $u_1 u_n \in K_2$. Тогда существует не более одной такой вершины $u_i \in V \setminus \{u_1, u_n\}$, что ребро $u_1 u_i$ принадлежит про-туру K_2 , и существует не более одной такой вершины $u_j \in V \setminus \{u_1, u_n\}$, что $u_n u_j \in K_2$. Положим $R = \{u_1 u_2, u_{n-1} u_n, u_{i-1} u_i, u_j u_{j+1}\}$ — это подмножество ребер тура K_1 мощности не более 4. Тогда $|K_1 \setminus R| \geq n - 5$. Выберем во множестве $K_1 \setminus R$ ребро $e = u_{k-1} u_k$ наименьшего веса $w_1(e) \leq w_1(K_1)/(n - 5)$. Удалим ребро e из тура K_1 . Полученный частичный тур $K_1 - e$ состоит ровно из двух цепей: $P_1 = u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$ и $P_2 = u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$. Из условия $e \notin R$ следует, что все четыре вершины u_1, u_{k-1}, u_k, u_n попарно различны и ни одно из ребер $u_1 u_k, u_{k-1} u_n$ не принадлежит ни одному из про-туров K_1, K_2 . Добавляя эти два ребра к туру $K_1 - e$, получаем искомым гамильтонов цикл Z_1 веса $w_1(Z_1) \geq w_1(K_1) - w_1(e) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1(K_1)$.

Случай 2. Тур K_1 состоит из двух цепей: $P_1 = u_1, u_2, \dots, u_k$ и $P_2 = v_1, v_2, \dots, v_l$. Тогда $|K_1| = n - 2$. Если обе цепи P_1 и P_2 являются нетривиальными, то есть $k \geq 2, l \geq 2$, то все вершины u_1, u_k, v_1, v_l попарно различны. Поскольку про-тур K_2 не может содержать цикл $(u_1, v_1, u_k, v_l, u_1)$ длины 4, то хотя бы одно из ребер $u_1 v_1, u_1 v_l, u_k v_1, u_k v_l$ не принадлежит K_2 . Добавляя это ребро к туру K_1 , получаем частичный тур, состоящий ровно из одной цепи, и переходим к Случаю 1.

Пусть какая-то из цепей P_1 или P_2 , скажем P_2 , является синглом в K_1 . Тогда $k = n - 1, l = 1$. Если хотя бы одно ребро $u_1 v_1$ или $u_{n-1} v_1$ не принадлежит K_2 , то добавим это ребро к туру K_1 и снова перейдем к Случаю 1. Пусть $u_1 v_1, u_{n-1} v_1 \in K_2$.

Так как про-тур K_2 не может содержать цикл (u_1, v_1, u_{n-1}, u_1) , то $u_1 u_{n-1} \notin K_2$. Также вершина v_1 несмежна в K_2 ни с одной вершиной $u_2, u_3, \dots, u_{n-2}$. Выберем во множестве $K_1 \setminus \{u_1 u_2, u_{n-2} u_{n-1}\}$ ребро $e = u_{i-1} u_i$ наименьшего веса $w_1(e)$. Так как $|K_1 \setminus \{u_1 u_2, u_{n-2} u_{n-1}\}| = n - 4$, то $w_1(e) \leq w_1(K_1)/(n - 4)$. Частичный тур $K_1 - e$ состоит из трех цепей: $P'_1 = u_1, u_2, \dots, u_{i-1}$, $P''_1 = u_i, u_{i+1}, \dots, u_{n-1}$ и $P_2 = v_1$. При этом ни одно из ребер $u_1 u_{n-1}, u_{i-1} v_1, u_i v_1$ не принадлежит ни одному из про-туров K_1, K_2 . Добавляя эти три ребра к туру $K_1 - e$, получаем искомым гамильтонов цикл Z_1 веса $w_1(Z_1) \geq w_1(K_1) - w_1(e) \geq \left(1 - \frac{1}{n-4}\right) w_1(K_1) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1(K_1)$.

