S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том xx, стр. xxx–xxx (202x) УДК 530.145.61; 532.511

DOI xx.xxxxx/semi.202x.xx.xxx MSC 81Q05

ПОТОКИ КВАЗИКЛАССИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ И АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

В.В. ХАБЛОВ

Abstract. The paper analyzes the asymptotics of solutions of the Schrödinger equation with respect to a small parameter $\hbar$. It is well known that short-wave asymptotics for solutions of this equation leads to a pair of equations — the Hamilton–Jacobi equation for the phase and the continuity equation. These equations coincide with the ones for the potential flows of an ideal fluid. The physical meaning of the wave function is invariant with respect to of the complex plane rotations group, and the asymptotics is constructed as a point-dependent action of this group on some function that is found by solving the transfer equation. It is shown that if the Heisenberg group is used instead of the rotation group, then the limit of the Schrödinger equations solutions with $\hbar$ tending to zero, lead to equations for vortex flows of an ideal fluid in a potential field of forces. If the original Schrödinger equation is nonlinear, then equations for barotropic processes in an ideal fluid are obtained.

Keywords: Schroödinger equation, Euler equations, short-wave asymptotics, quasi-classical approximation, quasi-classical limit.

Введение. Традиционная схема квазиклассического приближения и предлагаемые изменения

Названную схему можно представить, сопоставив задействованные разделы классической (левая колонка) и квантовой (правая колонка) механики.

Khablov, V.V., Flows of Quasi-classical Trajectories and Asymptotics Solutions of the Schrödinger Equation.

Поступила x января 2022 г., опубликована xx MMMMM 2022 г.

1. Объекты: гамильтониан $H\,(x, p, t)$, форма энергии-импульса $\lambda = pdx - Hdt$, уравнения $\begin{cases} \dot{x} = H_p \\ \dot{p} = -H_x \end{cases}$ для траекторий в фазовом пространстве. 2. Класс интегральных поверхностей Λ^4 в расширенном фазовом пространстве, выделяемый требованием $d\lambda\vert_{\Lambda^4} = 0$. 3. Локально условие $d\lambda\vert_{\Lambda^4} = 0$ влечет существование потенциала S : $dS = \lambda$. Если Λ^4диффеомеоморфно проектируется в $R^4_{(x,t)}$, то Λ^4 —это поверхность $p = S_x$, где S — решение уравнения Гамильтона–Якоби $S_t + H\,(x, S_x, t) = 0$.	1. Объекты: уравнение Шрёдингера $i\hbar\psi_t + H\left(\hbar\frac{\partial}{i\partial x}\right)\psi - U(x, y, z, t)\psi = 0$. Решение — волновая функция $\psi : R^4_{(x,t)} \to C$. 2. На области значений C волновой функции действует группа $G = U(1) = \left\{e^{is}\right\}$ вращений. Решение уравнения Шрёдингера строится в виде $\psi = g(x, t)u(x, t)$, $g = e^{\frac{i}{\hbar}S(x,t)} \in G$. 3. Асимптотика решения при $\hbar \to 0$ приводит к системе уравнений Гамильтона–Якоби и неразрывности $\begin{cases} S_t + H\,(x, S_x, t) = 0; \\ \rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \quad \rho = \vert u(x, t)\vert^2, \end{cases}$

Лагранжева поверхность Λ^4: $\{p = S_x\} \subset R^7_{(x,p,t)}$ — цель конструкции квазиклассического приближения. Объект Λ^4 вместе с решением $\rho(x, t)$ уравнения неразрывности описывает движение некоей идеальной жидкости. Поток этой «жидкости» образован возможными траекториями отдельных частиц, и в описании движения не участвует взаимодействие этих частиц.

Если связать плотность этого потока с плотностью распределения вероятности для частицы находиться в соответствующем месте, то модель представляется неполной. Как следует из приведенной конструкции такой поток, например, является безвихревым. То есть остается в стороне случай «общего положения». Вопрос возможных вихревых течений, как указывал Д. Бом, а потом В. В. Козлов и другие исследователи проработан недостаточно. Оказывается, что общие вихревые течения можно включить в описанную схему, двигаясь с двух сторон.

(1) При описании интегральной поверхности траекторий в фазовом пространстве отказаться от лагранжевости Λ^4 (со стороны гамильтоновой механики), заменив это требование более общим.
(2) Для построения асимптотических решений расширить группу G (со стороны квантовой механики), сохранив возможность предельного при $\hbar \to 0$ перехода.

Таким образом если вместо лагранжевых поверхностей Λ^4 использовать поверхности Λ в фазовом пространстве, которые возникают при этом подходе, то траектории движения частиц жидкости на таких поверхностях вместе с решением $\rho(x, t)$ уравнения неразрывности описывают общие вихревые движения идеальной жидкости.

Структура сообщения

Квазипотенциал. Для пояснения результата работы сначала в **1**-м разделе отмечается, что класс внешнего дифференциала формы энергии-импульса $\lambda = pdx - Hdt$, используемой в классической гамильтоновой механике, не превосходит N на произвольной интегральной поверхности размерности $N + 1$. Отсюда следует, что на произвольной интегральной поверхности размерности четыре в расширенном фазовом пространстве R^7форма $d\lambda$ разложима. Для формы λ это означает, что ее можно представить на этой поверхности как $dS - mdn$ с некоторыми функциями S, m и n. Сказанное выше применяется далее для примера, в котором $\lambda = pdx - \left(U(x,t) + \frac{p^2}{2M}\right) dt$ (без потери общности $M = 1$ и $p = v$). Тройка S, m и n скалярных функций, определяющая форму энергии-импульса λ, является центральной в статье и называется квазипотенциалом. Описания потока движущейся жидкости уравнениями для квазипотенциала или с помощью классических уравнений Эйлера равноправны. Тройка S, m и n известна в гидродинамике как потенциалы Клебша.

