S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 20, стр. XXX–YYY (2023) УДК
519.168 519.712.3
DOI 10.17377/semi.2023.10.xxx MSC 90C27
05C85 68W25

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ЗАДАЧ О ДВУХ КОММИВОЯЖЕРАХ И О ДВУХ ЦИКЛОВЫХ ПОКРЫТИЯХ НА МАКСИМУМ С ДВУМЯ ВЕСОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

А. Н. ГЛЕБОВ, С. С. ЛЫЛОВА, С. Г. ТОКТОХОЕВА

Abstract. We present new polynomial approximation algorithms for the 2-Perpatetic Salesman Problem and the 2-Cycle Cover Problem. The m-Perpatetic Salesman Problem (m-PSP) is a generalization of the classical Traveling Salesman Problem. In the m-PSP, we need to find m edge disjoint Hamiltonian cycles of the extremal total weight in a complete weighted graph $G = (V, E)$. In the m-Cycle Cover Problem (m-CC), we need to find m edge disjoint cycle covers of the extremal weight in G. Many exact and approximation algorithms were proposed for the case of m-PSP where we are given only one weight function $w : E \to \mathbf{R}^+$ and the weight of m Hamiltonian cycles $H_1, H_2, \ldots, H_m$ is defined as $w(H_1)+\ldots+w(H_m)$. However, not so many results are known for the case when we are given m distinct weight functions $w_1, w_2, \ldots, w_m$ and the weight of $H_1, H_2, \ldots, H_m$ is defined as $w_1(H_1) + w_2(H_2) + \ldots + w_m(H_m)$ (the m-PSP-mW problem). Here we present a series of polynomial algorithms with approximation ratios 1/2 and higher for the 2-PSP-max-2W. As a supporting result, we produce a polynomial algorithm with the asymptotic ratio $\frac{2}{3}$ for the 2-CC-max-2W problem.

Keywords: Traveling Salesman Problem, 2-Perpatetic Salesman Problem, Cycle Cover Problem, approximation algorithm, guaranteed approximation ratio, weight function

---

Glebov A.N., Lylova S.S., Toktokhoeva S. G., Approximation algorithms for 2-PSP-2W-max and 2-CC-2W-max.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0017).

Поступила X декабря 2022 г., опубликована Y октября 2023 г.

1. Введение

Задача об m коммивояжерах (m-Perpatetic Salesman Problem или m-PSP) является естественным обобщением классической задачи коммивояжера (Traveling Salesman Problem или TSP) и состоит в поиске m реберно непересекающихся гамильтоновых циклов с минимальным млм максимальным суммарным весом ребер в полном взвешенном графе $G = (V, E)$. Из результатов работ [4, 5, 6] следует, что все содержательные постановки задачи m-PSP, как на минимум, так и на максимум, являются NP-трудными. Поэтому важное значение имеет разработка полиномиальных приближенных алгоритмов для разных версий этой задачи. За последние 20 лет было предложено множество таких алгоритмов, однако большинство из них относятся к случаю, когда во входном графе $G = (V, E)$ задана всего одна весовая функция ребер $w : E \to \mathbf{R}^+$, которая является общей для всех гамильтоновых циклов $H_1, H_2, \ldots, H_m$, составляющих решение задачи. Это означает, что суммарный вес этих циклов определяется как $w(H_1) + w(H_2) + \ldots + w(H_m)$.

При указанном предположении, для симметричного варианта задачи m-PSP (когда входной граф является неориентированным, а веса ребер удовлетворяют тождеству $w(xy) = w(yx)$) были получены следующие результаты. Агеев и Пяткин [2] разработали полиномиальный 2-приближённый алгоритм для метрической версии задачи 2-PSP-min (когда веса ребер удовлетворяют неравенству треугольника). Для задачи 2-PSP-max с произвольной весовой функцией в [1, 14] были построены полиномиальные алгоритмы с гарантированными оценкамии 3/4 и 7/9. В [10] было получено несколько полиномиальных приближенных алгоритмов, включая алгоритм с оценкой точности 6/5, для специального случая задачи 2-PSP-min, когда веса ребер принимают значения 1 и 2 (задача 2-PSP(1,2)-min). Для метрического варианта задачи m-PSP-max (при произвольном m) в [11] был разработан полиномиальный алгоритм с гарантированной оценкой 5/6, а для евклидовой задачи m-PSP-max в [3] был получен асимптотически точный полиномиальный алгоритм. Для несимметричного варианта задачи m-PSP-max (когда входной граф является ориентированным) в [13] был построен полиномиальный алгоритм с асимптотической оценкой точности 2/3.

Гораздо меньше результатов было получено для задачи m-PSP в случае, когда во входном графе $G = (V, E)$ задано m весовых функций $w_1, w_2, \ldots, w_m : E \to \mathbf{R}^+$, а суммарный вес гамильтоновых циклов $H_1, H_2, \ldots, H_m$ определяется как $w_1(H_1) + w_2(H_2) + \ldots + w_m(H_m)$ (так называемая задача m-PSP-mW). Так в работах [12, 15] исследовалась постановка задачи 2-PSP-min-2W с весами ребер 1 и 2 и были предложены полиномиальные алгоритмы с оценками точности 7/5 [12] и 4/3 [15]. В [17] для метрической задачи 2-PSP-max-2W был получен полиномиальный алгоритм с асимптотической оценкой 11/16. При этом ни в одной из ранее опубликованных работ ни при каком $m \geq 2$ не был предложен полиномиальный алгоритм с гарантированной оценкой точности в наиболее общем случае задачи m-PSP-mW, когда весовые функции $w_1, w_2, \ldots, w_m$ принимают произвольные неотрицательные значения.

В настоящей статье впервые получена серия полиномиалных приближенных алгоритмов с оценками точности 1/2 и выше для задачи 2-PSP-max-2W а также для связанной с ней задачи о двух реберно непересекающихся цикловых покрытиях максимального суммарного веса в графе с двумя весовыми функциями (задача 2-CC-max-2W).

В разделе 2 статьи вводятся необходимые определения и обозначения. В разделах 3 и 4 описываются полиномальные 1/2-приближенные алгоритмы для задачи 2-PSP-max-2W в ее симметричной и несимметричной постановках соответственно. Раздел 5 посвящен обоснованию того, что оценка точности 1/2 полученных выше алгоритмов является неулучшаемой в определенном смысле. В разделе 6 разработан полиомиальный приближенный алгоритм для задачи 2-CC-max-2W с асимптотической оценкой точности $\frac{2}{3}$. В заключительном разделе 7, основываясь на методах и подходах из раздела 6, построен полиномиальный алгоритм для задачи 2-PSP-max-2W, оценка точности которого превышает $1/2$.

Отметим, что задача об m реберно непересекающихся цикловых покрытиях максимального веса в графе с одной весовой функцией (задача m-CC-max) является полиономиально разрешимой при любом значении m. Однако сложностной статус задачи m-CC-max-mW при $m \geq 2$ нам не известен.

2. Основные определения и обозначения

Пусть $G = G(V, E, w_1, w_2)$ — полный неориентированный или ориентированный граф с n вершинами и неотрицательными весовыми функциями ребер (дуг) $w_1 : E \to \mathbb{R}^+$ и $w_2 : E \to \mathbb{R}^+$. Для каждого подграфа G' графа (орграфа) G через $w(G')$ обозначается суммарный вес ребер (дуг), составляющих G'.

Для каждой вершины $v \in V$ (ор)графа G через $d(v)$ обозначим *степень вершины* v, то есть количество инцидентных v ребер (дуг). В случае ориенитрованного графа G будем также использовать следующие обозначения:

$d^+(v)$ — *полустепень исхода* — количество исходящих из v дуг;

$d^-(v)$ — *полустепень захода* — количество входящих в v дуг;

Ясно, что $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$ для любой вершины $v \in V$.

Подграф G' неориентированного графа G называется *k-регулярным*, если для каждой его вершины v выполняется равенство $d(v) = k$. Подграф G' ориентированного графа G будем называть *(k, k)-регулярным*, если для каждой его вершины v выполняются равенства $d^+(v) = d^-(v) = k$. *Цикловым покрытием* или *2-фактором* (*ориентированным 2-фактором*) в неориентированном (ориентированном) графе G называется любой его остовный 2-регулярный ((1,1)-регулярный) подграф, то есть набор из вершинно непересекающихся циклов (контуров), покрывающих все вершины G.

Частичным туром T в графе (орграфе) G назовем набор вершинно непересекающихся (ориентированных) цепей, покрывающих все вершины G. *Смешанным туром* в (ор)графе) G назовем набор вершинно непересекающихся (ориентированных) цепей и циклов, покрывающих все вершины G. При этом некоторые цепи могут состоять из одной вершины; будем называть такие цепи (*синглами*), а цепи, состоящие из более чем одной вершины — *нетривиальными* цепями. Через $|T|$ и $p(T)$ обозначается число ребер и число цепей в смешанном туре T, соответственно. Ясно, что для любого смешанного тура T выполнятся равенство:$|T| + p(T) = |V(G)|$.

Заметим, что любой частичный тур T в графе (орграфе) G можно дополнить до (ориентированного) гамильтонова цикла H, добавляя к T ребра (дуги), соединяющие концевые вершины цепей тура T. При этом, в силу неотрицательности весовых функций w_1 и w_2, справедлмвы неравенства $w_1(H) \geq w_1(T)$ и $w_2(H) \geq w_2(T)$. Также очевидно, что из любого циклового покрытия или смешанного тура Z (ор)графа G можно получить частичный тур T, удаляя из Z часть ребер (хотя бы по одному ребру из каждого цикла в Z). При этом выполняются неравенства $w_1(T) \leq w_1(Z)$ и $w_2(T) \leq w_2(Z)$.

Двудольной моделью орграфа G назовем двудольный неориентированный граф B с долями $V = V(G)$ и V', где V' — множество дубликатов всех вершин орграфа G, и $\{X, Y'\} \in E(B) \Leftrightarrow (X, Y) \in E(G)$.

Симметричная (несимметричная) задача о двух коммивояжёрах на максимум с двумя различным весовыми функциями обозначается через 2-PSP-max-2W (2-APSP-max-2W) и заключается в нахождении двух непересекающихся по ребрам (дугам) (ориентированных) гамильтоновых циклов H_1, H_2 в графе (орграфе) G, для которых суммарный вес составляющих их ребер (дуг) максимален:

$$w_1(H_1) + w_2(H_2) \to \max$$

(в ориентированном случае допускается, что цикл H_i содержит дугу (X,Y), а цикл H_j содержит встречную дугу (Y,X)). Через w^* будем обозначать вес оптимального решения задачи 2-PSP-max-2W (2-APSP-max-2W).