Случай 3. Тур K_1 содержит не менее трех цепей. Так как в про-туре K_2 степень каждой вершины не превосходит 2, то среди ребер графа G , соединяющих концы различных цепей тура K_1 , найдется ребро, не принадлежащее K_2 . Добавим это ребро к туру K_1 . Будем действовать так до тех пор, пока в K_1 не останется ровно две цепи. После этого перейдем к Случаю 2.

Нетрудно убедиться, что время работы описанной процедуры преобразования про-тура K_1 в гамильтонов цикл Z_1 не превосходит $O(n^2)$.

7.2. Доказательство теоремы 4.

Трудоёмкость алгоритма $A_{>1/2}$ определяется временем работы L -приближенного алгоритма A' для задачи TSP-мах на Этапах 1.1 и 1.2. Для большинства известных алгоритмов это время оценивается как $O(n^3)$.

Докажем оценку точности $\frac{2L}{2+L} \left(1 - \frac{1}{n-5}\right)$. Рассмотрим в графе G пару реберно непересекающихся гамильтоновых циклов H_1^*, H_2^* , составляющих оптимальное решение задачи 2-PSP-мах-2W. Тогда $w_1^* = w_1(H_1^*)$, $w_2^* = w_2(H_2^*)$ и $w^* = w_1^* + w_2^*$ — это оптимум задачи 2-PSP-мах-2W. Как было отмечено выше, для найденных алгоритмом A' на Этапах 1.1 и 1.2 гамильтоновых циклов C_1 и C_2 выполняются оценки $w_i(C_i) \geq L w_i^* \geq L \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_i^*$, $i = 1, 2$.

Определим следующие множества ребер (про-туры) в G : $X_1 = H_1^* \setminus C_2$; $Y_1 = H_1^* \cap C_2$; $X_2 = H_2^* \setminus C_1$; $Y_2 = H_2^* \cap C_1$. Для каждого $i = 1, 2$ множества X_i и Y_i образуют разбиение множества ребер гамильтонова цикла H_i^* , а значит, $w_i(X_i) + w_i(Y_i) = w_i^*$, $i = 1, 2$. Рассмотрим в графе G какой-нибудь гамильтонов цикл F_1'' , содержащий все ребра про-тура X_1 . Так как про-тур X_1 не содержит ребер гамильтонова цикла C_2 , то $w_1^{C_2}(F_1'') \geq w_1(X_1)$. Найденный на Этапе 1.2 гамильтонов цикл F_1' получен L -приближенным алгоритмом A' с весовой функцией $w_1^{C_2}$, поэтому $w_1^{C_2}(F_1') \geq L w_1^{C_2}(F_1'') \geq L w_1(X_1)$. Следовательно, для построенного к концу Этапа 1.2 гамильтонова цикла F_1 выполняется оценка $w_1(F_1) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1^{C_2}(F_1') \geq L \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1(X_1)$. Аналогично доказывается, что $w_2(F_2) \geq L \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_2(X_2)$. Отсюда и из доказанных выше неравенств для C_1 и C_2 следует, что $w_1(C_1) + w_2(F_2) \geq L \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) (w_1^* + w_2(X_2))$ и $w_1(F_1) + w_2(C_2) \geq L \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) (w_2^* + w_1(X_1))$.

Из определения про-туров Y_1 и Y_2 следует, что они не имеют общих ребер, так как первый из них содержится в гамильтоновом цикле H_1^* , а второй — в H_2^* , где $H_1^* \cap H_2^* = \emptyset$. Кроме того, про-тур Y_1 содержится в гамильтоновом цикле C_2 , а про-тур Y_2 — в C_1 . На Этапе 2 алгоритма было установлено, что определенная на этом этапе пара про-туров K_1, K_2 имеет наибольший вес $w_1(K_1) + w_2(K_2)$ среди всех таких пар реберно непересекающихся про-туров, что первый из них содержится в C_2 , а второй — в C_1 . Отсюда следует, что $w_1(K_1) + w_2(K_2) \geq w_1(Y_1) + w_2(Y_2)$. Поэтому для построенных на Этапе 3 гамильтоновых циклов Z_1 и Z_2 справедлива оценка $w_1(Z_1) + w_2(Z_2) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) (w_1(K_1) + w_2(K_2)) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) (w_1(Y_1) + w_2(Y_2))$.