Группа Гейзенберга. В следующем **2**-м разделе вводится основной квантовый объект — уравнение Шредингера, решением которого (в отличие от традиционного подхода) мы считаем функцию ψ точки (x, y, z, t) со значениями в гильбертовом пространстве $L^2(R)$. Значения решений уравнения Шрёдингера допускают действия группы Гейзенберга Γ и это уравнение инвариантно относительно постоянных (не зависящих от (x, y, z, t)) действий. Такая точка зрения на волновую функцию обобщает традиционную и подсказывает искать решения уравнения Шредингера как результат действия элементов Γ на функцию $u(x, y, z, t)$ со значениями в $L^2(R)$.

В **3**-м разделе вводится асимптотическая форма решения уравнения Шрёдингера. Эта форма предлагается вместо используемой в квазиклассическом приближении. Исследовано поведение решений уравнения Шрёдингера относительно $\hbar$, стремящегося к нулю, и, как следствие, показано, что асимптотика подчиняется уравнениям для квазипотенциала эйлеровой модели идеальной жидкости.

Заряженная частица в электромагнитном поле. В **4**-м разделе для уравнения Шрёдингера частицы, движущейся в электромагнитном поле приводятся достаточные условия того, чтобы это уравнение было удовлетворено с точностью до малой высокого порядка. Тем самым результаты, полученные для гамильтониана, не учитывающего электромагнитного поля, переносятся частично на этот случай.

1. Квазипотенциал

Далее изложение в работе носит локальный характер, т. е. предполагается, что переменные принадлежат достаточно малой окрестности некоторой точки, в которой все рассматриваемые функции и их производные непрерывны до используемого порядка. Изложение служит цели автора — получения более удобной формы уравнений модели Эйлера идеальной жидкости. Это делается введением «квазипотенциала». Характер объектов общий, и приходится явно воспроизводить частично общеизвестные факты, «фольклор».

1.1. **Интегральные поверхности гамильтонова потока; класс формы энергии-импульса.**

Рассмотрим систему Гамильтона с гамильтонианом $H(x, p, t)$, определенным в расширенном фазовом пространстве R^{2N+1}

$$\dot{x}_i = H_{p_i}; \quad \dot{p}_i = -H_{x_i}; \quad i = 1, 2 \ldots, N.$$

Пусть Λ^{N+1} — гладкая интегральная поверхность размерности $N+1$, которой касается гамильтоново векторное поле $\boldsymbol{\partial} = \dfrac{\partial}{\partial t} + H_p \dfrac{\partial}{\partial x} - H_x \dfrac{\partial}{\partial p}$ (с подразумеваемым суммированием). Обозначим $\lambda = pdx - Hdt$, λ^* — сужение формы λ на Λ^{N+1}. Далее, точка над именем функции — это результат применения поля $\boldsymbol{\partial}$.

Наблюдение. *Если Λ^{N+1} — гладкая интегральная для $\boldsymbol{\partial}$ поверхность, то класс дифференциальной формы $d\lambda^*$ не превышает N. В частности, если класс $= N = 3$, то форма $d\lambda^*$ разложима, следовательно существует тройка S, m, n таких гладких функций, определенных на поверхности Λ^4, что $dS - mdn = \lambda^*$. Эти функции удовлетворяют системе уравнений*

$$\dot m = \dot n = 0; \qquad \dot S = pH_p - H.$$

Действительно, форма $d\lambda = dp \wedge dx - dH \wedge dt$ есть, согласно Э. Картану, абсолютный интегральный инвариант поля $\boldsymbol{\partial}$ ([1],[2]), т. е. на поверхности Λ^{N+1} внутреннее произведение $i_{\boldsymbol{\partial}} d\lambda = 0$. Поле $\boldsymbol{\partial}$ невырождено на Λ^{N+1}. Отсюда следует, что класс формы $(d\lambda)^*$ — сужения на поверхность Λ^{N+1} — не превосходит N. В случае $N = 3$ форма $(d\lambda)^*$ является разложимой. Это означает, что существует пара таких функций m и n, определенных на поверхности Λ^4, что $(d\lambda)^* = d\lambda^* = dn \wedge dm$, и $\lambda^* = dS - mdn$ для некоторой функции S. Если предположить, что $(d\lambda)^* \neq 0$ на поверхности Λ^4, то из равенства $0 = i_{\boldsymbol{\partial}} d\lambda = i_{\boldsymbol{\partial}} (d\lambda)^* = i_{\boldsymbol{\partial}} (dn \wedge dm)$ теперь следует $\dot m = \dot n = 0$, а из того, что $\lambda = dS - mdn$ следует равенство $\dot S = pH_p - H$.

1.2. Построение интегральных поверхностей и квазипотенциала.

Приведенное **Наблюдение** позволяет расширить конфигурационное пространство $R^7_{x,t,p}$ при описании траекторий движения частиц до $R^{10}_{x,t,p,S,m,n}$, поднять векторное поле $\boldsymbol{\partial} = \dfrac{\partial}{\partial t} + H_p \dfrac{\partial}{\partial x} - H_x \dfrac{\partial}{\partial p}$ из $R^7_{x,t,p}$ до поля

$$\tilde{\boldsymbol{\partial}} = \frac{\partial}{\partial t} + H_p \frac{\partial}{\partial x} - H_x \frac{\partial}{\partial p} + (pH_p - H)\frac{\partial}{\partial S}$$

в R^{10} и связать траектории движения с интегральными кривыми этого поля в R^{10}.

Обозначим символом Λ интегральную поверхность размерности 4 поля $\tilde{\boldsymbol{\partial}}$ в R^{10}, на которой аннулируется дифференциальная форма $\lambda - dS + mdn$.

