S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 514.764.2
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 53C30,53C50

ИНВАРИАНТНЫЕ СОЛИТОНЫ РИЧЧИ НА ТРЕХМЕРНЫХ НЕУНИМОДУЛЯРНЫХ ГРУППАХ ЛИ С ЛЕВОИНВАРИАНТНОЙ ЛОРЕНЦЕВОЙ МЕТРИКОЙ И ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

П.Н. КЛЕПИКОВ, Е.Д. РОДИОНОВ, О.П. ХРОМОВА

In this paper we investigate invariant Ricci solitons on three-dimensional nonunimodular metric Lie groups with a semisymmetric connection. We have proved that there exist nontrivial invariant Ricci solitons on some three-dimensional Lie groups with a left-invariant Lorentzian metric and a semisymmetric non Levi-Civita connection. Moreover a complete classification of nontrivial invariant Ricci solitons and the corresponding semisymmetric connections on three-dimensional nonunimodular Lie groups is obtained. In result we have given an answer on L.Cerbo conjecture about nontrivial invariant Ricci solitons.

Keywords: invariant Ricci solitons, Lie groups, left-invariant Lorentzian metrics, semisymmetric connections.

1. Предварительные сведения

Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие. Определим на данном многообразии полусимметрическую связность ∇ формулой

$$\nabla_X Y = \nabla^g_X Y + g(X,Y)V - g(V,Y)X, \tag{1}$$

где V — некоторое фиксированное левоинвариантное векторное поле, X и Y — произвольные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивиты. Связность ∇

Klepikov, P.N.,Rodionov, E.D., Khromova, O.P., Invariant Ricci solitons on three-dimensional nonunimodular Lie groups with a left-invariant Lorentzian metric and a semisymmetric connection.

Работа поддержана РНФ (грант 22-21-00111).

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

является метрической и впервые описана Э. Картаном в [1]. Класс метрических связностей, определяемых данным образом, содержит связность Леви-Чивиты и играет важную роль в исследованиях по римановой геометрии (см. [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]).

Тензор кривизны и тензор Риччи связности ∇ определяются соответственно равенствами

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \quad r(X,Y) = \mathrm{tr}(Z \to R(X,Z)Y).$$

Отметим, что, в отличие от случая связности Леви-Чивиты, в данном случае тензор Риччи не обязан быть симметричным. Однако верна следующая теорема

Теорема 1 ([9, 10])**.** *Пусть (M,g) — (псевдо)риманово многообразие с полусимметрической связностью. Тензор Риччи является симметричным тогда и только тогда, когда 1-форма π, определяемая равенством $\pi(X) = g(X,V)$ для любого векторного поля X на M, замкнута, т.е. $d\pi = 0$.*

Определение 1. *Метрика g полного (псевдо)риманова многообразия (M,g) называется солитоном Риччи, если она удовлетворяет уравнению*

$$r = \Lambda g + L_P g, \tag{2}$$

где r — тензор Риччи метрики g, $L_P g$ — производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля P, константа $\Lambda \in \mathbb{R}$. Если $M = G/H$ — однородное пространство, то однородная (псевдо)риманова метрика, удовлетворяющая (2), называется однородным солитоном Риччи, а если $M = G$ — группа Ли, и поле P левоинвариантно — инвариантным солитоном Риччи.

Отметим, что векторное поле V неявно входит в уравнение (2), а в случае $V = 0$ мы получаем классическое определение солитона Риччи. Заметим также, что производная Ли имеет вид: $L_P g(X,Y) = Pg(X,Y) + g([X,P],Y) + g(X,[Y,P])$. Если солитон Риччи инвариантен, то $L_P g(X,Y) = g([X,P],Y) + g(X,[Y,P])$ для произвольных левоинвариантных векторных полей.