Предположим, что заявленная оценка точности алгоритма $A_{>1/2}$ неверна. Тогда для построенных на Этапе 4 гамильтоновых циклов H_1 и H_2 выполняется неравенство

$w_1(H_1) + w_2(H_2) < \frac{2L}{2+L} \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w^*$. Отсюда и из ранее доказанных неравенств следует, что

$$\begin{aligned} \frac{2L}{2+L} \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w^* &> w_1(C_1) + w_2(F_2) \geq L \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) (w_1^* + w_2(X_2)); \\ \frac{2L}{2+L} \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w^* &> w_1(F_1) + w_2(C_2) \geq L \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) (w_2^* + w_1(X_1)); \\ \frac{2L}{2+L} \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w^* &> w_1(Z_1) + w_2(Z_2) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) (w_1(Y_1) + w_2(Y_2)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$w_1^* + w_2(X_2) < \frac{2}{2+L} w^*; \quad w_2^* + w_1(X_1) < \frac{2}{2+L} w^*; \quad w_1(Y_1) + w_2(Y_2) < \frac{2L}{2+L} w^*.$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} 2w^* = w_1^* + w_2^* + w_1^* + w_2^* &= w_1^* + w_2^* + (w_1(X_1) + w_1(Y_1)) + (w_2(X_2) + w_2(Y_2)) = \\ &= (w_1^* + w_2(X_2)) + (w_2^* + w_1(X_1)) + (w_1(Y_1) + w_2(Y_2)) < \left(\frac{2}{2+L} + \frac{2}{2+L} + \frac{2L}{2+L}\right) w^* = 2w^*. \end{aligned}$$

Из полученного противоречия следует, что $w_1(H_1) + w_2(H_2) \geq \frac{2L}{2+L} \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w^*$, то есть заявленная оценка точности $\frac{2L}{2+L} \left(1 - \frac{1}{n-5}\right)$ верна. Теорема 4 доказана.

В заключение заметим, что если на Этапах 1.1 и 1.2 алгоритма $A_{>1/2}$ в качестве вспомогательного L -приближенного алгоритма A' для задачи TSP-мах используется простейший алгоритм с оценкой точности $L = 2/3$, то главный член $\frac{2L}{2+L}$ оценки точности алгоритма $A_{>1/2}$ принимает значение $1/2$, что соответствует оценке алгоритма $A_{1/2}$, описанного в разделе 3. Если в качестве алгоритма A' использовать алгоритм Сердюкова [18] с оценкой $L = 3/4$, то получаем $\frac{2L}{2+L} = \frac{6}{11}$. Наконец, если в качестве A' использовать алгоритм из [8] с рекордной на сегодня оценкой точности $L = 4/5$, то получаем $\frac{2L}{2+L} = 4/7$. Отметим также, что если A' — это точный алгоритм решения задачи TSP-мах, то есть $L = 1$, то $\frac{2L}{2+L} = 2/3$, что является принципиальной верхней границей для оценки точности алгоритма $A_{>1/2}$.

Авторы благодарны анонимному рецензенту за внимательное изучение статьи и сделанные им ценные замечания!

REFERENCES

- [1] A.A. Ageev, A.E. Baburin, E.Kh. Gimadi, *A polynomial algorithm with an accuracy estimate of 3/4 for finding two nonintersecting Hamiltonian cycles of maximum weight*, Discret. Anal. Issled. Oper., Ser. 1, **13**:2 (2006), 11–20. Zbl 1249.05232
- [2] A.A. Ageev, A.V. Pyatkin, *A 2-approximation algorithm for the metric 2-peripatetic salesman problem*, Discret. Anal. Issled. Oper., **16**:4 (2009), 3–20. Zbl 1249.90296
- [3] A.E. Baburin, E.Kh. Gimadi, *On the asymptotic optimality of an algorithm for solving the maximum m -PSP in a multidimensional Euclidean space*, Proc. Steklov Inst. Math., Suppl. 1, **272**, 2011, 1–13. Zbl 1230.65065
- [4] J.B.J.M. de Kort, *Lower bounds for symmetric K -PSP*, Optimization, **22**:1 (1991), 113–122. Zbl 0717.90048
- [5] J.B.J.M. De Kort, *Upper bounds for the symmetric 2-PSP*, Optimization, **23**:4 (1992), 357–367. Zbl 0814.05066
- [6] J.B.J.M. De Kort, *A branch and bound algorithm for symmetric 2-PSP*, Eur. J. Oper. Res., **70**:2 (1993), 229–243. Zbl 0799.90114
- [7] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2000. Zbl 0945.05002