В соответствии с вышеизложенным формируется следующий возможный подход к описанию интегральных поверхностей Λ в конфигурационном пространстве R^{10}:

(1) Исходное многообразие Λ^3_0 размерности 3 в R^{10} строится по импульсному распределению $p(x,0)$, заданному при $t = 0$, и условию $\lambda - dS + mdn = 0$, что равносильно тому, что при $t = 0$ значения S, m, n определяются из равенства $dS - mdn = pdx$.

(2) Используя поток, заданный векторным полем $\tilde{\boldsymbol{\partial}}$, найдем решение задачи Коши $\Lambda = \bigcup\limits_{t \geq 0} \Lambda^3_t$ из исходного многообразия Λ^3_0.

(3) По построению производная Ли дифференциальной формы $\lambda - dS + mdn$ вдоль потока $\tilde{\boldsymbol{\partial}}$ равна нулю, и поэтому на Λ аннулируется дифференциальная форма $\lambda - dS + mdn$.

Таким образом, такой подход дает возможность строить многообразие $\Lambda \subset R^{10}$ вместо лагранжева многообразия $\Lambda^4 \subset R^7$, которая строится при построении потенциала скорости традиционной безвихревой асимптотики [3].

Пусть поверхность Λ диффеоморфно проектируется в $R^4_{x,t}$. В этом случае импульсы $p(x,t)$ вместе с функцией плотности $\rho(x,t)$ дают классическое описание Эйлера движения потока соответствующей «идеальной жидкости», поскольку по построению удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} p_t + (v \cdot \nabla)p = -H_x; \\ \rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0; \quad v = H_p. \end{cases}$$

Последнее — уравнение неразрывности. Если использовать равенство $p = \nabla S - m\nabla n$ на Λ, то тот же поток «идеальной жидкости» можно описать с помощью другой замкнутой системы уравнений — системы уравнений для тройки S, m, n

$$m_t + (v \cdot \nabla)m = 0;\ n_t + (v \cdot \nabla)n = 0;\ S_t + (v \cdot \nabla)S = pH_p - H; \quad v = H_p,$$

(в которой подставлено $p = \nabla S - m\nabla m$), дополненной уравнением неразрывности.

Чтобы не возникала путаница с потенциальными течениями такую тройку функций S, m, n будем называть *квазипотенциалом для решения исходной системы уравнений Эйлера*, а полученную систему — системой уравнений для квазипотенциала. Далее считаем, что для решения уравнений Эйлера такой квазипотенциал существует.

Отметим свойство инвариантности полученной системы для квазипотенциала. Оно состоит в том, что по распределению импульсов на многообразии Λ, тройка S, m, n определяется не однозначно: любое преобразование тройки S, m, n, оставляющее форму $dS - mdn = dS' - m'dn'$ неизменной, приводит к той же системе уравнений для новой тройки S', m', n'. В частности, преобразование

$$(S, m, n) \to (S + S_0 - m_0 n, m + m_0, n + n_0)$$

с постоянными (S_0, m_0, n_0) переводит решение в решение. Такое преобразование определяет левое действие группы Гейзенберга Γ верхнетреугольных матриц

$$g(m, n, S) = \begin{pmatrix} 1 & m & S \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

на квазипотенциал.

Рассмотрим пример. Переходя к обычно принятым в теории идеальной жидкости обозначениям $(p \leftrightarrow v)$, возьмем гамильтониан

$$H = U(x,t) + \frac{v^2}{2},\ \lambda = vdx - \left(U(x,t) + \frac{v^2}{2}\right) dt.$$

Предположим, что поверхность Λ диффеоморфно проектируется в $R^4_{(x,t)}$. Уравнения Эйлера для течений жидкости в потенциальном поле сил ([4],[5]) имеют вид

$$\begin{cases} \dot{v} + \nabla U(x,t) = 0; \\ \rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0. \end{cases}$$

$(U(x,t) = \mathcal{P}(\rho)$ для баротропных процессов.) Определим тройку S, m, n так, как это описано в пунктах (1-2) построения Λ. В этом случае мы приходим к представлению Клебша, известному в гидродинамике ([6], §167; [7], §29) для решений уравнений Эйлера.

Сформулируем явно связь между решениями системы уравнений Эйлера — с одной стороны и квазипотенциалом S, m, n — с другой ([6], §167; [7], §29).

Предложение. *Если для некоторых функций S, m, n, ρ переменных* (x, y, z, t)

$$\begin{cases} S_t - mn_t + U(x,y,z,t) + \dfrac{v^2}{2} \equiv 0; \\ m_t + (v \cdot \nabla)m = 0; \\ n_t + (v \cdot \nabla)n = 0; \\ \rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \end{cases}$$

то вектор-функция $v \equiv \nabla S - m\nabla n$ и скаляр ρ являются решением системы уравнений Эйлера для потока в потенциальном поле сил $(U(x,y,z,t) = \mathcal{P}(\rho)$ для баротропных процессов). В случае ненулевого $\operatorname{rot} v$ для решения (v, ρ) системы уравнений Эйлера такие функции S, m, n всегда существуют.

2. Уравнение Шрёдингера и группа Гейзенберга

Рассмотрим уравнение Шредингера

$$i\hbar\psi_t + \frac{\hbar^2}{2M}\Delta\psi - U(x,y,z,t)\psi = 0.$$

Обычно предполагается, что ψ — это комплекснозначная функция состояния, а квадрат ее модуля $|\psi|^2$ интерпретируется как плотность распределения вероятности для частицы массы M находиться в момент времени t в точке с координатами (x, y, z).