Определение 2. *Метрика g (псевдо)риманова многообразия (M,g) называется тривиальным солитоном Риччи, если $L_P g = \tau g$ при некоторой константе $\tau \in \mathbb{R}$.*

Заметим, что ранее инвариантные солитоны Риччи изучались Л.Цербо, П.Н. Клепиковым и Д.Н. Оскорбиным [11, 12].

Теорема 2 ([11])**.** *Для любой конечномерной унимодулярной группы Ли с левоинварнтной римановой метрикой и связностью Леви-Чивиты все инвариантные солитоны Риччи тривиальны.*

Теорема 3 ([12])**.** *Для любой неунимодулярной группы Ли G ($\dim G \leq 4$) с левоинварнтной римановой метрикой и связностью Леви-Чивиты все инвариантные солитоны Риччи тривиальны.*

Как следствие, возникла гипотеза Л.Цербо о том, что все инвариантные солитоны Риччи на группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой и связностью Леви-Чивиты тривиальны. В данной работе исследуется лоренцев случай с полусимметрическими связностями.

Пусть далее $M = G$ — группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Фиксируем базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ левоинваринтных векторных полей в $\mathfrak{g}$ и положим

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k, \quad g(e_i, e_j) = g_{ij}, \quad c_{ijs} = c_{ij}^k g_{ks},$$

где c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли, g_{ij} — компоненты метрического тензора.

Зафиксируем некоторое инвариантное векторное поле V, с помощью которого определим на G полусимметрическую связность ∇.

Согласно (1) компоненты связности ∇ задаются формулами

$$\Gamma_{ij}^k = (\Gamma^g)_{ij}^k + g_{ij} V^k - g_{sj} V^s \delta_i^k,$$

где $(\Gamma^g)_{ij}^s = \frac{1}{2} g^{ks}(c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij})$ — компоненты связности Леви-Чивита ∇^g, $\|g^{ks}\|$ — матрица обратная к $\|g_{ks}\|$, δ_i^k — символ Кронекера.

Аналогично общему случаю определим тензор кривизны R и тензор Риччи r. В базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ их компоненты соответственно есть

$$R_{ijks} = \left(\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p + c_{ij}^l \Gamma_{lk}^p\right) g_{ps}, \quad r_{ik} = R_{ijks} g^{js}.$$

Пусть P — левоинвариантное векторное поле. Тогда (2) можно переписать в терминах структурных констант алгебры Ли

$$r_{ij} = \Lambda g_{ij} - P^k (c_{ki}^s g_{sj} + c_{kj}^s g_{si}), \tag{3}$$

где r_{ij} — компоненты тензора Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$, g_{ij} — компоненты метрического тензора, P^k — координаты левоинвариантного векторного поля, c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

В дальнейшем под «метрической группой Ли $(G, \mathfrak{g}, V)$» будем понимать группу Ли G с левоинвариантной лоренцевой метрикой и полусимметрической связностью, которую порождает левоинвариантное векторное поле $V \in \mathfrak{g}$.

Справедливы следующие утверждения

Лемма 1 ([13])**.** *Если метрическая группа Ли $(G, \mathfrak{g}, V)$ удовлетворяет уравнению солитона Риччи, то в произвольном базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ выполняется соотношение*

$$V^i g_{ij} c_{kt}^j = 0; \tag{4}$$

или в инвариантной форме

$$g\left(V, [X, Y]\right) = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Здесь c_{kt}^j — структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$, определяемые разложением $[e_k, e_t] = c_{kt}^j e_j$.

Лемма 2 ([13])**.** *Инвариантный солитон Риччи тривиален тогда и только, когда выполняется*

$$P^k (c_{ki}^s g_{sj} + c_{kj}^s g_{si}) = \tau g_{ij}. \tag{5}$$

Рассмотрим далее трехмерный случай.

Соответствующая классификация базисов трехмерных метрических групп Ли получена в [14, 15, 16].