Далее в статье приводится описание и анализ приближенных алгоритмов $A_{1/2}$ и $\widetilde{A}_{1/2}$ для задач 2-PSP-max-2W и 2-APSP-max-2W. Основная идея обоих алгоритмов заключается в нахождении в графе двух цикловых покрытий максимального веса относительно весовых функций w_1 и w_2 соответственно и последующем преобразовании этих покрытий в два реберно непересекающихся гамильтоновых цикла, составляющих искомое $\frac{1}{2}$-приближенное решение задачи.

3. Алгоритм $A_{1/2}$ для задачи 2-PSP-max-2W

Если $n \leq 14$, то с помощью полного перебора находим в графе G два непересекающихся по ребрам гамильтоновых цикла H_1^*, H_2^*, составляюших оптимальное решением задачи 2-PSP-max-2W. Предположим, что $n \geq 15$.

Этап 1. С помощью алгоритма Габова из [9] находим в графе G цикловое покрытие C_1, имеющее наибольший вес $w_1(C_1)$. Далее с помощью того же алгоритма находим в G цикловое покрытие C_2, имеющее наибольший вес $w_2(C_2)$. Поскольку каждый из гамильтоновых циклов H_1^* и H_2^* является цикловым покрытием G, то выполняются неравенства $w_1(C_1) \geq w_1(H_1^*)$ и $w_2(C_2) \geq w_2(H_2^*)$. Следовательно, $w_1(C_1) + w_2(C_2) \geq w^*$. При этом цикловые покрытия C_1 и C_2 могут иметь общие ребра.

Этап 2. Удалим из цикловых покрытий C_1 и C_2 часть ребер, применяя алгоритм удаления ребер, описанный в разделе 3.1. В результате получим два реберно-непересекающихся частичных тура T_1, T_2, для веса которых справедливо неравенство

$$w_1(T_1) + w_2(T_2)) \geq \frac{1}{2} w_1(C_1) + w_2(C_2)) \geq \frac{1}{2} w^*.$$

При этом каждый из туров T_1, T_2 состоит не менее чем из трех цепей, и длина любой его цепи не превосходит 5.

Этап 3. Используя процедуру $T \to H$, описанную в разделе 3.2 и основанную на процедуре $T^{3n} \to H$ из работы [10], дополняем тур T_1 до гамильтонова цикла H_1, не имеющего общих ребер с туром T_2. Далее с помощью той же процедуры $T \to H$ дополняем тур T_2 до гамильтонова цикла H_2, не используя ребер из уже построенного цикла H_1. Предъявляем пару реберно непересекающихся гамильтоновых циклов H_1 и H_2 в качестве искомого 1/2-приближенного решения задачи 2-PSP-max-2W.

Основные свойства данного алгоритма описываются следующей теоремой.

Теорема 1. *Представлнный выше алгоритм $A_{1/2}$ находит в полном взвешенном неориентированном графе $G = (V, E, w_1, w_2)$ два реберно непересекающихся гамильтоновых цикла H_1, H_2, суммарный вес которых удовлетворяет неравенству $w_1(H_1) + w_2(H_2) \geq \frac{1}{2} w^*$. Время работы алгоритма $A_{1/2}$ оценивается как $O(n^3)$, где n — число вершин графа G.*

Доказательство этой теоремы приводится в разделе 3.3.

3.1. **Процедура построения частичных туров.**

Процедура получает на вход два цикловых покрытия C_1 и C_2 с максимальным суммарным весом относительно функций w_1 и w_2 соответственно. Далее происходит удаление части ребер из C_1 и C_2 с целью получения реберно непересекающихся частичных туров T_1 и T_2 необходимого веса.

Назовём ребро графа G *двойным*, если оно входит в оба цикловых покрытия C_1 и C_2, и *одиночным*, если оно принадлежит только одному из этих покрытий.

Процедура удаления двойных ребер.

Рассмотрим в графе G подграф D с множеством вершин V и множеством всех двойных ребер G. Ясно, что D является подграфом каждого из цикловых покрытий C_1 и C_2. Следовательно, D — это смешанный тур в G.

Рассмотрим произвольную компоненту связности P (цепь или цикл) в D. Пусть $P = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k$, где $v_k = v_0$, если P является циклом. Определим две суммы весов ребер:

$$W_1 = w_2(e_1) + w_1(e_2) + w_2(e_3) + w_1(e_4) + \ldots$$

$$W_2 = w_1(e_1) + w_2(e_2) + w_1(e_3) + w_2(e_4) + \ldots$$

Если $W_1 > W_2$, то удалим из C_1 ребра $e_1, e_3, e_5, \ldots$, а из C_2 удалим ребра $e_2, e_4, e_6, \ldots$. Если $W_2 \geq W_1$, то удалим из C_1 ребра $e_2, e_4, e_6, \ldots$, а из C_2 удалим ребра $e_1, e_3, e_5, \ldots$. В результате в каждом из цикловых покрытий C_1, C_2 будет удалено каждое второе ребро цепи (цикла) P, а суммарный вес всех удаленных ребер не превосходит $\frac{1}{2}(W_1 + W_2) = \frac{1}{2}(w_1(P) + w_2(P))$. При этом для каждого $i = 1, 2$, все не удаленные из C_i ребра цепи (цикла) P попарно несмежны, за исключением, возможно, пары ребер e_1, e_k, в случае, когда P является циклом нечетной длины k.

Процедура удаления одиночных ребер.

Рассмотрим произвольный цикл C в C_1. Обозначим через $U = e_1, e_2, e_3, \ldots, e_t$ последовательность всех одиночных ребер из C, где ребра обозначены в порядке их обхода по циклу. Определим две суммы весов ребер:

$$W_1 = w_1(e_1) + w_1(e_3) + w_1(e_5) + \ldots$$

$$W_2 = w_1(e_2) + w_1(e_4) + w_1(e_6) + \ldots$$

Если $W_1 > W_2$, то удалим из C_1 ребра $e_2, e_4, e_6, \ldots$. Если $W_2 \geq W_1$, то удалим из C_1 ребра $e_1, e_3, e_5, \ldots$. Заметим, что сумма весов всех удаленных одиночных ребер цикла C не превосходит $\frac{1}{2}w_1(U)$. Аналогично поступим с каждым циклом из C_1 и из C_2, при этом ребра из C_2 будем рассматривать относительно весеовой функции w_2.

Лемма 1. *В результате применения процедур удаления двойных и одиночных ребер цикловые покрытия C_1 и C_2 преобразуются в реберно непересекающиеся частичные туры T_1 и T_2. Длина любой цепи в каждом из туров T_1, T_2 не превосходит 5. При этом выполняется неравенство*

$$w_1(T_1) + w_2(T_2) \geq \frac{1}{2}(w_1(C_1) + w_2(C_2)) \geq \frac{1}{2}w^*.$$

Доказательство. Из описания процедур сразу следует, что T_1 и T_2 — это смешанные туры в G, не содержащие общих ребер, для которых выполняется требуемое неравенство. Докажем, что T_1 и T_2 являются частичными турами. Для этого достаточно убедиться, что из каждого цикла C в каждом из цикловых покрытий C_1, C_2 удаляется хотя бы одно ребро. Действительно, если цикл C содержит хотя бы два одиночных ребра, то одно из них удаляется процедурой удаления одиночных ребер. В противном случае C содержит цепь из $|C| - 1 \geq 2$ двойных ребер, и хотя бы одно из них удаляется процедурой удаления двойных ребер.

Остается доказать, что длина любой цепи в каждом из туров T_1, T_2 не превосходит 5. Пусть P — произвольная цепь из T_1 (для цепи из T_2 доказательство аналогично). Рассмотрим в цикловом покрытии C_1 цикл $C = (v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_0)$, содержащий цепь P. Если все ребра C изначально были двойными, то после процедуры удаления двойных рёбер цепь P может содержать только одно или два ребра (а именно, ребра $e_1 = v_0v_1$ и $e_k = v_{k-1}v_0$, в случае нечетного k). Пусть цикл C содержит хотя бы одно одиночное ребро. Без потери общности, можно считать, что ребро $e_1 = v_0v_1$ является одиночным. Из процедур удаления ребер следует, что в цепи P не может быть двух последовательных двойных рёбер и есть только одно или два одиночных ребра, а именно, ребра $e_1 = v_0v_1$ и $e_t = v_{j-1}v_j$ при нечетном t. Если цепь P содержит только одно одиночное ребро $v_{i-1}v_i$, то она может содержать еще только два двойных ребра:

$v_{i-2}v_{i-1}$ и v_iv_{i+1}. В этом случае длина P не превосходит 3. Если же цепь P содержит одиночные ребра $e_1 = v_0v_1$ и $e_t = v_{j-1}v_j$, то она может содержать еще только три двойных ребра: $v_{j-2}v_{j-1}$, v_jv_0 и v_1v_2 (при $j = k-1$). В этом случае длина цепи P не превосходит 5. Лемма 1 доказана.

3.2. **Процедура $T \to H$ замыкания частичного тура в гамильтонов цикл.** В статье [10] была описана процедура, которая, получая на вход частичный тур T и частичный тур или гамильтонов цикл S, не имеющий общих ребер с T, за время $O(n)$ дополняет тур T до гамильтонова цикла H, не имеющего общих ребер с S. Условием корректной работы этой процедуры является наличие в туре T не менее трех нетривиальных цепей. Поэтому сначала мы добьемся того, чтобы каждый из построенных на Этапе 2 алгоритма частичных туров T_1, T_2 содержал не менее трех нетривиальных цепей.

Согласно лемме 1 каждая цепь в T_1 и T_2 содержит не более шести вершин. Из неравенства $n \geq 15$ следует, что число цепей в каждом из туров T_1 и T_2 не меньше трех. Если хотя бы три из этих цепей являются нетривиальными, то получаем требуемое. Если тур T_1 содержит только две нетривиальные цепи, то общее число вершин в этих цепях не больше 12, а значит, T_1 содержит по крайней мере $15 - 12 = 3$ сингла. Поскольку в туре T_2 нет треугольников, то какие-то два из этих синглов не соединены ребром в T_2. Добавляя ребро между ними к туру T_1, получаем третью нетривиальную цепь в T_1. Если тур T_1 содержит только одну нетривиальную цепь, то в нем есть не менее 15˘6 = 9 синглов, из которых можно составить две тройки синглов, и в каждой тройке соединить какие-то два сингла ребром. В результате получаем три нетривиальных цепи в туре T_1. Аналогично поступаем с туром T_2.