Для построения квазиклассической коротковолновой асимптотики решения уравнения Шрёдингера используются группа $G = U(1) = \{e^{iS}\}$ и одномерное пространство C^1 ее представления. Построение асимптотики $\psi = e^{i\hbar^{-1}S}u$ означает, в частности, определение зависимости элемента $e^{i\hbar^{-1}S}$ группы, действующего на некоторую функцию $u(x,y,z,t)$, от координат точки (x,y,z,t). В квазиклассическом приближении используется классический гамильтониан $H = U(x,y,z,t) + \dfrac{v^2}{2}$ и интегральная поверхность Λ^4 соответствующая гамильтоновой системе. Поверхность Λ^4 лагранжева, т. е. форма $d\lambda$ на ней обращается в нуль. Требование лагранжевости поверхности Λ^4 связано с группой $G = U(1)$, используемой для построения. Если размерность унитарного пространства ψ представления больше единицы, но конечна, то вид уравнения Шрёдингера и интерпретация его решений по сравнению с одномерным случаем практически не меняются. В таком случае можно использовать все результаты о разрешимости задачи Коши для уравнения Шрёдингера в подходящих функциональных пространствах. Проблем с интерпретацией решений как в классическом, так и в обобщенном смысле нет.

Предлагается отказаться от требования лагранжевости для поверхности Λ^4 и свести эти требования к минимальным для интегральных многообразий в классической гамильтоновой механике, т. е. к разложимости формы $d\lambda$ на Λ^4. Согласно **Наблюдению** предыдущего раздела это условие для классического объекта Λ^4 является необходимым. Для представления решений уравнения Шредингера и построения асимптотики при стремлении $\hbar$ к нулю вместо группы $G = U(1)$ используется более широкая группа Ли Г. Это группа Гейзенберга верхнетреугольных 3×3 матриц, не имеющая конечномерных унитарных представлений. Нетривиальные унитарные представления группы Г реализуются в бесконечномерном — гильбертовом пространстве, поэтому далее ψ — функция переменных (x,y,z,t) со значениями в пространстве $L^2(R)$, $|\psi|$ — норма в этом пространстве определяемая эрмитовым произведением

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_R \psi_1(\xi)\overline{\psi}_2(\xi)d\xi.$$

Будем считать, что решение уравнения Шрёдингера ψ определено, имеет классические частные производные, входящие в уравнение, и эти производные непрерывны. Далее, в уравнении Шредингера $M = 1$.

Итак, символ Γ означает группу Гейзенберга треугольных матриц $g(m,n,S) = \begin{pmatrix} 1 & m & S \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Унитарное представление этой группы реализуется действием слева произвольного элемента $g(S,m,n) \in \Gamma$ на элементы из $u \in L^2(R)$ по формуле [8]

$$\left(g(S,m,n)u\right)(\xi) = e^{(S+n\xi)i}u(\xi+m).$$

В этих обозначениях $\left(g(S,m,n)\right)^{-1} = g(-S+mn,-m,-n)$. Для выбранного представления базис алгебры Ли группы Γ можно выбрать следующим образом:

$$\left\{ i,\ P = \tfrac{d}{d\xi},\ Q = i\xi \right\}.$$

Пусть S, m, n — скалярные функции переменных (x,y,z,t), а u — функция переменных (x,y,z,t) со значениями в $L^2(R)$. Введем используемые далее обозначения для производных:

$$(g(S;m;n))^{-1}\frac{\partial}{\partial\tau}g(S;m;n) = A^\tau(g(S;m;n)); \quad \tau = x,y,z,t.$$

Если, как обычно, $L^g = g^{-1}Lg$, где L — линейный оператор, действующий на u, то прямые вычисления дают соотношения:

$$A^\tau(g(S;m;n))u = \left((S_\tau - mn_\tau)\,i + m_\tau P + n_\tau Q\right)u; \ \left(-i\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^g = -i\frac{\partial}{\partial\tau} - iA^\tau(g). \tag{1}$$

Так же получается (с обозначением $v = \nabla S - m\nabla n$)

$$(-i\nabla)^g = -i\nabla - i\overrightarrow{A}(g) = -i\nabla - i\left(vi + (\nabla m)\,P + (\nabla n)\,Q\right).$$

Таким же образом вычисляем Δu

$$\begin{aligned}\Delta^g u &= \left(\nabla + \overrightarrow{A}(g)\right)^2 u = \left(\nabla + vi + (\nabla m)\,P + (\nabla n)\,Q\right)^2 u = \\ &= \left(vi + (\nabla m)\,P + (\nabla n)\,Q\right)^2 u + 2\left(vi + (\nabla m)\,P + (\nabla n)\,Q\right)\cdot\nabla u + \\ &+ \left(i\,\mathrm{div}\,v + (\Delta m)\,P + (\Delta n)\,Q\right)u + \Delta u\end{aligned}$$

Если обозначить $m_v = (v\cdot\nabla)\,m$, $n_v = (v\cdot\nabla)\,n$, то

$$\begin{aligned}\Delta^g u &= \left(-v^2 + 2im_vP + in_vQ\right)u + \\ &+ \left((\nabla m)\,P + (\nabla n)\,Q\right)^2 u + 2\left(vi + (\nabla m)\,P + (\nabla n)\,Q\right)\cdot\nabla u + \\ &+ \left(i\,\mathrm{div}\,v + (\Delta m)\,P + (\Delta n)\,Q\right)u + \Delta u\end{aligned} \tag{2}$$

3. Обобщенная квазиклассическая асимптотика

Перейдем к построению формальной асимптотики решений уравнения Шрёдингера. Введем обозначение $\varepsilon = \sqrt{\hbar}$, $\hbar$ — «постоянная Планка», малый параметр, который мы будем стремить к нулю, наблюдая за поведением решения $\psi[\varepsilon]$.

Ищем решение $\forall \varepsilon > 0$ в виде

$$\psi[\varepsilon](x,y,z,t) = g\left(\varepsilon^{-2}S(x,y,z,t), \varepsilon^{-1}m(x,y,z,t), \varepsilon^{-1}n(x,y,z,t)\right)u(x,y,z,t),$$

где $u(x,y,z,t)$ — функция со значениями в $L^2(R)$, $g \in \Gamma$.