Теорема 4. *Пусть G — трехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. Тогда в алгебре Ли группы G существует псевдо-ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G содержится в следующем списке:*

(1) *Случай $\mathcal{A}$:*

$$[e_1,e_2]=0,\ [e_1,e_3]=\alpha_1\sin\alpha_3\,e_1-\alpha_2\cos\alpha_3\,e_2,\ [e_2,e_3]=\alpha_1\cos\alpha_3\,e_1+\alpha_2\sin\alpha_3\,e_2,$$

с времениподобным e_3 и $\sin\alpha_3\neq 0$, $\alpha_1+\alpha_2\neq 0$, $\alpha_1\geqslant 0$, $\alpha_2\geqslant 0$;

(2) *Случай $\mathcal{B}$:*

$$[e_1,e_2]=0,\quad [e_1,e_3]=\alpha_3e_1-\alpha_4e_2,\quad [e_2,e_3]=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2,$$

с ненулевыми $\langle e_2,e_2\rangle=-\langle e_1,e_3\rangle=1$ и $\alpha_2\neq\alpha_3$;

(3) *Случай $\mathcal{C}_1$:*

$$[e_1,e_2]=0,\quad [e_1,e_3]=\alpha_3e_1+\alpha_1e_2,\quad [e_2,e_3]=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2,$$

с времениподобным e_2 и $\alpha_2\neq\alpha_3$;

(4) *Случай $\mathcal{C}_2$:*

$$[e_1,e_2]=0,\quad [e_1,e_3]=\alpha_2e_1-\alpha_3e_2,\quad [e_2,e_3]=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2,$$

с времениподобным e_2 и $\alpha_2\neq 0$, $\alpha_1+\alpha_3\neq 0$.

Основным результатом данной работы является

Теорема 5. *Пусть (G,g,∇) — трехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой g и полусимметрической связностью ∇, отличной от связности Леви-Чивиты. Тогда все нетривиальные инвариантные солитоны Риччи групп Ли (G,g,∇) исчерпываются списком:*
Случай $\mathcal{A}$:

1. $\Lambda=2(V^3)^2\neq 0,\ V=\left(0,0,V^3\right),\ P=\left(0,P^2,V^3\right),\ \alpha_1=\delta V^3,\ \alpha_2=0,\ \alpha_3=\delta\dfrac{\pi}{2},$ $\delta=\pm1$.

2. $\Lambda=2(V^3)^2\neq 0,\ V=\left(0,0,V^3\right),\ P=\left(P^1,0,V^3\right),\ \alpha_1=0,\ \alpha_2=\delta V^3,\ \alpha_3=\delta\dfrac{\pi}{2},$ $\delta=\pm1$.

3. $\Lambda=-\dfrac{2(V^3)^3(\sin^2(\alpha_3)V^3-2\sin^2(\alpha_3)P^3+\cos^2(\alpha_3)V^3-V^3)}{\sin^2(\alpha_3)(V^3-2P^3)^2},\ V=\left(0,0,V^3\right),$ $P=\left(0,0,P^3\right),\ \alpha_1=\alpha_2=-\dfrac{(V^3)^2}{\sin(\alpha_3)(V^3-2P^3)},\ V^3P^3\neq 0.$

4. $\Lambda=V^3P^3,\ V=\left(0,0,V^3\right),\ P=\left(0,0,\dfrac{1}{2}P^3\right),\ P^3=V^3+\delta\alpha_1+\delta\sqrt{(V^3)^2-\alpha_1^2}$ $\alpha_2=\sqrt{(V^3)^2-\alpha_1^2},\ \alpha_3=\delta\dfrac{\pi}{2},\ \delta=\pm1,\ V^3\neq-\delta\alpha_1.$

Случай $\mathcal{B}$:

1. $V=\left(V^1,0,0\right),\ P=\left(\dfrac{(V^1+\alpha_2)^2\alpha_2^2-\Lambda\alpha_1^2}{4\alpha_2^3},\dfrac{\Lambda\alpha_1}{2\alpha_2^2},-\dfrac{\Lambda}{2\alpha_2}\right),\ \alpha_3=2\alpha_2,\ \alpha_4=0,$ $\Lambda\neq 0,\ V^1\neq-\alpha_2.$