- [8] S. Dudycz, J. Marcinkowski, K. Paluch, B.A. Rybicki, *A 4/5-approximation algorithm for the maximum traveling salesman problem*, in Eisenbrand, Friedrich (ed.) et al., *Integer programming and combinatorial optimization. 19th international conference, IPCO 2017, Waterloo, ON, Canada, June 26–28, 2017. Proceedings*, Lect. Notes Comput. Sci., **10328**, Springer, Cham., 2017, 173–185. Zbl 1418.90222
- [9] H.N. Gabow, *An efficient reduction technique for degree-restricted subgraph and bidirected network flow problems*, Proc. 15th Annu. ACM Symp. Theory of Comput. (Boston, April 25–27, 1983), ACM, New York, 1983, 448–456.
- [10] E.Kh. Gimadi, Yu.V. Glazkov, A.N. Glebov, *Approximation algorithms for solving 2-peripatetic salesman problem on a complete graph with edge weights 1 and 2*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2, **14**:2 (2007), 41–61. Zbl 1249.05364
- [11] A.N. Glebov, A.V. Gordeeva *An algorithm with approximation ratio 5/6 for the metric maximum m-PSP*, In Kochetov Yu. (ed.) et al., *Discrete optimization and operations research. 9th international conference, DOOR 2016*, Lect. Notes Comput. Sci., **9869**, Springer, Cham, 2016, 159–170. Zbl 1392.90096
- [12] A.N. Glebov, A.V. Gordeeva, D.Zh. Zambalaeva, *7/5-approximation algorithm for 2-PSP on minimum with different weight functions*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **8** (2011), 296–309. Zbl 1329.90120
- [13] A.N. Glebov, S.G. Toktokhoeva, *A polynomial algorithm with asymptotic ratio 2/3 for the asymmetric maximization version of the m-PSP*, J. Appl. Ind. Math., **14**:3 (2020), 456–469. Zbl 1495.90152
- [14] A.N. Glebov, D.Zh. Zambalaeva, *Polynomial algorithm with approximation ratio 7/9 for the maximum 2-peripatetic salesman problem*, Discret. Anal. Issled. Oper., **18**:4 (2011), 17–48. Zbl 1249.90300
- [15] A.N. Glebov, D.Zh. Zambalaeva, *An approximation algorithm for the minimum 2-peripatetic salesman problem with different weight functions*, Discret. Anal. Issled. Oper., **18**:5 (2011), 11–37. Zbl 1249.90301
- [16] A.N. Glebov, D.Zh. Zambalaeva, A.A. Skretnova, *A polynomial algorithm with approximation ratio 2/3 for the asymmetric maximum 2-peripatetic salesman problem*, J. Appl. Ind. Math., **9**:1 (2015), 61–67. Zbl 1324.90182
- [17] A.V. Gordeeva, *Polynomial algorithms with guaranteed approximation ratios for the metric maximum 2-PSP*, Graduation thesis of a specialist, Novosibirsk State University, 2010.
- [18] A.I. Serdyukov, *An algorithm with estimation for the travelling salesman maximum problem*, Upr. Sist., **25** (1984), 80–86. Zbl 0569.90089

GLEBOV ALEKSEY NIKOLAEVICH
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
 PR. KOPTYUGA, 4,
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
Email address: angle@math.nsc.ru

LYLOVA SOPHYA SERGEEVNA
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
 PIROGOVA STREET, 2,
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
Email address: sophyal@mail.ru

TOKTOKHOEVA SURENA GARMAZHAPOVNA
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
 PIROGOVA STREET, 2,
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
Email address: s.toktokhoeva@yandex.ru