Далее предполагается, что u принадлежит D — подпространству $L^2(R)$ — общей части областей определения операторов P^2 и Q^2 с нормами графика. Также будем считать, что решение уравнения Шрёдингера ψ определено, имеет классические частные производные, входящие в уравнение, и они непрерывны как функции со значениями в D.

Предложение 1. *Пусть* $u\big|_{t=0} \neq 0$. *Чтобы функция* $\psi[\varepsilon](x,y,z,t)$ *была асимптотическим решением уравнения Шрёдингера с точностью до слагаемых выше второго порядка относительно* ε, *стремящегося к нулю, необходимо и достаточно чтобы функции* S, m, n *и* u *являлись решением системы уравнений*

$$\left\{\begin{array}{l} S_t - mn_t + U(x,y,z,t) + v^2/2 = 0; \\ m_t + m_v = 0; \\ n_t + n_v = 0; \\ iu_t + \dfrac{i}{2}(\operatorname{div} v)u + i\,(v\cdot\nabla)\,u + \dfrac{1}{2}\left((\nabla m)\,P + (\nabla n)\,Q\right)^2 u = 0. \end{array}\right. \tag{3}$$

Доказательство. Подставим анзац $\psi[\varepsilon]$ в уравнение Шрёдингера и применим $\left(g\left(\varepsilon^{-2}S, \varepsilon^{-1}m, \varepsilon^{-1}n\right)\right)^{-1}$ к обеим частям уравнения. Используя (1) и (2), приходим к следующему равенству:

$$\begin{aligned} &-\left((S_t - mn_t) + U(x,y,z,t) + v^2/2\right)u + \\ &+ \varepsilon i\left((m_t + m_v)\,P + (n_t + n_v)\,Q\right)u + \\ &+ \varepsilon^2 i\left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\operatorname{div} v\right)u + (v\cdot\nabla)\,u - \frac{i}{2}\left((\nabla m)\,P + (\nabla n)\,Q\right)^2 u\right) + \\ &+ \frac{\varepsilon^3}{2}\big((\Delta m)\,P + (\Delta n)\,Q + 2\left(((\nabla m)\,P + (\nabla n)\,Q)\cdot\nabla\right)\big)u + \\ &+ \varepsilon^4 \Delta u = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где $v = \nabla S - m\nabla n$. Из равенства (4) очевидна достаточность условия **Предложения 1** и необходимость выполнения первого и четвертого уравнений системы (3). Чтобы показать необходимость выполнения второго и третьего уравнений, обратимся к необходимому равенству

$$\left((m_t + m_v)\,P + (n_t + n_v)\,Q\right)u = 0.$$

Из этого равенства, имеющего вид

$$a\frac{\partial u}{\partial \xi} + bi\xi u = 0,$$

следует, что возможно одно из двух: или $a = 0$ и тогда $b = 0$; или $a \neq 0$ и тогда $u = C\exp\left(-\dfrac{b}{2a}\xi^2\right)$. Последнее возможно (так как $u \in L^2(R)$) только при $C = 0$, что противоречит требованию $u\big|_{t=0} \neq 0$. □

Получим следствие из последнего уравнения системы (3). Обозначим $\rho = |\psi|^2 = |u|^2$. Учитывая, что первые три уравнения системы удовлетворены (асимптотика до первого порядка по ε), умножим $\forall(x, y, z, t)$ обе части четвертого уравнения (3) асимптотики скалярно на u (т.е. на $\langle \dots, u\rangle$) и в полученном результате выделим мнимую часть. Первые три слагаемых дают выражение $\rho_t + \operatorname{div}(\rho v)$. Для последнего
$\frac{1}{2}\left((\nabla m) P + (\nabla n) Q\right)^2 u$ мы получаем

$$\operatorname{Im}\left\langle \left((\nabla m) P + (\nabla n) Q\right)^2 u, u \right\rangle =$$
$$= -\frac{i}{2}\int_R \left((\nabla m) P + (\nabla n) Q\right)^2 u(\xi)\overline{u}(\xi) d\xi + \frac{i}{2}\int_R \overline{\left((\nabla m) P + (\nabla n) Q\right)^2 u(\xi)} u(\xi) d\xi =$$
$$= |\text{интегрируем по частям}| =$$
$$= \frac{i}{2}\int_R \left((\nabla m) P + (\nabla n) Q\right) u(\xi) \overline{\left((\nabla m) P + (\nabla n) Q\right) u(\xi)} d\xi -$$
$$- \frac{i}{2}\int_R \overline{\left((\nabla m) P + (\nabla n) Q\right) u(\xi)} \left((\nabla m) P + (\nabla n) Q\right) u(\xi) d\xi = 0.$$

Получаем уравнение неразрывности для ρ: $\rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0$. Вместе с первыми тремя уравнениями, которым удовлетворяет асимптотика, это дает систему уравнений Эйлера для квазипотенциала с уравнением неразрывности

$$\begin{cases} S_t - m n_t + U(x, y, z, t) + v^2/2 = 0; \\ m_t + m_v = 0; \\ n_t + n_v = 0; \\ \rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0. \end{cases}$$

Отсюда делаем вывод:

Теорема 1. *Пусть* $u\big|_{t=0} \neq 0$. *Если функция*

$$\psi[\varepsilon](x, y, z, t) = g\left(\varepsilon^{-2} S, \varepsilon^{-1} m, \varepsilon^{-1} n\right) u(x, y, z, t)$$

является асимптотическим решением уравнения Шрёдингера с точностью до слагаемых выше второго порядка относительно ε, *стремящегося к нулю, то функции* S, m, n *и* $\rho = |u|^2$ *удовлетворяют системе уравнений Эйлера для квазипотенциала, описывающей течение идеальной жидкости в потенциальном поле сил. В частности, если потенциал* $U = \mathcal{P}\left(|\psi|^2\right)$, *то эти уравнения описывают вихревые течения для баротропных процессов.*

$$\begin{cases} S_t - m n_t + \mathcal{P}(\rho) + v^2/2 = 0; \\ m_t + m_v = 0; \\ n_t + n_v = 0; \\ \rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \end{cases} \tag{5}$$
□