2. $\Lambda=0,\ V=\left(V^1,0,0\right),\ P=\left(\dfrac{(V^1+\alpha_2)(V^1+\alpha_3-\alpha_2)\alpha_2\alpha_3}{2\alpha_2\alpha_3^2},0,0\right),\ \alpha_4=0,$ $V^1\notin\{-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3\}.$

3. $\Lambda=0,\ V=\left(V^1,0,0\right),\ P=\left(\dfrac{V^1(\alpha_3+V^1)-2P^2\alpha_1}{2\alpha_3},P^2,0\right),\ \alpha_2=0,\ \alpha_4=0,$ $V1\notin\{0,-\alpha_3\}.$

4. $\Lambda=0,\ V=\left(-\dfrac{V^2\alpha_1}{\alpha_3},V^2,0\right),\ P=\left(\dfrac{\alpha_1((V^2)^2\alpha_1-2P^2\alpha_3^2)}{2\alpha_3^3},P^2,-\dfrac{(V^2)^2}{\alpha_3}\right),$ $\alpha_2=0,\ \alpha_4=0,\ V^2\alpha_1\neq 0.$

Случай $\mathcal{C}_1$:

1. $\Lambda=-2\alpha_3^2\neq 0,\ V=(0,0,-\alpha_3),\ P=\left(0,P^2,-\alpha_3\right).$
2. $\Lambda=-2\alpha_2^2\neq 0,\ V=(0,0,-\alpha_2),\ P=\left(P^1,0,-\alpha_2\right),\ \alpha_1=0.$

Случай $\mathcal{C}_2$:

1. $\Lambda=-2\alpha_2^2+2\alpha_3^2+2\alpha_2\delta\sqrt{2\alpha_2^2-2\alpha_3^2},\ V=\left(0,0,\delta\sqrt{2\alpha_2^2-2\alpha_3^2}\right),$

$$P=\left(0,0,\frac{1}{2}\delta\sqrt{2\alpha_2^2-2\alpha_3^2}-\alpha_2\right),\ \alpha_1=\alpha_3,\ \delta=\pm1.$$

2. $\Lambda=4\alpha_2^2,\ \ V=\left(\delta_2\sqrt{2\sqrt{2}-2}\alpha_2,\delta_2\sqrt{2\sqrt{2}-2}\alpha_2\delta_1(1+\sqrt{2}),0\right),$

$$P=\left(\delta_2(2+\sqrt{2})\alpha_2\sqrt{2\sqrt{2}-2}-P^2\delta_1\sqrt{2}-P^2\delta_1,P^2,-2\alpha_2\right),$$

$$\alpha_1=\delta_1(1+\sqrt{2})\alpha_2,\ \alpha_3=\alpha_2\delta_1(1-\sqrt{2}),\ \delta_1=\pm1,\ \delta_2=\pm1.$$

2. Инвариантные солитоны Риччи трехмерных неунимодулярных метрических групп Ли

В данном разделе докажем теорему 5. Для этого рассмотрим систему уравнений (3), определяющую инвариантные солитоны Риччи, систему уравнений (4) определяющую симметричность тензора Риччи, а также систему уравнений (5) — условие тривиальности инвариантного солитона. Заметим, что в силу тензорного вида левой и правой частей уравнения (3) все вычисления достаточно провести для базиса теоремы 4.

Случай $\mathcal{A}$. Условие (4) в данном случае запишется в виде

$$\cos(\alpha_3)V^1\alpha_1+\sin(\alpha_3)V^2\alpha_2=0,\quad \sin(\alpha_3)V^1\alpha_1-\cos(\alpha_3)V^2\alpha_2=0.$$

Поэтому имеет место один из следующих случаев

(i) $V=\left(0,0,V^3\right)$;
(ii) $V=\left(0,V^2,V^3\right)$ и $\alpha_2=0$;
(iii) $V=\left(V^1,0,V^3\right)$ и $\alpha_1=0$.