Теперь, когда каждый из туров T_1, T_2 содержит хотя бы по три нетривиальных цепи, при помощи упомянутой выше процедуры из [10], дополняем частичный тур T_1 до гамильтонова цикла H_1, не имеющего общих ребер с туром T_2. Далее при помощи той же процедуры дополняем тур T_2 до гамильтонова цикла H_2, не имеющего общих ребер с уже построенным циклом H_1. В итоге получаем два реберно непересевающихся гамильтоновых цикла H_1 и H_2, составляющих искомое приближенное решение задачи 2-PSP-max-2W.

3.3. **Доказательство теоремы 1.** Из неравенства в лемме 1, неотрицательности весовых функций w_1, w_2 и того факта, что построеннные процедурой $T \to H$ гамильтоновы циклы H_1 и H_2 содержат все ребра частичных туров T_1 и T_2 соответственно, следует, что

$$w_1(H_1) + w_2(H_2) \geq w_1(T_1) + w_2(T_2) \geq \frac{1}{2}w^*.$$

Трудоемкость алгоритма $A_{1/2}$ опредеяется временем работы алгоритма Габова на Этапе 1, которое оценивается как $O(n^3)$. Теорема 1 доказана.

4. Алгоритм $\widetilde{A}_{1/2}$ для задачи 2-APSP-max-2W

Приведенный ниже алгоритм$\widetilde{A}_{1/2}$ основан на тех же идеях, что и алгоритм $A_{1/2}$ для задачи 2-PSP-max-2W, но имеет ряд отличий.

Если $n \leq 18$, то с помощью полного перебора находим в орграфе G два непересекающихся по ребрам ориентированных гамильтоновых цикла H_1, H_2, являющиеся оптимальным решением задачи 2-APSP-max-2W. Предположим, что $n > 18$.

Этап 1. Находим в G два ориентированных цикловых покрытия C_1 и C_2 с максимальным суммарным весом дуг относительно функций w_1 и w_2 соответственно. Для поиска C_1 и C_2 используем двудольную модель B орграфа G, в которой за время $O(n^3)$ находим два совершенных паросочетания максимального веса относительно каждой из весовых функций. Найденным паросочетаниям в B соответствуют искомые цикловые покрытия C_1 и C_2 максимального веса в G.

Этап 2. Используя процедуру "Построение ориентированных частичных туров", описанную в разделе 4.1, выделим в $C_1 \bigcup C_2$ два реберно непересекающихся частичных тура T_1, T_2, суммарный вес которых удовлетворяет неравенству:

$$w_1(T_1) + w_2(T_2) \geq \frac{1}{2}(w_1(C_1) + w_2(C_2)) \geq \frac{1}{2}w^*.$$

Этап 3. При помощи процедуры "Замыкание ориентированных частичных туров в гамильтоновы циклы", описанной в разделе 4.2, дополним полученные на Этапе 2 частичные туры T_1, T_2 до реберно непресекающихся ориентированных гамильтоновых циклов H_1, H_2, суммарный вес которых удовлетворяет неравенству:

$$w_1(H_1) + w_2(H_2) \geq w_1(T_1) + w_2(T_2) \geq \frac{1}{2}w^*.$$

Предъявляем пару гамильтоновых циклов H_1, H_2 в качестве искомого приближенного решения задачи 2-APSP-max-2W.

Основным результатом данного раздела статьи являются следующая

Теорема 2. *Представлнный выше алгоритм $\widetilde{A}_{1/2}$ находит в полном взвешенном ориентированном графе $G = (V, E, w_1, w_2)$ два реберно непересекающихся ориентированных гамильтоновых цикла H_1, H_2, суммарный вес которых удовлетворяет неравенству $w_1(H_1) + w_2(H_2) \geq \frac{1}{2}w^*$. Время работы алгоритма $A_{1/2}$ оценивается как $O(n^3)$, где n — число вершин орграфа G.*

Доказательство теоремы 2 приводится в разделе 4.3. В разделе 5 доказыается, что в рамках используемого нами подхода оценка точности 1/2 алгоритмов $A_{1/2}$ и $\widetilde{A}_{1/2}$ является неулучшаемой.

4.1. **Построение ориентированных частичных туров.**

Процедура получает на вход два ориентированных цикловых покрытия C_1 и C_2 с максимальным суммарным весом относительно функций w_1 и w_2 соответственно. Далее процедура строит частичные туры необходимого веса путем удаления дуг из цикловых покрытий C_1 и C_2.

Назовём дугу $e = (x, y)$ *двойной*, если она входит в оба цикловых покрытия C_1 и C_2, и *одиночной*, если она входит только в одно из покрытий. Назовем двойную дугу $e = (x, y)$ *сингулярной относительно* C_i, если встречная дуга $e' = (y, x)$ принадлежит цикловому покрытию C_i, то есть если C_i содержит цикл (x, e, y, e', x) длины 2. Назовем сингулярную дугу $e = (x, y)$ *2-сингулярной*, если встречная дуга $e' = (y, x)$ принадлежит обоим цикловым покрытиям C_1 и C_2, и *1-сингулярной*, если e' принадлежит только одному из покрытий C_1 или C_2. Назовем дугу $e = (x, y)$ циклового покрытмя C_i *квазиодиночной*, если она либо одиночная, либо 1-сингулярная относительно C_{3-i}. В последнем случае дуги $e' = (y, x)$ и $e'' = (x, y)$ покрытия C_{3-i} будем называть *дополняющими* (для e).

Процедура удаления двойных дуг.

Определим орграф D как остовный подграф в G, состоящий из всех 2-сингулярных двойных дуг и всех двойных дуг, не являющихся сингулярными. Ясно, что каждая компонента связности D является цепью или циклом. Пусть $P = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k$, v_k —- произвольная компонента связности в D, где $v_k = v_0$, если P является циклом.

Если P содержит 2-сингулярную дугу $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, то каждое из цикловых покрытий C_1 и C_2 содержит обе дуги $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ и $e'_i = (v_i, v_{i-1})$, а значит, содержит цикл $Z = (v_{i-1}, e_i, v_i, e'_i, v_{i-1})$ длины 2. Отсжда следует, что $k = 2$, $i = 1$ и $P = Z = (v_0, e_1, v_1, e'_1, v_0)$. Если $w_1(e_1) + w_2(e'_1) < w_2(e_1) + w_1(e'_1)$, то удалим из C_1 дугу e_1, а из C_2 удалим дугу e'_1. В противном случае удалим из C_1 дугу e'_1, а из C_2 удалим дугу e_1.

Пусть P не содержит 2-сингулярных (а значит, и вообще сингулярных) дуг. Определим две суммы весов дуг:

$$W_1 = w_2(e_1) + w_1(e_2) + w_2(e_3) + w_1(e_4) + \dots$$
$$W_2 = w_1(e_1) + w_2(e_2) + w_1(e_3) + w_2(e_4) + \dots$$

Если $W_1 > W_2$, то удалим из C_1 дуги $e_1, e_3, e_5, \dots$, а из C_2 удалим дуги $e_2, e_4, e_6, \dots$. Если $W_2 \geq W_1$, то удалим из C_1 дуги $e_2, e_4, e_6, \dots$, а из C_2 удалим дуги $e_1, e_3, e_5, \dots$. В результате в каждом из цикловых покрытий C_1, C_2 будет удалена каждая вторая дуга цепи (цикла) P, а суммарный вес всех удалённых дуг не превосходит $\frac{1}{2}(W_1 + W_2) = \frac{1}{2}(w_1(P) + w_2(P))$.

Процедура удаление квазиодиночных и дополняющих дуг.

Рассмотрим по отдельности каждый цикл C покрытия C_1. Если C состоит только из двойных дуг, то C принадлежит также цикловому покрытию C_2, а значит, является компонентой связности в орграфе D. В этом случае удаление дуг из C выполняется согласно процедуре удаления двойных дуг.

Пусть цикл C содержит хотя бы одну одиночную дугу. Обозначим через $U = e_1, e_2, e_3, \dots, e_t$ последовательность всех квазиодиночных дуг из C, где дуги обозначены в порядке их обхода по циклу. Для каждой 1-сингулярной дуги $e_i = (u, v)$ обозначим через $e'_i = (v, u)$ и $e''_i = (u, v)$ дополняющие ее дуги циклового покрытия C_2. Для каждой одиночной дуги e_j из U также формально введем обозначения e'_j и e''_j, считая e'_j и e''_j фиктивными дугами и полагая $w_2(e'_j) = w_2(e''_j) = 0$. Определим две суммы весов дуг:

$$W_1 = (w_1(e_1) + w_2(e'_1)) + w_2(e''_2) + (w_1(e_3) + w_2(e'_3)) + w_2(e''_4) + \dots$$
$$W_2 = w_2(e''_1) + (w_1(e_2) + w_2(e'_2)) + w_2(e''_3) + (w_1(e_4) + w_2(e'_4)) + \dots$$

Если $W_1 > W_2$, то удалим из C_1 дуги $e_2, e_4, e_6, \dots$, а из C_2 удалим дуги $e''_1, e'_2, e''_3, e'_4, \dots$. Если $W_2 \geq W_1$, то удалим из C_1 дуги $e_1, e_3, e_5, \dots$, а из C_2 удалим дуги $e'_1, e''_2, e'_3, e''_4, \dots$ (разумеется, речь идет об удалении из C_2 только реально существующих дуг, дополняющих 1-сингулярные дуги цикла C).

Заметим, что сумма весов всех удаленных дуг не превосходит $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}(w_1(e_i) + w_2(e'_i) + w_2(e''_i))$, то есть не превосходит полусуммы весов всех квазиодиночных и дополняющих дуг для цикла C. Применим описанную процедуру к каждому циклу из C_1 и C_2.

Лемма 2. *В результате процедур удаления двойных, квазиодиночных и дополняющих дуг цикловые покрытия C_1 и C_2 преобразуются в реберно непересекающиеся частичные туры T_1 и T_2. Длина любой цепи в каждом из туров T_1, T_2 не превосходит 5. При этом выполняется неравенство*

$$w_1(T_1) + w_2(T_2) \geq \frac{1}{2}(w_1(C_1) + w_2(C_2)) \geq \frac{1}{2}w^*.$$

Доказательство. Из описания процедур следует, что T_1 и T_2 — это смешанные туры без общих дуг, для веса которых выполняется требуемое неравенство. Докажем, что T_1 и T_2 являются частичными турами, то есть из каждого цикла C в каждом из цикловых покрытий C_1, C_2 удаляется хотя бы одна дуга. Если цикл C имеет длину не меньше 3 и содержит хотя бы две квазиодиночные дуги, то одна из них удаляется процедурой удаления квазиодиночных и дополняющих дуг. Если C имеет длину не меньше 3 и содержит не более одной квазиодиночной дуги, то C содержит цепь из $|C| - 1 \geq 2$ двойных дуг, хотя бы одна из которых удаляется процедурой удаления двойных дуг. Пусть C — цикл длины 2 в C_i. Если обе дуги в C являются одиночными, то одна из них удаляется процедурой удаления квазиодиночныхи дополняющих дуг. Если ровно одна дуга в C является одиночной, то цикл C состоит из двух дополняющих дуг для некоторой 1-сингулярной дуги покрытия C_{3-i}. В этом случае одна из дуг цикла C также удаляется процедурой удаления квазиодиночныхи и дополняющих дуг. Наконец, если цикл C образован двумя двойными дугами, то обе они являются 2-сингулярными, а значит, одна из них удаляется процедурой удаления двойных дуг.