Нетрудно выписать условия для $\psi[\varepsilon]$, обеспечивающие выполнение уравнения Шрёдингера с точностью выше второй степени параметра ε. Для этого применим $\left(g\left(\varepsilon^{-2} S, \varepsilon^{-1} m, \varepsilon^{-1} n\right)\right)^{-1}$ к обеим частям уравнения Шрёдингера, в которое была подставлена $\psi = \psi[\varepsilon]$. Группируя коэффициенты при степенях ε как в (4), и используя сокращения $\mathcal{L}_k$ для коэффициентов при ε^k, $k \geq 2$, получаем

$$\begin{aligned}(6)\qquad &\Big(-(S_t-mn_t)-U(x,y,z,t)-v^2/2\Big)u+\varepsilon i\Big((m_t+\\ &+m_v)P+(n_t+n_v)\,Q\Big)u+\varepsilon^2\mathcal{L}_2u+\varepsilon^3\mathcal{L}_3u+\varepsilon^4\Delta u=0.\end{aligned}$$

Представим в (6) $u(x,y,x,t)$ как $u=u_0+\varepsilon u_1+\ldots+\varepsilon^r u_r$

Предложение 2. *При $r=1$ тройка S, m, n является асимптотическим решением уравнения Шрёдингера с точностью до слагаемых выше третьего порядка относительно стремящегося к нулю ε тогда и только тогда, когда функции S, m, n и u являются решением системы уравнений*

$$\begin{cases} S_t-mn_t+U(x,y,z,t)+\dfrac{v^2}{2}=0;\\ m_t+m_v=0;\\ n_t+n_v=0;\\ \mathcal{L}_2u_0=0;\\ \mathcal{L}_2u_1+\mathcal{L}_3u_0=0.\end{cases}$$

При $r>1$ тройка S, m, n является асимптотическим решением уравнения Шрёдингера с точностью до слагаемых выше $r+2$ порядка по ε, стремящимся к нулю тогда и только тогда, когда функции S, m, n и u являются решением системы уравнений

$$(7)\qquad \begin{cases} S_t-mn_t+U(x,y,z,t)+\dfrac{v^2}{2}=0;\\ m_t+m_v=0;\\ n_t+n_v=0;\\ \mathcal{L}_2u_0=0;\\ \mathcal{L}_2u_1+\mathcal{L}_3u_0=0;\\ \mathcal{L}_2u_2+\mathcal{L}_3u_1+\Delta u_0=0;\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \mathcal{L}_2u_r+\mathcal{L}_3u_{r-1}+\Delta u_{r-2}=0.\end{cases}$$

Доказательство состоит в приравнивании нулю коэффициентов при всех степенях ε левой части уравнения (6). □

Следствие 1. *Если для $r\geq 0$ функции $\psi[\varepsilon](x,y,z,t)$ с $u=u_0+\varepsilon u_1+\ldots+\varepsilon^r u_r$ является асимптотическим решением уравнения Шрёдингера с точностью до слагаемых выше $r+2$ порядка относительно ε, стремящегося к нулю, то*

$$\begin{aligned}(8)\qquad &\Big(-\big(S_t-mn_t\big)-U(x,y,z,t)-v^2/2\Big)u+\varepsilon i\big((m_t+m_v)\,P+\\ &+(n_t+n_v)\,Q\big)u+\varepsilon^2\mathcal{L}_2u+\varepsilon^3\mathcal{L}_3u+\varepsilon^4\Delta u=O\left(\varepsilon^{r+3}\right).\end{aligned}$$

Доказательство. Если первое уравнение системы (7) умножить на -1, второе — на εiP, третье — на εiQ, четвертое — на ε^2, пятое — на ε^3и т. д., то все сложить, то получится отношение (8). □

Следствие 2. *Если функция*

$$\psi[\varepsilon](x,y,z,t)=g\left(\varepsilon^{-2}S,\varepsilon^{-1}m,\varepsilon^{-1}n\right)u(x,y,z,t)$$

является асимптотическим решением уравнения Шрёдингера с точностью до слагаемых выше $r+2$ порядка $(r>1)$ относительно ε, стремящегося к нулю, то функции S, и $\rho=|u|^2$ удовлетворяют m системе n уравнений

Эйлера для квазипотенциала, описывающего течение идеальной жидкости в потенциальном поле сил.

$$\begin{cases} S_t - mn_t + U(x,y,z,t) + v^2/2 = 0; \\ m_t + m_v = 0; \\ n_t + n_v = 0; \\ \rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = O\left(\varepsilon^{r+1}\right). \end{cases}$$

В частности, если потенциал $U = \mathcal{P}\left(|\psi|^2\right)$, *то эти уравнения описывают вихревые течения для баротропных процессов.*

$$\begin{cases} S_t - mn_t + \mathcal{P}(\rho) + v^2/2 = 0; \\ m_t + m_v = 0; \\ n_t + n_v = 0; \\ \rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = O\left(\varepsilon^{r+1}\right). \end{cases}$$

Шаги **доказательства** повторяют вывод **теоремы 1** .

4. Заряженная частица в электромагнитном поле

При сопоставлении уравнения Шрёдингера для заряженной частицы — с одной стороны, и уравнений движения классической заряженной частицы в электромагнитном поле — с другой, следует отметить, что классические уравнения заведомо не служат точной асимптотикой для полевого. Действительно, уравнение для классического импульса

$$M\dot{v} = -\nabla U + e\mathbf{E} + \frac{e}{c} v \times \mathbf{B}$$

содержит величину e, пропорциональную в силу соотношения $e^2 = \alpha\hbar c$ (α— постоянная тонкой структуры) корню квадратному из $\hbar$, то есть введенной выше величине ε. Таким образом в этом уравнении не состоялся предельный переход при $\hbar \to 0$.