Рассмотрим их последовательно.

(i) В данном случае уравнение солитона (3) имеет вид

$$
\begin{gathered}
0=-P^1\alpha_1\sin(\alpha_3)-P^2\alpha_1\cos(\alpha_3),\\
0=P^1\alpha_2\cos(\alpha_3)-P^2\alpha_2\sin(\alpha_3),\\
\cos(\alpha_3)\sin(\alpha_3)\alpha_1^2-\alpha_2^2\sin(\alpha_3)\cos(\alpha_3)+\frac{1}{2}\cos(\alpha_3)V^3\alpha_1-\frac{1}{2}\cos(\alpha_3)V^3\alpha_2=\\
=-P^3(\alpha_2\cos(\alpha_3)-\alpha_1\cos(\alpha_3)),\\
\frac{1}{2}\cos^2(\alpha_3)\alpha_1^2+\cos^2(\alpha_3)\alpha_1\alpha_2+\frac{1}{2}\cos^2(\alpha_3)\alpha_2^2-\sin(\alpha_3)V^3\alpha_1-\\
-\alpha_1^2-\sin(\alpha_3)V^3\alpha_2-\alpha_2^2=-\Lambda,\\
-\frac{3}{2}\cos^2(\alpha_3)\alpha_1^2-\cos^2(\alpha_3)\alpha_1\alpha_2+\frac{1}{2}\cos^2(\alpha_3)\alpha_2^2+2\sin(\alpha_3)V^3\alpha_1+\\
+\sin(\alpha_3)V^3\alpha_2+(V^3)^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1^2=2P^3\alpha_1\sin(\alpha_3)+\Lambda,\\
\frac{1}{2}\cos^2(\alpha_3)\alpha_1^2-\cos^2(\alpha_3)\alpha_1\alpha_2-\frac{3}{2}\cos^2(\alpha_3)\alpha_2^2+\sin(\alpha_3)V^3\alpha_1+\\
+2\sin(\alpha_3)V^3\alpha_2+(V^3)^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2=2P^3\alpha_2\sin(\alpha_3)+\Lambda.
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Решениями системы равенств (6) являются

(1) $\Lambda=0$, $V=\big(0,0,V^3\big)$, $P=\big(0,P^2,0\big)$, $\alpha_1=-\delta V^3$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=\delta\dfrac{\pi}{2}$, $\delta=\pm1$,

(2) $\Lambda=0$, $V=\big(0,0,V^3\big)$, $P=\big(P^1,0,0\big)$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=-\delta V^3$, $\alpha_3=\delta\dfrac{\pi}{2}$, $\delta=\pm1$,

(3) $\Lambda=2(V^3)^2$, $V=\big(0,0,V^3\big)$, $P=\big(0,P^2,V^3\big)$, $\alpha_1=\delta V^3$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=\delta\dfrac{\pi}{2}$, $\delta=\pm1$,

(4) $\Lambda=2(V^3)^2$, $V=\big(0,0,V^3\big)$, $P=\big(P^1,0,V^3\big)$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\delta V^3$, $\alpha_3=\delta\dfrac{\pi}{2}$, $\delta=\pm1$,

(5) $\Lambda=-\dfrac{2(V^3)^3(\sin^2(\alpha_3)[V^3-2P^3]+\cos^2(\alpha_3)V^3-V^3)}{\sin^2(\alpha_3)(V^3-2P^3)^2}$, $V=\big(0,0,V^3\big)$, $P=\big(0,0,P^3\big)$, $\alpha_1=\alpha_2=-\dfrac{(V^3)^2}{\sin(\alpha_3)(V^3-2P^3)}$,

(6) $\Lambda=(V^3)^2+\delta V^3\alpha_1+\delta V^3\sqrt{(V^3)^2-\alpha_1^2}$, $V=\big(0,0,V^3\big)$, , $\delta=\pm1$ $P=\Big(0,0,\frac{1}{2}V^3+\frac{1}{2}\delta\alpha_1+\frac{1}{2}\delta\sqrt{(V^3)^2-\alpha_1^2}\Big)$, $\alpha_2=\sqrt{(V^3)^2-\alpha_1^2}$, $\alpha_3=\delta\dfrac{\pi}{2}$.