Остается доказать, что длина любой цепи в каждом из туров T_1, T_2 не превосходит 5. Пусть P — цепь из T_1, и пусть $C = (v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_0)$ — цикл из C_1 длины $k > 2$, содержащий P. Если цикл C состоит только из двойных дуг, то после процедуры удаления двойных дуг цепь P будет содержать только одну или две дуги ($e_1 = (v_0, v_1)$ и $e_k = (v_{k-1}, v_0)$, в случае нечетного k). Пусть C содержит одиночную дугу $e_1 = (v_0, v_1)$. Из процедур удаления двойных и квазиодиночных дуг следует, что в цепи P не может быть двух последовательных двойных дуг и может быть всего одна или две квазиодиночные дуги, а именно, дуги $e_1 = (v_0, v_1)$ и $e_t = (v_{j-1}, v_j)$ при нечетном t. Отсюда аналогично доказательству леииы 1 выводится, что длина цепи P не превосходит 5. Лемма 2 доказана.

4.2. **Замыкание ориентированных частичных туров в гамильтоновы циклы.**
В статье [16] была описана процедура, которая, получая на вход ориентированный частичный тур T и ориентированный частичный тур или гамильтонов цикл S, не имеющий общих дуг с T, за время $O(n)$ дополняет тур T до ориентированного гамильтонова цикла H, не имеющего общих дуг с S. Условием корректной работы этой процедуры является наличие в туре T не менее четырех цепей (среди которых могут быть синглы).

Так как $n > 18$, и по лемме 2 каждая цепь туров T_1 и T_2 содержит не более шести вершин, то каждый из этих туров состоит не менее чем из четырех цепей. Применяя процедуру из [16], сперва дополняем частичный тур T_1 до ориентированного гамильтонова цикла H_1, не имеющего общих дуг с туром T_2. Далее при помощи той же процедуры дополняем тур T_2 до ориентированного гамильтонова цикла H_2, не имеющего общих дуг с уже построенным циклом H_1. В итоге получаем два ориентированных гамильтоновых цикла H_1 и H_2 без общих дуг, составляющих искомое приближенное решение задачи 2-APSP-max-2W.

4.3. **Доказательство теоремы 2.**
Из неравенства в лемме 2, неотрицательности весовых функций w_1, w_2 и того факта, что построеннные гамильтоновы циклы H_1 и H_2 содержат все дуги частичных туров T_1 и T_2 соответственно, следует, что

$$w_1(H_1) + w_2(H_2) \geq w_1(T_1) + w_2(T_2) \geq \frac{1}{2} w^*.$$

Трудоемкость алгоритма $A_{1/2}$ опредеяется временем отысканя ориентированных цикловых покрытий C_1, C_2 на Этапе 1, которое оценивается как $O(n^3)$. Теорема 2 доказана.

5. "Неулучшаемость" оценки точности 1/2

Нетрудно заметить, что если в качестве верхней границы для веса оптимального решения в задачах 2-PSP-max-2W и 2-APSP-max-2W использовать величину $w_1^* + w_2^*$, где w_1^* и w_2^* — это оптимумы для задачи о максимальном цикловом покрытии с весовыми функциями w_1 и w_2 соответственно (как это делается выше при анализе алгоритмов $A_{1/2}$ и $\widetilde{A}_{1/2}$), то полученную оценку точности 1/2 относительно этой верхней границы улучшить невозможно.

Действительно, рассмотрим входной граф (орграф) $G = (V, E, w_1, w_2)$, где $w_1 = w_2$, и веса всех ребер некоторого (ориентированного) гамильтонова цикла H равны 1, а веса всех остальных ребер графа равны нулю. В этом случае справедливы равенства $w_1^* = w_2^* = n$, причем единственным максимальным цикловым покрытием относительно любой из весовых функций является гамильтонов цикл H. При этом для веса оптимального решения задачи 2-PSP-max-2W (2-APSP-max-2W) также выполняется равенство $w^* = n$, поскольку в графе G только ребра цикла H имеют ненулевой вес, равный 1, и каждое из этих ребер может принадлежать только одному из гамильтоновых циклов, составляющих оптимальное решение задачи 2-PSP-max-2W (2-APSP-max-2W). Поэтому для веса оптимального решения выполняется равенство $w^* = \frac{1}{2}(w_1^* + w_2^*) = n$, что не позволяет получить для задач 2-PSP-max-2W и 2-APSP-max-2W приближенных алгоритмов с оценками точности выше 1/2 по отношению к сумме $w_1^* + w_2^*$. Приведенный пример показывает, что данный вывод остается в силе и в том случае, если в качестве w_1^* и w_2^* рассматривать оптимумы для задачи коммивояжера TSP-max с весовыми функциями w_1 и w_2 соответственно.

Сделанное замечание указывает на ограниченность использованного нами подхода, при котором алгоритм на первом этапе независимо находит два (пересекающихся по ребрам) максимальных цикловых покрытия для весовых функций w_1 и w_2, а затем использует эти покрытия для построения приближенного решения задачи 2-PSP-max-2W (2-APSP-max-2W). При этом в качестве верхней границы для веса оптимального решения используется сумма $w_1^* + w_2^*$. Чтобы преодолеть это ограничение, мы переходим к разработке приближенного алгоритма для задачи 2-CC-max-2W, который находит в графе два *реберно непересекающихся* цикловых покрытия C_1 и C_2, и к разработке основанного на аналогичных идеях алгоритма для задачи 2-PSP-max-2W с оценкой точности, превышающей 1/2.

6. Алгоритм $A_{2/3-\varepsilon}$ для задачи 2-CC-max-2W

В этом разделе через C_1^* и C_2^* обозначаются два реберно непересекающихся цикловых покрытия во входном графе G, составляющие оптимальное решение задачи 2-CC-max-2W. Положим $c_1^* = w_1(C_1^*)$ и $c_2^* = w_2(C_2^*)$. Тогда вес оптимального решения задачи 2-CC-max-2W равен $c^* = c_1^* + c_2^*$.

В приведенном ниже алгоритме используется тот факт, что полиномиальный алгоритм поиска циклового покрытия максимального веса корректно работает не только для полного входного графа, но и для произвольного.

Если $n \leq 9$, то с помощью полного перебора находим в графе G два реберно непересекающихся цикловых покрытия C_1^*, C_2^*, составляющие оптимальное решением задачи 2-CC-max-2W. Предположим, что $n \geq 10$.

Этап 1.1. Находим в графе G цикловое покрытие C_1, имеющее наибольший вес $w_1(C_1)$. Удаляем из G все ребра покрытия C_1, и в полученном графе $G \setminus C_1$ находим цикловое покрытие F_2, имеющее наибольший вес $w_2(F_2)$. В результате получаем пару реберно непересекающихся цикловых покрытий C_1, F_2 в G, причем $w_1(C_1) \geq c_1^*$.

Этап 1.2. Находим в G цикловое покрытие C_2, имеющее наибольший вес $w_2(C_2)$. Удаляем из G все ребра покрытия C_2, и в полученном графе $G \setminus C_2$ находим цикловое покрытие F_1, имеющее наибольший вес $w_1(F_1)$. Тем самым получаем пару реберно непересекающихся цикловых покрытий F_1, C_2, причем $w_2(C_2) \geq c_2^*$.

Этап 2. Формируем смешанный тур K_1, состоящий из всех ребер циклового покрытия C_2, не принадлежащих C_1, и из всех таких ребер $e \in C_1 \cap C_2$, что $w_1(e) \geq w_2(e)$. Аналогично формируем смешанный тур K_2, состоящий из всех ребер покрытия C_1, не принадлежащих C_2 и из всех таких ребер $e \in C_1 \cap C_2$, что $w_2(e) > w_1(e)$. Из данного определения следует, что K_1 и K_2 — это два реберно непересекающихся смешанных тура в G, где $K_1 \subseteq C_2$, $K_2 \subseteq C_1$ и $K_1 \cup K_2 = C_1 \cup C_2$. Также нетрудно понять, что пара туров K_1, K_2 обладает наибольшим реберным весом $w_1(K_1) + w_2(K_2)$ среди всех таких пар реберно непересекающихся смешанных туров, что первый из них целиком содержится в C_2, а второй — в C_1.

Этап 3. Применяя процедуру, описанную в разделе 6.1, преобразуем смешанный тур K_1 в цикловое покрытие Z_1, не содержащее ребер тура K_2 и имеющее вес $w_1(Z_1) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$. Далее с помощью той же процедуры преобразуем тур K_2 в цикловое покрытие Z_2, не содержащее ребер из уже построенного покрытия Z_1 и имкющее вес $w_2(Z_2) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_2(K_2)$.

Этап 4. Обозначим через (J_1, J_2) ту из пар реберно непересекающихся цикловых покрытий (C_1, F_2), (F_1, C_2), (Z_1, Z_2), которая имеет наибольший вес $w_1(J_1) + w_2(J_2)$. Предъявляем пару цикловых покрытий (J_1, J_2) в качестве искомого приближенного решения задачи 2-CC-max-2W.

Основным результатом данного раздела статьи является следующая

Теорема 3. *Представлннный выше алгоритм $A_{2/3-\varepsilon}$ находит в полном взвешенном графе $G = G(V, E, w_1, w_2)$ два реберно непересекающихся цикловых покрытия J_1, J_2, для веса которых выполняется неравенство $w_1(J_1) + w_2(J_2) \geq \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{n-3}\right) c^*$. Время работы алгоритма $A_{2/3-\varepsilon}$ оценивается как $O(n^3)$, где n — число вершин графа G.*

Доказательство этой теоремы приводится в разделе 6.2.

6.1. **Преобразование смешанных туров в реберно непересекающиеся цикловые покрытия.**

Описанная в этом разделе процедура получает на вход два реберно непересекающихся смешанных тура K_1 и K_2 (в частности, любой из этих туров может быть цикловым покрытием в G) и преобразует тур K_1 в цикловое покрытие Z_1, не имеющее общих ребер с K_2 и такое, что $w_1(Z_1) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$. Процедура корректно работает при условии $n \geq 10$.