В то же время все, что связано с классическим гамильтонианом и отмечено в разделе 1 имеет место. Именно, пусть в принятых в физике обозначениях (M— масса частицы, e— ее заряд, c— скорость света)

$$H = \frac{Mv^2}{2} + U(x,y,z,t) + e\varphi;\ v = \frac{1}{M}\left(p - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right),$$

$\mathbf{A}, \varphi$— 4-потенциал, то есть $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}$ и $-\frac{1}{c}\mathbf{A}_t - \nabla\varphi = \mathbf{E}$.

Классическое описание Эйлера движения потока соответствующей «идеальной жидкости» как решений системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} p_t + (v \cdot \nabla)p = -H_x; \\ \rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0; \quad v = H_p. \end{cases}$$

(последнее — уравнение неразрывности) соответствует абстрактной жидкости, траектории частиц которой совпадают с классическими и сведены в общий поток. Поэтому отсутствует взаимодействие между частицами такой «жидкости». Система уравнений для квазипотенциала

$$m_t + m_v = 0; \quad n_t + n_v = 0; \quad S_t + S_v = pH_p - H = \frac{Mv^2}{2} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\cdot v - U - e\varphi;$$
$$\left(v = \frac{1}{M}\left(p - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right),$$

Так же Λ — интегральная поверхность для классической частицы в расширенном фазовом пространстве, которая может быть построена описанным в разделе 1 образом.

4.1. **Уравнение Шрёдингера и асимптотика решения.** Рассмотрим теперь уравнение Шредингера для электрона в поле 4-потенциала $\mathbf{A}, \varphi$. Как и в предыдущих разделах ψ — функция со значениями в $L^2(R)$.

$$i\hbar\psi_t - \frac{1}{2M}\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi - (U(x,y,z,t) + e\varphi)\psi = 0.$$

Как и в случае отсутствия внешнего поля подставим в это уравнение

$$\psi[\varepsilon](x,y,z,t) = g\left(\varepsilon^{-2}S, \varepsilon^{-1}m, \varepsilon^{-1}n\right)u(x,y,z,t)$$

и перейдем к равносильному уравнению, применив к обеим частям g^{-1}. При этом

$$\begin{aligned}&(g(\varepsilon^{-2}S;\varepsilon^{-1}m;\varepsilon^{-1}n))^{-1}\frac{\partial}{\partial\tau}g(\varepsilon^{-2}S;\varepsilon^{-1}m;\varepsilon^{-1}n)u = \\ &= \left(\varepsilon^{-2}\left(S_\tau - mn_\tau\right)i + \varepsilon^{-1}m_\tau P + \varepsilon^{-1}n_\tau Q\right)u; \quad \tau = x,y,z,t.\end{aligned}$$

Используя соотношение $v = \dfrac{1}{M}\left(p - \dfrac{e}{c}\mathbf{A}\right)$, перепишем уравнение в виде

$$\begin{aligned}&-\left((S_t - mn_t) + Mv^2/2 + U(x,y,z,t) + e\varphi\right)u + \\ &+ \varepsilon i\left((m_t + m_v)P + (n_t + n_v)Q\right)u + \\ &+ \varepsilon^2 i\left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\operatorname{div} v\right)u + (v\cdot\nabla)u - \frac{i}{2M}\left((\nabla m)P + (\nabla n)Q\right)^2 u\right) + \\ &+ \varepsilon^3\mathcal{L}u\end{aligned} \tag{9}$$

Выражение $\mathcal{L}u$ не содержит слагаемых с отрицательными степенями ε и производных функции u выше второго порядка.

Теперь можно сформулировать утверждение о связи классического и полевого подходов к описанию динамики заряженной частицы в обозначениях текущего раздела.

Предложение 3. *Пусть тройка (S,m,n)— классическое решение системы уравнений для квазипотенциала*

$$m_t + m_v = 0; \quad n_t + n_v = 0; \quad S_t + S_v = pH_p - H = \frac{Mv^2}{2} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot v - U - e\varphi; \quad \left(v = \frac{1}{M}\left(p - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\right),$$

и функция $u(x,y,z,t)$ со значениями в $D \subset L^2(R)$ является решением уравнения

$$u_t + \frac{1}{2}(\operatorname{div} v)u + (v\cdot\nabla)u - \frac{i}{2M}\left((\nabla m)P + (\nabla n)Q\right)^2 u = 0.$$

Тогда

(1) *пара v, $\rho = |u|^2$ удовлетворяет уравнению неразрывности $\rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0$;*
(2) *функция $\psi[\varepsilon](x,y,z,t) = g\left(\varepsilon^{-2}S, \varepsilon^{-1}m, \varepsilon^{-1}n\right)u(x,y,z,t)$ удовлетворяет уравнению Шрёдингера для заряженной частицы в поле 4-потенциала $(\mathbf{A}, \varphi)$*

$$i\hbar\psi_t - \frac{1}{2M}\left(-i\hbar\nabla - \mathbf{A}\right)^2\psi - (U(x,t) + \varphi)\psi = 0$$

с точностью до слагаемых выше второго порядка относительно ε.

Доказательство. То же, что в **Предложении 1**. □

Выводы

В работе показано, что математические модели интегральных поверхностей размерности 4 классического гамильтонова потока — с одной стороны, и асимптотических решений уравнения Шредингера — с другой, могут быть в некотором смысле отождествлены. Точнее имеется в виду следующее.