Далее нам понадобится следующая

Лемма 3. *Пусть T — смешанный тур во взвешенном графе $G = (V, E, w)$. Если тур T содержит $t \geq 6$ ребер, то в T найдутся также два несмежных ребра e и e', что $w(e) + w(e') \leq 2w(T)/t$.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный граф L, вершинами которого являются все ребра тура T, при этом в графе L две вершины смежны, если соответствующие им ребра тура T несмежны в G (иными словами L — это дополнение реберного графа $L(T)$ тура T). Так как каждое ребро тура T смежно не более чем с двумя другими ребрами из T, то степень каждой вершины графа L не меньше $(t-1)-2 = t-3$. Поскольку $t - 3 \geq t/2$ при $t \geq 6$, по теореме Дирака (см. разд. 10 в [7]) граф L содержит гамильтонов цикл $H = (e_1, e_2, \ldots, e_t, e_1)$. Рассмотрим в туре T пары несмежных ребер $(e_1, e_2), (e_2, e_3), \ldots, (e_{t-1}, e_t), (e_t, e_1)$. Поскольку суммарный вес ребер во всех этих парах равен $2(w(e_1) + w(e_2) + \ldots + w(e_t)) = 2w(T)$, то выбирая в качестве (e, e') ту из указанных пар ребер, которая имеет наименьший вес, получаем искомую оценку $w(e) + w(e') \leq 2w(T)/t$. Лемма 3 доказана.

Для каждой вершины $x \in V$ обозначим через $K_i(x)$ множество всех ребер тура K_i, инцидентных вершине x. Ясно, что $|K_i(x)| \leq 2$. Будем полагать $K_i(x) = \emptyset$, если в графе G отсутствует вершина x.

Приступим к описанию процедуры. Если смешанный тур K_1 состоит только из циклов, то он является искомым цикловым покрытием Z_1. Предположим, что K_1 содержит хотя бы одну цепь. Рассмотим следующие случаи.

Случай 1. Тур K_1 содержит ровно одну цепь $P = u_1, u_2, \ldots, u_k$ (здесь и далее в обозначениях для цепи указывается только последовательность ее вершин). Тогда

$|K_1| = n-1$. Если $k \geq 3$ и ребро u_1u_k не принадлежит туру K_2, то, добавляя это ребро к туру K_1, получим искомое цикловое покрытие Z_1.

Пусть $k \geq 3$ и $u_1u_k \in K_2$. Существует не более одной такой вершины $x \in V$, что оба ребра xu_1 и xu_k принадлежат туру K_2 (в этом случае в K_2 имеется цикл (x, u_1, u_k, x) длины 3). Положим $R = K_1(x) \cup \{u_1u_2, u_2u_3, u_{k-2}u_{k-1}, u_{k-1}u_k\}$ — это подмножество ребер тура K_1 мощности не более 6. Тогда $|K_1 \setminus R| \geq n-7$. Выберем во множестве $K_1 \setminus R$ ребро $e = yz$ наименьшего веса. Тогда $w_1(e) \leq w_1(K_1)/(n-7)$. Удалим ребро e из тура K_1. Тогда полученный тур $K_1 - e$ содержит ровно две цепи, концевыми вершинами которых являются u_1, u_k, y, z в каком-то порядке. Из условий $e \notin R$ и $u_1u_k \in K_2$ следует, что все вершины u_1, u_k, y, z попарно различны, тур K_1 не содержит ни одного из ребер yu_1, yu_k, zu_1, zu_k и хотя бы одна пара ребер yu_1, zu_k или yu_k, zu_1 не содержит ребра из K_2. Добавляя эту пару ребер к туру $K_1 - e$, получаем искомое цикловое покрытие Z_1 веса $w_1(Z_1) \geq w_1(K_1) - w_1(e) \geq \left(1 - \frac{1}{n-7}\right) w_1(K_1) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$.

Пусть $k = 2$. Определим множество ребер R, состоящее из ребра u_1u_2 и все таких ребер $uv \in K_1$, что в туре K_2 имеется хотя бы два ребра, соединяющих вершины из $\{u, v\}$ с вершинами из $\{u_1, u_2\}$. Так как в турах K_1 и K_2 каждая вершина имеет степень не больше 2, то $|R| \leq 5$. Тогда $|K_1 \setminus R| \geq n-6$. Выберем во множестве $K_1 \setminus R$ ребро $e = yz$ наименьшего веса $w_1(e) \leq w_1(K_1)/(n-6)$. Удалим ребро e из тура K_1. Полученный тур $K_1 - e$ содержит ровно две цепи, одной из которых является $P = u_1u_2$, а вторая цепь получается из какого-то цикла тура K_1 удалением ребра $e = yz$. Из условия $e \notin R$ следует, что тур K_1 не содержит ни одного из ребер yu_1, yu_2, zu_1, zu_2 и хотя бы одна пара ребер yu_1, zu_2 или yu_2, zu_1 не включает ребер из K_2. Добавляя эту пару ребер к туру $K_1 - e$, получаем искомое цикловое покрытие Z_1 веса $w_1(Z_1) \geq w_1(K_1) - w_1(e) \geq \left(1 - \frac{1}{n-6}\right) w_1(K_1) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$.

Пусть $k = 1$, то есть цепь $P = u_1$ является синглом в K_1. Существует не более двух вершин $x_1, x_2 \in V$, смежных в туре K_2 с вершиной v_1. Положим $R = K_1(x_2) \cup K_1(x_2)$ — это подмножество ребер тура K_1 мощности не более 4. Тогда $|K_1 \setminus R| \geq n-5$. Выберем во множестве $K_1 \setminus R$ ребро $e = yz$ наименьшего веса $w_1(e) \leq w_1(K_1)/(n-5)$. Тогда тур $K_1 - e$ содержит ровно две цепи, одной из которых является $P = u_1$, а вторая цепь получается из какого-то цикла в K_1 удалением ребра $e = yz$. Из условия $e \notin R$ следует, что никакое из ребер yu_1, zu_1 не принадлежит ни одному из туров K_1, K_2. Добавляя ребра yu_1 и zu_1 к туру $K_1 - e$, получаем искомое цикловое покрытие Z_1 веса $w_1(Z_1) \geq w_1(K_1) - w_1(e) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1(K_1) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$.

Случай 2. $p(K_1) = 2$, то есть тур K_1 содержит две цепи $P_1 = u_1, u_2, \ldots, u_k$ и $P_2 = v_1, v_2, \ldots, v_l$. Тогда $|K_1| = n-2$. Если хотя бы одно из ребер $u_1v_1, u_1v_l, u_kv_1, u_kv_l$ не принадлежит туру K_2, то добавим это ребро к туру K_1. В результате получим смешанный тур веса не меньше $w_1(K_1)$, содержащий ровно одну цепь. Преобразуем этот тур в цикловое покрытие Z_1, как описано в Случае 1. Далее будем считать, что все ребра $u_1v_1, u_1v_l, u_kv_1, u_kv_l$ принадлежат туру K_2. Если $k \geq 3$ и ребро u_1u_k не принадлежит K_2, то добавляя это ребро к туру K_1 и переходя к Случаю 1, получим искомое цикловое покрытие Z_1. Аналогинчо рассматривается случай, когда $l \geq 3$ и $v_1v_l \notin K_2$. Поскольку в туре K_2 каждая из вершин u_1, u_k, v_1, v_l имеет степень не больше 2, то остается рассмотреть только следующме два подслучая.

Случай 2.1. Одна из цепей P_1 или P_2 является синглом в K_1. Можно считать, что $P_2 = v_1$. В этом случае $u_1v_1 \in K_2$, $u_kv_1 \in K_2$ и если $k \geq 3$, то $u_1u_k \in K_2$. При $k \geq 2$ полагаем $R = \{u_1u_2, u_{k-1}u_k\}$, а при $k = 1$ выберем такую вершину $x \in V \setminus \{u_1, v_1\}$, что $xu_1 \in K_2$ и $xv_1 \in K_2$, и положим $R = K_1(x)$ (если такая вершина x существует, то она единственна). В обоих случаях имеем $|R| \leq 2$ и $|K_1 \setminus R| \geq n-4 \geq 6$.

По лемме 3 смешанный тур $K_1 \setminus R$ содержит такие два несмежных ребра $e_1 = y_1z_1$ и $e_2 = y_2z_2$, что $w_1(e_1) + w_1(e_2) \le \frac{2}{n-4} w_1(K_1 \setminus R) \le \frac{2}{n-4} w_1(K_1)$. Удалим из K_1 ребра e_1 и e_2. Так как они несмежны между собой, то все вершины y_1, y_2, z_1, z_2 попарно различны. При этом из определения множества R и условия $e_1, e_2 \notin R$ следует, что $\{y_1, y_2, z_1, z_2\} \cap \{u_1, u_k, v_1\} = \emptyset$. Если $k \ge 2$, то в туре K_2 вершинна v_1 несмежна с вершинами из множества $\{y_1, y_2, z_1, z_2\}$, а каждая из вершин u_1, u_k смежна не более чем с одной вершиной из этого множества (поскольку $u_1v_1 \in K_2$ и $u_kv_1 \in K_2$). Без потери общности будем считать, что в туре K_2 вершины u_1 и u_k несмежны с вершинами y_1 и y_2 соответственно. Добавляя к туру $K_1 \setminus \{e_1, e_2\}$ ребра $u_1y_1, u_ky_2, v_1z_1, v_1z_2$, получаем искомое цикловое покрытие Z_1 веса $w_1(Z_1) \ge w_1(K_1) - (w_1(e_1) + w_1(e_2)) \ge \left(1 - \frac{2}{n-4}\right) w_1(K_1) \ge \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$. Пусть $k = 1$. Тогда $u_1v_1 \in K_2$ и в туре K_2 каждая из вершин u_1, v_1 смежна не более чем с одной вершиной из множества $\{y_1, y_2, z_1, z_2\}$. Так как $e_1, e_2 \notin R$, то ни одна из вершин $y_1, y_2.z_1, z_2$ не может быть смежна в K_2 одновременно с обеими вершинами u_1 и v_1. Поэтому можно считать, что в туре K_2 вершина u_1 смежна только с v_1 и y_1, а v_1 смежна только с u_1 и y_2. Добавляя к туру $K_1 \setminus \{e_1, e_2\}$ ребра $u_1y_2, u_1z_2, v_1y_1, v_1z_1$, получаем искомое цикловое покрытие Z_1 веса $w_1(Z_1) \ge \left(1 - \frac{2}{n-4}\right) w_1(K_1) \ge \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$.

Случай 2.2. $k = l = 2$, то есть $P_1 = u_1u_2$, $P_2 = v_1v_2$. При этом ребра $u_1v_1, u_1v_2, u_2v_1, u_2v_2$ принадлежат туру K_2. Это означает, что в туре K_2 имеется цикл $(u_1, v_1, u_2, v_2, u_1)$ длины 4. По лемме 3 смешанный тур $K_1 \setminus \{u_1v_1, u_2v_2\}$ содержит такие два несмежных ребра $e_1 = y_1z_1$ и $e_2 = y_2z_2$, что $w_1(e_1) + w_1(e_2) \le \frac{2}{n-4} w_1(K_1 \setminus \{u_1v_1, u_2v_2\}) \le \frac{2}{n-4} w_1(K_1)$. Удалим из тура K_1 ребра e_1 и e_2. Так как ни одно из этих ребер не принадлежит множеству $\{u_1v_1, u_2v_2\}$, то $\{y_1, y_2, z_1, z_2\} \cap \{u_1, u_2, v_1, v_2\} = \emptyset$. Из наличия в туре K_2 цикла $(u_1, v_1, u_2, v_2, u_1)$ следует, что ни одна из вершин u_1, u_2, v_1, v_2 не смежна в K_2 с вершинами из множества $\{y_1, y_2, z_1, z_2\}$. Добавляя к туру $K_1 \setminus \{e_1, e_2\}$ ребра $u_1y_1, u_2z_1, v_1y_2, v_2z_2$, получим искомое цикловое покрытие Z_1 веса $w_1(Z_1) \ge \left(1 - \frac{2}{n-4}\right) w_1(K_1) \ge \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$.

Случай 3. $p(K_1) = 3$, то есть тур K_1 содержит три цепи $P_1 = u_1, u_2, \ldots, u_k$, $P_2 = v_1, v_2, \ldots, v_l$ и $P_3 = w_1, w_2, \ldots, w_m$. Тогда $|K_1| = n - 3$. Если хотя бы одно из чисел k, l, m не равно 1, скажем, $m > 1$, то какое-то из ребер u_1v_1, u_1w_1, u_1w_m не принадлежит туру K_2. Добавляя это ребро к туру K_1, получаем смешанный тур, содержащий ровно две цепи, после чего переходим к Случаю 2.

Пусть $k = l = m = 1$. Тогда все три цепи тура K_1 являются синглами, а в туре K_2 имеется цикл $(u_1, v_1.w_1, u_1)$ длины 3 (иначе снова можно перейти к Случаю 2). Удалим из тура K_1 три ребра $e_1 = y_1z_1$, $e_2 = y_2z_2$ и $e_3 = y_3z_3$ наименьшего веса (сейчас мы допускаем, что среди этих ребер могут быть смежные, то есть среди вершин $y_1, z_1, y_2, z_2, y_3, z_3$ могут быть повторяющиеся). Тогда $w_1(e_1) + w_1(e_2) + w_1(e_3) \le \frac{3}{n-3} w_1(K_1)$. Добавляя к туру $K_1 \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$ ребра $u_1y_1, u_1z_1, v_1y_2, v_1z_2, w_1y_3, w_1z_3$, получим искомое цикловое покрытие Z_1 веса $w_1(Z_1) \ge \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$.

Случай 4. $p(K_1) \ge 4$, то есть тур K_1 содержит не менее четырех цепей. В этом случае среди ребер графа G, соединяющих концы различных цепей тура K_1, найдется ребро, не принадлежащее туру K_2. Добавим это ребро к туру K_1. Будем действовать так до тех пор, пока в K_1 не останется ровно три цепи. После этого перейдем к Случаю 3.

Нетрудно убедиться, что время работы описанной процедуры преобразования смешанного тура K_1 в цикловое покрытие Z_1 не превосходит $O(n^2)$.

6.2. **Доказательство теоремы 3.**

Трудоемкость алгоритма $A_{2/3-\varepsilon}$ определяется временем отыскания цикловых покрытий C_1, C_2, F_1, F_2 на Этапах 1.1 и 1.2, которое оценивается как $O(n^3)$.

Докажем оценку точности $\frac{2}{3} - \frac{1}{n-3}$. Рассмотрим в графе G пару реберно непересекающихся цикловых покрытий C_1^*, C_2^*, составляющих оптимальное решение задачи 2-CC-max-2W. Согласно ранее введенным обозначениям имеем $c_1^* = w_1(C_1^*)$, $c_2^* = w_2(C_2^*)$ и $c^* = c_1^* + c_2^*$ — это оптимум задачи 2-CC-max-2W. Тогда для найденных алгоритмом на Этапах 1.1 и 1.2 цикловых покрытий C_1 и C_2 справедливы оценки $w_i(C_i) \geq c_i^*$, $i = 1, 2$.

Определим следующие множества ребер (смешанные туры) в G: $X_1 = C_1^* \setminus C_2$; $Y_1 = C_1^* \cap C_2$; $X_2 = C_2^* \setminus C_1$; $Y_2 = C_2^* \cap C_1$. Тогда для каждого $i = 1, 2$ множества X_i и Y_i образуют разбиение множества ребер циклового покрытия C_i^*, что влечет равенства $w_i(X_i) + w_i(Y_i) = c_i^*$, $i = 1, 2$.

Заметим, что множество ребер X_1 представляет из себя смешанный тур в графе $G \setminus C_2$, а построенное на Этапе 1.2 алгоритма цикловое покрытие F_1 также содержится в этом графе и имеет в нем наибольший вес $w_1(F_1)$. Так как смешанный тур X_1 с помощью процедуры, описанной в разделе 6.1, можно преобразовать в цикловое покрытие F_1', реберно непересекающееся с C_2 (то есть содержащееся в графе $G \setminus C_2$) и имеющее вес $w_1(F_1') \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(X_1)$, то для веса максимального циклового покрытия F_1 в $G \setminus C_2$ выполняется оценка $w_1(F_1) \geq w_1(F_1') \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(X_1)$. Аналогично доказывается, что $w_2(F_2) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_2(X_2)$.

Из определения смешанных туров Y_1 и Y_2 следует, что они не имеют общих ребер, так как первый из них содержатся в цикловом покрытии C_1^*, а второй — в C_2^*, где $C_1^* \cap C_2^* = \emptyset$. Кроме того, тур Y_1 содержится в цикловом покрытии C_2, а тур Y_2 — в C_1. На Этапе 2 алгоритма было установлено, что определенная на этом этапе пара смешанных туров K_1, K_2 имеет наибольший вес $w_1(K_1) + w_2(K_2)$ среди всех таких пар реберно непересекающихся смешанных туров, что первый из них содержится в C_2, а второй — в C_1. Отсюда следует, что $w_1(K_1) + w_2(K_2) \geq w_1(Y_1) + w_2(Y_2)$. Поэтому для построенных на Этапе 3 цикловых покрытий Z_1 и Z_2 справедлива оценка $w_1(Z_1) + w_2(Z_2) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right)(w_1(K_1) + w_2(K_2)) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right)(w_1(Y_1) + w_2(Y_2))$.

Предположим, что заявленная оценка точности алгоритма $A_{2/3-\varepsilon}$ неверна. Тогда для построенных на Этапе 4 цикловых покрытий J_1 и J_2 справедливо неравенство $w_1(J_1) + w_2(J_2) < \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{n-3}\right) c^*$. Из определения покрытий J_1 и J_2, следует, что $w_1(C_1) + w_2(F_2) < \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{n-3}\right) c^*$, $w_1(F_1) + w_2(C_2) < \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{n-3}\right) c^*$ и $w_1(Z_1) + w_2(Z_2) < \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{n-3}\right) c^*$. Складывая последние три неравенства и используя ранее полученные соотношения, приходим к следующей цепочке неравенств:

$$\left(2 - \frac{3}{n-3}\right) c^* > (w_1(C_1) + w_2(C_2)) + (w_1(F_1) + w_2(F_2)) + (w_1(Z_1) + w_2(Z_2)) \geq$$

$$(c_1^* + c_2^*) + \left(1 - \frac{3}{n-3}\right)(w_1(X_1) + w_2(X_2)) + \left(1 - \frac{3}{n-3}\right)(w_1(Y_1) + w_2(Y_2)) =$$

$$c^* + \left(1 - \frac{3}{n-3}\right)(w_1(X_1) + w_1(Y_1)) + w_2(X_2) + w_2(Y_2)) =$$

$$c^* + \left(1 - \frac{3}{n-3}\right)(c_1^* + c_2^*) = c^* + \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) c^* = \left(2 - \frac{3}{n-3}\right) c^*.$$

Из полученного противоречия следует, что $w_1(J_1) + w_2(J_2) \geq \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{n-3}\right) c^*$, то есть заявленная оценка точности $\frac{2}{3} - \frac{1}{n-3}$ верна. Теорема 3 доказана.

7. Алгоритм $A_{>1/2}$ для задачи 2-PSP-max-2W

В этом разделе, как и в разделе 3, через H_1^*, H_2^* обозначается пара реберно непересекающихся гамильтоновых циклов, составляющих оптимальное решение задачи

2-PSP-max-2W. Положим $w_i^* = w_i(H_i^*)$, $i = 1, 2$; $w^* = w_1^* + w_2^*$. Для каждого гамильтонова цикла C в G обозначим через w_i^C весовую функцию ребер, которая совпадает с w_i на всех ребрах не из цикла C и равна нулю на всех ребоах из C. Назовем *протуром* любой частичный тур или гамильтонов цикл в G.

В представленном ниже алгоритме $A_{>1/2}$ в качестве вспомогательной процедуры может использоваться любой известный полиномиальный алгоритм A' для задачи одного коммивояжера на максимум, обладающий гарантированной оценкой точности $L > 2/3$. Примером такого алгоритма может служить разработанный Сердюковым [18] алгоритм с оценкой точности $3/4$, а наилучшей на сегодня оценкой $4/5$ обладает алгоритм из [8]. Трудоемкость этих и многих других приближенных алгоритмов для задачи TSP-max оценивается как $O(n^3)$. При этом важно отметить, что большинство этих алгоритмов корректно работает лишь при условии, что входной граф G является полным. Это не позволяет применить подход, ранее использованный в алгоритме $A_{2/3-\varepsilon}$, при котором цикловое покрытие максимального веса находилось в графе, из которого были удалены ребра другого циклового покрытия. Вместо этого в предложенном здесь алгоритме $A_{>1/2}$ обнуляются веса ребер, принадлежащих некоторому гамильтонову циклу, однако сами эти ребра не удаляются из графа. Оценка точности алгоритма $A_{>1/2}$ является асимптотической, со значениями в пределах от $1/2$ до $4/7$, и зависит от оценки L алгоритма A' для задачи TSP-max (точное значение оценки точности приводится ниже в теореме 4).