1. Для классического объекта гамильтоновой механики — дифференциальной формы энергии-импульса $\lambda = pdx - Hdt$ мы отмечаем, что класс внешнего дифференциала этой формы не превосходит n на произвольной интегральной поверхности размерности $n+1$. Отсюда следует, что для случая $n=3$ произвольной интегральной поверхности размерности четыре в расширенном фазовом пространстве R^7 форма $d\lambda$ разложима. Для незамкнутой формы λ это означает возможность ее представления на этой поверхности в виде $\lambda = dS - mdn$ с некоторыми функциями S, m и n. Эта тройка скалярных функций называется квазипотенциалом формы энергии-импульса λ. В случае, когда форма $\lambda = vdx - \left(U(x,t) + \dfrac{v^2}{2}\right) dt$ квазипотенциал S, m и n удовлетворяет системе уравнений, эквивалентной системе уравнений Эйлера идеальной жидкости, и дает представление Клебша решений системы Эйлера (**Предложение** в разделе **1**).
2. Для построения асимптотики в качестве исходного квантового объекта предлагается использовать уравнение Шрёдингера для волновой функции ψ со значениями в $L^2(R)$ — гильбертовом пространстве. Это позволяет определить нетривиальное унитарное действие группы Гейзенберга в этом пространстве и использовать его для построения асимптотических решений уравнения Шрёдингера. Предложен анзац для асимптотического решения уравнения Шрёдингера. Эта конструкция обобщает широко используемое квазиклассическое приближение. Форма обобщения $\psi[\varepsilon](x,y,z,t)$ приведена в начале раздела **3** .
3. Доказано (**Предложение 1**), что первые три условия существования асимптотического решения уравнения Шредингера вида $\psi[\varepsilon](x,y,z,t)$ совпадают с соответствующими уравнениями системы для квазипотенциала, а следствием последнего условия является уравнение неразрывности. **Теорема 1** обобщает это утверждение на случай зависимости $U = \mathcal{P}(|\psi|^2)$ для потенциала в уравнении Шредингера. Асимптотическая тройка S, m и n в этом случае описывают вихревые течения для баротропных процессов. Заметим, что в частном случае это относится к уравнению Гросса–Питаевского. В предложении 2 и следствиях указаны способы повышения точности асимптотики до степеней $\varepsilon = \sqrt{\hbar}$ выше второй.
4. Заметим, что из приведенного анализа следует принципиальная возможность построения «неполной» асимптотики решений уравнения Шредингера. Имеется ввиду, что можно найти S, m, n и $\rho = |\psi|^2$, то есть найти асимптотические элементы группы Гейзенберга, действующие на начальную волновую функцию, и модуль этой функции, не находя самой функции. Это можно сделать, найдя сначала решение системы уравнений Эйлера

$$\begin{cases} \dot{v} + \nabla U(x,y,z,t) = 0; \\ \rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0. \end{cases}$$

($U(x,y,z,t)=\mathcal{P}(\rho)$ для баротропных процессов).

После этого можно найти S и m, n из условия $d\lambda = dS - mdn$. В качестве альтернативы можно искать S, m и n из ρ уравнений для квазипотенциала.

Таким образом если поиск асимптотического решения линейного уравнения Шрёдингера осуществлять поэтапно, то на первом этапе — поиска квазипотенциала — придется решать нелинейную задачу, на втором — нахождение $u(x,y,z,t)$ и $\rho(x,y,z,t)$ в обозначениях работы — уравнения линейны.

Поиск асимптотического решения нелинейного уравнения Гросса–Питаевского тоже можно разбить на два этапа: на первом этапе — поиска квазипотенциала и плотности ρ — нелинейная задача, и нахождение $u(x,y,z,t)$ — линейная.

5. В разделе **4** рассмотрен случай движения электрона в электромагнитном поле. Выписаны уравнения движения идеальной жидкости и показано (в **Приложении 3**), что при выполнении этих соотношений функция

$$\psi[\varepsilon](x,y,z,t) = g\left(\varepsilon^{-2}S, \varepsilon^{-1}m, \varepsilon^{-1}n\right) u(x,y,z,t)$$

удовлетворяет уравнению Шрёдингера с точностью до слагаемых выше второго порядка относительно параметра $\varepsilon = \sqrt{\hbar}$.

References

[1] C. Godbillon *Geometrie differentielle et mecanique analytique. Collection Methodes* Hermann, Paris, 1969, ISBN: 2705656588, 9782705656584

[2] V. V. Kozlov *Obshhaya teoriya vixrej. –2-e izd., ispr. i dop.* Izhevsk: Institut komp‘yuterny‘x issledovanij, 2013.

[3] A. S.Mishchenko, V. E. Shatalov, B. Yu. Sternin *Lagrangian manifolds and the Maslov operator*, Springer Series in Soviet Mathematics, Springer-Verlag, Berlin , 1990, ISBN: 978-3-642-64765-9

[4] L. D Landau And E. M. Lifshitz Quantum Mechanics. *A Shorter Course Of Theoretical Physics.* Pergamon, 1974, ISBN: 1483187225, 9781483187228

[5] N. E. Kochin,, I. A. Kibel, and N. V. Roze, *Theoretical Hydromechanics.* John Wiley & Sons Ltd., Chichester. 1964, ISBN: 047049705X,9780470497050

[6] H. Lamb, *Hydrodynamics (Sixth Edition).* Cambridge University Press, Cambridge. 1975, ISBN: 9780521055154, 0521055156

[7] J. Serrin, *Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics.* Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1959, DOI: 10.1007/978-3-642-45914-6_2

[8] A. A .Kirillov, *Introduction to the theory of representations and noncommutative harmonic analysis I. Encycl. Math. sci.* 22, 1-156 (1994); translation from Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Probl. Mat., Fundam. Napravleniya 22, 5-162 (1988), ISBN: 0387186980 (ISBN13: 9780387186986)

Vladislav Vladimirovich Khablov
Novosibirsk State Technical University,
pr. K. Marx, 20
630073, Novosibirsk, Russia
E-mail address: xablov@corp.nstu.ru; hablovvladislav@gmail.com