Приступим к описанию алгоритма $A_{>1/2}$. Если $n \leq 5$, то с помощью полного перебора находим в графе G два реберно непересекающихся гамильтонова цикла H_1^*, H_2^*, составляющие оптимальное решение задачи 2-PSP-max-2W. Предположим, что $n \geq 6$.

Этап 1.1. Применяя L-приближенный алгоритм A' для задачи TSP-max к графу G с весовой функцией w_1, находим в G гамильтонов цикл C_1, имеющий вес $w_1(C_1) \geq Lw_1^*$. Далее применяя тот же алгоритм к графу G с весовой функцией $w_2^{C_1}$, находим гамильтонов цикл F_2'. Если циклы C_1 и F_2' не имеют общих ребер, то полагаем $F_2 = F_2'$ и переходим на Этап 2. Иначе удаляем из F_2' все ребра цикла C_1 и получаем частичный тур $T_2 = F_2' \setminus C_1$, реберно непересекающийся с C_1 и имеющий вес $w_2(T_2) = w_2^{C_1}(F_2')$. Применяя к туру T_2 процедуру из раздела 7.1, преобразуем T_2 в гамильтонов цикл F_2, не содержащий ребер из C_1 и имеющий вес $w_2(F_2) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_2(T_2) = \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_2^{C_1}(F_2')$.

Этап 1.2. Применяя алгоритм A' к графу G с весовой функцией w_2, находим в G гамильтонов цикл C_2 веса $w_2(C_2) \geq Lw_2^*$. Далее применяя тот же алгоритм к графу G с весовой функцией $w_1^{C_2}$, находим гамильтонов цикл F_1'. Если циклы C_2 и F_1' не имеют общих ребер, то полагаем $F_1 = F_1'$ и переходим на Этап 2. Иначе формируем частичный тур $T_1 = F_1' \setminus C_2$, реберно непересекающийся с C_2 и имеющий вес $w_1(T_1) = w_1^{C_2}(F_1')$. С помощью процедуры из раздела 7.1 преобразуем тур T_1 в гамильтонов цикл F_1, не содержащий ребер из C_2 и имеющий вес $w_1(F_1) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1(T_1) = \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1^{C_2}(F_1')$.

Этап 2. Формируем про-тур K_1, состоящий из всех ребер гамильтонова цикла C_2, не принадлежащих циклу C_1, и из всех таких ребер $e \in C_1 \cap C_2$, что $w_1(e) \geq w_2(e)$. Аналогично формируем про-тур K_2, состоящий из всех ребер цикла C_1, не принадлежащих C_2 и из всех таких ребер $e \in C_1 \cap C_2$, что $w_2(e) > w_1(e)$. Тогда протуры K_1 и K_2 не имеют общих ребер, при этом $K_1 \subseteq C_2$, $K_2 \subseteq C_1$ и $K_1 \cup K_2 = C_1 \cup C_2$. Ясно, что пара про-туров K_1, K_2 обладает наибольшим весом $w_1(K_1) + w_2(K_2)$ среди всех таких пар реберно непересекающихся про-туров, что первый из них содержится в C_2, а второй — в C_1.

Этап 3. С помощтю процедуры из раздела 7.1 преобразуем про-тур K_1 в гамильтонов цикл Z_1, не содержащий ребер из K_2 и имеющий вес $w_1(Z_1) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1(K_1)$. Далее с помощью той же процедуры преобразуем про-тур K_2 в гамильтонов цикл Z_2, не содержащий ребер из уже построенного цикла Z_1 и имкющий вес $w_2(Z_2) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_2(K_2)$.

Этап 4. Обозначим через (H_1, H_2) ту из пар реберно непересекающихся гамильтоновых циклов (C_1, F_2), (F_1, C_2), (Z_1, Z_2), которая имеет наибольший вес $w_1(H_1) + w_2(H_2)$. Предъявляем пару циклов (H_1, H_2) в качестве искомого приближенного решения задачи 2-PSP-max-2W.

Основным результатом данного раздела является следующая

Теорема 4. *Представлнннный выше алгоритм $A_{>1/2}$ находит в полном взвешенном графе $G = G(V, E, w_1, w_2)$ два реберно непересекающихся гамильтоновых цикла H_1, H_2, для которых выполняется неравенство $w_1(H_1)+w_2(H_2) \geq \frac{2L}{2+L}\left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w^*$, где L — оценка точности алгоритма A', применяемого на Этапах 1.1. и 1.2. Время работы алгоритма $A_{>1/2}$ оценивается как $O(n^3)$, где n — число вершин графа G.*

Доказательство этой теоремы приводится в разделе 7.2.

7.1. **Преобразование про-туров в реберно непересекающиеся гамильтоновы циклы.**

Описанная в этом разделе процедура получает на вход два реберно непересекающихся про-тура K_1 и K_2 (любой из них может быть гамильтоновым циклом) и преобразует про-тур K_1 в гамильтонов цикл Z_1, не имеющий общих ребер с K_2 и такой, что $w_1(Z_1) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1(K_1)$. Процедура корректно работает при условии $n \geq 6$.

Если про-тур K_1 является гамильтоновым циклом, то полагаем $Z_1 = K_1$ и завершаем работу. Пусть K_1 является частичным туром в G. Рассмотим следующие случаи.

Случай 1. Тур K_1 состоит из единственной (гамильтоновой) цепи $P = u_1, u_2, \ldots, u_n$. Тогда $|K_1| = n - 1$. Если ребро u_1u_n не принадлежит про-туру K_2, то, добавляя это ребро к K_1, получаем искомый гамильтонов цикл Z_1.

Пусть $u_1u_n \in K_2$. Тогда существует не более одной такой вершины $u_i \in V \setminus \{u_1, u_n\}$, что ребро u_1u_i принадлежит про-туру K_2, и существует не более одной такой вершины $u_j \in V \setminus \{u_1, u_n\}$, что $u_nu_j \in K_2$. Положим $R = \{u_1u_2, u_{n-1}u_n, u_{i-1}u_i, u_ju_{j+1}\}$ — это подмножество ребер тура K_1 мощности не более 4. Тогда $|K_1 \setminus R| \geq n - 5$. Выберем во множестве $K_1 \setminus R$ ребро $e = u_{k-1}u_k$ наименьшего веса $w_1(e) \leq w_1(K_1)/(n-5)$. Удалим ребро e из тура K_1. Полученный частичный тур $K_1 - e$ состоит ровно из двух цепей: $P_1 = u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$ и $P_2 = u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$. Из условия $e \notin R$ следует, что все четыре вершины u_1, u_{k-1}, u_k, u_n попарно различны и ни одно из ребер $u_1u_k, u_{k-1}u_n$ не принадлежит ни одному из про-туров K_1, K_2. Добавляя эти два ребра к туру $K_1 - e$, получаем искомый гамильтонов цикл Z_1 веса $w_1(Z_1) \geq w_1(K_1) - w_1(e) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1(K_1)$.

Случай 2. Тур K_1 состоит из двух цепей: $P_1 = u_1, u_2, \ldots, u_k$ и $P_2 = v_1, v_2, \ldots, v_l$. Тогда $|K_1| = n-2$. Если обе цепи P_1 и P_2 являются нетривиальными, то есть $k \geq 2, l \geq 2$, то все вершины u_1, u_k, v_1, v_l попарно различны. Поскольку про-тур K_2 не может содержать цикл $(u_1, v_1, u_k, v_l, u_1)$ длины 4, то хотя бы одно из ребер $u_1v_1, u_1v_l, u_kv_1, u_kv_l$ не принадлежит K_2. Добавляя это ребро к туру K_1, получаем частичный тур, состоящий ровно из одной цепи, и переходим к Случаю 1.

Пусть какая-то из цепей P_1 или P_2, скажем P_2, является синглом в K_1. Тогда $k = n - 1$, $l = 1$. Если хотя бы одно ребро u_1v_1 или $u_{n-1}v_1$ не принадлежит K_2, то добавим это ребро к туру K_1 и снова перейдем к Случаю 1. Пусть $u_1v_1, u_{n-1}v_1 \in K_2$.

Так как про-тур K_2 не может содержать цикл (u_1, v_1, u_{n-1}, u_1), то $u_1u_{n-1} \notin K_2$. Также вершина v_1 несмежна в K_2 ни с одной вершиной $u_2, u_3, \ldots, u_{n-2}$. Выберем во множестве $K_1 \setminus \{u_1u_2, u_{n-2}u_{n-1}\}$ ребро $e = u_{i-1}u_i$ наименьшего веса $w_1(e)$. Так как $|K_1 \setminus \{u_1u_2, u_{n-2}u_{n-1}\}| = n-4$, то $w_1(e) \le w_1(K_1)/(n-4)$. Частичный тур $K_1 - e$ состоит из трех цепей: $P_1' = u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}$, $P_1'' = u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{n-1}$ и $P_2 = v_1$. При этом ни одно из ребер $u_1u_{n-1}, u_{i-1}v_1, u_iv_1$ не принадлежит ни одному из про-туров K_1, K_2. Добавляя эти три ребра к туру $K_1 - e$, получаем искомый гамильтонов цикл Z_1 веса $w_1(Z_1) \ge w_1(K_1) - w_1(e) \ge \left(1 - \frac{1}{n-4}\right) w_1(K_1) \ge \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1(K_1)$.

Случай 3. Тур K_1 содержит не менее трех цепей. Так как в про-туре K_2 степень каждой вершины не превосходит 2, то среди ребер графа G, соединяющих концы различных цепей тура K_1, найдется ребро, не принадлежащее K_2. Добавим это ребро к туру K_1. Будем действовать так до тех пор, пока в K_1 не останется ровно две цепи. После этого перейдем к Случаю 2.

Нетрудно убедиться, что время работы описанной процедуры преобразования протура K_1 в гамильтонов цикл Z_1 не превосходит $O(n^2)$.

7.2. **Доказательство теоремы 4.**
Трудоемкость алгоритма $A_{>1/2}$ определяется временем работы L-приближенного алгоритм A' для задачи TSP-max на Этапах 1.1 и 1.2. Для большинства известных алгоритмов это время оценивается как $O(n^3)$.

Докажем оценку точности $\frac{2L}{2+L}\left(1 - \frac{1}{n-5}\right)$. Рассмотрим в графе G пару реберно непересекающихся гамильтоновых циклов H_1^*, H_2^*, составляющих оптимальное решение задачи 2-PSP-max-2W. Тогда $w_1^* = w_1(H_1^*)$, $w_2^* = w_2(H_2^*)$ и $w^* = w_1^* + w_2^*$ — это оптимум задачи 2-PSP-max-2W. Как было отмечено выше, для найденных алгоритмом A' на Этапах 1.1 и 1.2 гамильтоновых циклов C_1 и C_2 выполняются оценки $w_i(C_i) \ge Lw_i^* \ge L\left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_i^*$, $i = 1, 2$.

Определим следующие множества ребер (про-туры) в G: $X_1 = H_1^* \setminus C_2$; $Y_1 = H_1^* \cap C_2$; $X_2 = H_2^* \setminus C_1$; $Y_2 = H_2^* \cap C_1$. Для каждого $i = 1, 2$ множества X_i и Y_i образуют разбиение множества ребер гамильтонова цикла H_i^*, а значит, $w_i(X_i) + w_i(Y_i) = w_i^*$, $i = 1, 2$. Рассмотрим в графе G какой-нибудь гамильтонов цикл F_1'', содержащий все ребра про-тура X_1. Так как про-тур X_1 не содержит ребер гамильтонова цикла C_2, то $w_1^{C_2}(F_1'') \ge w_1(X_1)$. Найденный на Этапе 1.2 гамильтонов цикл F_1' получен L-приближенным алгоритмом A' с весовой функцией $w_1^{C_2}$, поэтому $w_1^{C_2}(F_1') \ge Lw_1^{C_2}(F_1'') \ge Lw_1(X_1)$. Следовательно, для построенного к концу Этапа 1.2 гамильтонова цкла F_1 выполняется оценка $w_1(F_1) \ge \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1^{C_2}(F_1') \ge L\left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1(X_1)$. Аналогично доказывается, что $w_2(F_2) \ge L\left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_2(X_2)$. Отсюда и из доказанных выше неравенств для C_1 и C_2 следует, что $w_1(C_1) + w_2(F_2) \ge L\left(1 - \frac{1}{n-5}\right)(w_1^* + w_2(X_2))$ и $w_1(F_1) + w_2(C_2) \ge L\left(1 - \frac{1}{n-5}\right)(w_2^* + w_1(X_1))$.

Из определения про-туров Y_1 и Y_2 следует, что они не имеют общих ребер, так как первый из них содержится в гамильтоновом цикле H_1^*, а второй — в H_2^*, где $H_1^* \cap H_2^* = \emptyset$. Кроме того, про-тур Y_1 содержится в гамильтоновом цикле C_2, а протур Y_2 — в C_1. На Этапе 2 алгоритма было установлено, что определенная на этом этапе пара про-туров K_1, K_2 имеет наибольший вес $w_1(K_1) + w_2(K_2)$ среди всех таких пар реберно непересекающихся про-туров, что первый из них содержится в C_2, а второй — в C_1. Отсюда следует, что $w_1(K_1) + w_2(K_2) \ge w_1(Y_1) + w_2(Y_2)$. Поэтому для построенных на Этапе 3 гамильтоновых циклов Z_1 и Z_2 справедлива оценка $w_1(Z_1) + w_2(Z_2) \ge \left(1 - \frac{1}{n-5}\right)(w_1(K_1) + w_2(K_2)) \ge \left(1 - \frac{1}{n-5}\right)(w_1(Y_1) + w_2(Y_2))$.

Предположим, что заявленная оценка точности алгоритма $A_{>1/2}$ неверна. Тогда для построенных на Этапе 4 гамильтоновых циклов H_1 и H_2 выполняется неравенство

$w_1(H_1) + w_2(H_2) < \frac{2L}{2+L}\left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w^*$. Отсюда и из ранее доказанных неравенств следует, что

$$\frac{2L}{2+L}\left(1-\frac{1}{n-5}\right)w^* > w_1(C_1) + w_2(F_2) \geq L\left(1-\frac{1}{n-5}\right)(w_1^* + w_2(X_2));$$

$$\frac{2L}{2+L}\left(1-\frac{1}{n-5}\right)w^* > w_1(F_1) + w_2(C_2) \geq L\left(1-\frac{1}{n-5}\right)(w_2^* + w_1(X_1));$$

$$\frac{2L}{2+L}\left(1-\frac{1}{n-5}\right)w^* > w_1(Z_1) + w_2(Z_2) \geq \left(1-\frac{1}{n-5}\right)(w_1(Y_1) + w_2(Y_2)).$$

Следовательно,

$$w_1^* + w_2(X_2) < \frac{2}{2+L}w^*; \quad w_2^* + w_1(X_1) < \frac{2}{2+L}w^*; \quad w_1(Y_1) + w_2(Y_2) < \frac{2L}{2+L}w^*.$$

Отсюда получаем, что

$$2w^* = w_1^* + w_2^* + w_1^* + w_2^* = w_1^* + w_2^* + (w_1(X_1) + w_1(Y_1)) + (w_2(X_2) + w_2(Y_2)) =$$

$$(w_1^* + w_2(X_2)) + (w_2^* + w_1(X_1)) + (w_1(Y_1) + w_2(Y_2)) < \left(\frac{2}{2+L} + \frac{2}{2+L} + \frac{2L}{2+L}\right)w^* = 2w^*.$$

Из полученного противоречия следует, что $w_1(H_1) + w_2(H_2) \geq \frac{2L}{2+L}\left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w^*$, то есть заявленная оценка точности $\frac{2L}{2+L}\left(1 - \frac{1}{n-5}\right)$ верна. Теорема 4 доказана.

В заключение заметим, что если на Этапах 1.1 и 1.2 алгоритма $A_{>1/2}$ в качестве вспомогательного L-приближенного алгоритма A' для задачи TSP-max используется простейший алгоритм с оценкой точности $L = 2/3$, то главный член $\frac{2L}{2+L}$ оценки точности алгоритма $A_{>1/2}$ принимает значение $1/2$, что соответствует оценке алгоритма $A_{1/2}$, описанного в разделе 3. Если в качестве алгоритма A' использовать алгоритм Сердюкова [18] с оценкой $L = 3/4$, то получаем $\frac{2L}{2+L} = \frac{6}{11}$. Наконец, если в качесве A' использовать алгоритм из [8] с рекордной на сегодня оценкой точности $L = 4/5$, то получаем $\frac{2L}{2+L} = 4/7$. Отметим также, что если A' — это точный алгоритм решения задачи TSP-max, то есть $L = 1$, то $\frac{2L}{2+L} = 2/3$, что является принципиальной верхней границей для оценки точности алгоритма $A_{>1/2}$.

Авторы благодарны анонимному рецензенту за внимательное изучение статьи и сделанные им ценные замечания!

References

[1] A.A. Ageev, A.E. Baburin, E.Kh. Gimadi, *A polynomial algorithm with approximation ratio 3/4 for finding two edge-disjoint Hamiltonian cycles of maximum weight*, Discret. Anal. Issled. Oper., Ser. 1, **12**:12 (2006), 11–20.

[2] A.A. Ageev, A.V. Pyatkin, *An approximate algoritm for the metric 2-PSP with ratio 2*, Discret. Anal. Issled. Oper., **16**:4 (2009), 3–20.

[3] A.E. Baburin, E.Kh. Gimadi, *On asymptotic exactness of the effective algorithm for the maximum m-PSP in a multidimensional Euclidean space*, Trudy Inst. Matem. Mechan. URO RAN, **16**:3 (2010), 12–24.

[4] J.B.J.M. De Kort, *Lower bounds for symmetric K-PSP*, Optimization, **22**:1 (1991), 113–122.

[5] J.B.J.M. De Kort, *Upper bounds for the symmetric 2-PSP*, Optimization, **23**:4 (1992), 357–367.

[6] J.B.J.M. De Kort, *A branch and bound algorithm for symmetric 2-PSP*, EJOR, **70** (1993), 229–243.

[7] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[8] S. Dudycz, J. Marcinkowski, K. Paluch, B. A. Rybicki, 4/5-*approximation algorithm for the maximum Traveling Salesman Problem*, from book Integer Programming and Combinatorial Optimization: Proc. 19th International Conference, IPCO 2017. (Waterloo, ON, Canada, June 26–28, 2017). Lect. Notes Comput. Sci., **10328** (2017), Springer, 173–185.

[9] H.N. Gabow, *An efficient reduction technique for degree-restricted subgraph and bidirected network flow problems*, Proc. 15th Annu. ACM Symp. Theory of Comput. (Boston, April 25-–27, 1983), New York: ACM, 1983, 448—456.

[10] E.Kh. Gimadi, Yu.V. Glazkov, A.N. Glebov, *Approximation algorithms for solving 2-Peripatetic Salesman Problem on a complete graph with edge weights 1 and 2*, Discret. Anal. Issled. Oper., **14**:2 (2007), 41–61.

[11] A.N. Glebov, A.V. Gordeeva *An algorithm with approximation ratio* 5/6 *for the metric maximum m-PSP*, In Kochetov Yu. et al (eds.) DOOR-2016, Lect. Notes Comput. Sci., **9869**, Springer, Heidelberg, 2016, 159–170.

[12] A.N. Glebov, A.V. Gordeeva, D.Zh. Zambalaeva, *A 7/5-approximation algorithm for the minimum 2-Peripatetic Salesman Problem with different weight functions*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **8** (2011), 296–309.

[13] A.N. Glebov, S.G. Toktokhoeva, *A Polynomial algorithm with asymptotic ratio 2/3 for the asymmetric maximization version of the m-PSP*, J. Appl. Industrial Math., **14**:3 (2020), 456–469.

[14] A.N. Glebov, D.Zh. Zambalaeva, *A polynomial algorithm with approximation ratio 7/9 for the maximum 2-Peripatetic Salesman Problem*, Discret. Anal. Issled. Oper., **18**:4 (2011), 17–48.

[15] A.N. Glebov, D.Zh. Zambalaeva, *An approximation algorithm for solving the minimum 2-Peripatetic Salesman Problem with different weight functions*, Discret. Anal. Issled. Oper., **18**:5 (2011), 11–37.

[16] A.N. Glebov, D.Zh. Zambalaeva, A.A. Skretneva, *A* 2/3*-approximation algorithm for the maximization assymetric 2-Peripatetic Salesman Problem*, Discret. Anal. Issled. Oper., **21**:6 (2014), 11–20.

[17] A.V. Gordeeva, *Polynomial algorithms with guaranteed approximation ratios for the metric maximum 2-PSP*, Graduation thesis of a specialist, Novosibirsk State University, 2010.

[18] A.I. Serdyukov, *An algorithm with an estimate for the Traveling Salesman Problem of the maximum*, Upravlyaemye Sistemy, **25** (1984), 80–86.

Glebov Aleksey Nikolaevich
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: angle@math.nsc.ru

Lylova Sophya Sergeevna
Novosibirsk State University,
Pirogova Street, 2,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: sophyal@mail.ru

Toktokhoeva Surena Garmazhapovna
Novosibirsk State University,
Pirogova Street, 2,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: s.toktokhoeva@yandex.ru