Проверим, какие из полученных солитонов тривиальны, а какие нет.

Заметим, что в рассматриваемом случае условие (5) тривиальности солитона, равносильно системе уравнений вида

$$
\begin{gathered}
P^3(\alpha_2\cos(\alpha_3)-\alpha_1\cos(\alpha_3))=0,\quad P^3\alpha_1\sin(\alpha_3)=0,\quad P^3\alpha_2\sin(\alpha_3)=0,\\
P^1\alpha_1\sin(\alpha_3)+P^2\alpha_1\cos(\alpha_3)=0,\quad -P^1\alpha_2\cos(\alpha_3)+P^2\alpha_2\sin(\alpha_3)=0.
\end{gathered}
\tag{7}
$$

1. Пусть $\Lambda=0$, $V=\big(0,0,V^3\big)$, $P=\big(0,P^2,0\big)$, $\alpha_1=-\delta V^3$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=\delta\dfrac{\pi}{2}$, $\delta=\pm1$. Непосредственной подстановкой в систему (7) убеждаемся, что данное решение является тривиальным солитоном Риччи.

2. Пусть $\Lambda = 0$, $V = \big(0,0,V^3\big)$, $P = \big(P^1,0,0\big)$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -\delta V^3$, $\alpha_3 = \delta\dfrac{\pi}{2}$, $\delta = \pm 1$. Непосредственной подстановкой в систему (7) убеждаемся, что данное решение является тривиальным солитоном Риччи.

3. Пусть $\Lambda = 2(V^3)^2$, $V = \big(0,0,V^3\big)$, $P = \big(0,P^2,V^3\big)$, $\alpha_1 = \delta V^3$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \delta\dfrac{\pi}{2}$, $\delta = \pm 1$. Непосредственной подстановкой в систему (7) убеждаемся, что данное решение является тривиальным солитоном Риччи тогда и только тогда, когда $V^3 = 0$.

4. Пусть $\Lambda = 2(V^3)^2$, $V = \big(0,0,V^3\big)$, $P = \big(P^1,0,V^3\big)$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \delta V^3$, $\alpha_3 = \delta\dfrac{\pi}{2}$, $\delta = \pm 1$. Непосредственной подстановкой в систему (7) убеждаемся, что данное решение является тривиальным солитоном Риччи тогда и только тогда, когда $V^3 = 0$.

5. Пусть $\Lambda = -\dfrac{2(V^3)^3(\sin^2(\alpha_3)V^3 - 2\sin^2(\alpha_3)P^3 + \cos^2(\alpha_3)V^3 - V^3)}{\sin^2(\alpha_3)(V^3-2P^3)^2}$, $V = \big(0,0,V^3\big)$, $P = \big(0,0,P^3\big)$, $\alpha_1 = \alpha_2 = -\dfrac{(V^3)^2}{\sin(\alpha_3)(V^3-2P^3)}$. Непосредственной подстановкой в систему (7) убеждаемся, что данное решение является тривиальным солитоном Риччи тогда и только тогда, когда $V^3 = 0$ или $P^3 = 0$.

6. Пусть $\Lambda = (V^3)^2 + \delta V^3\alpha_1 + \delta V^3\sqrt{(V^3)^2-\alpha_1^2}$, $V = \big(0,0,V^3\big)$, $\delta = \pm 1$, $P = \Big(0,0,\tfrac{1}{2}V^3 + \tfrac{1}{2}\delta\alpha_1 + \tfrac{1}{2}\delta\sqrt{(V^3)^2-\alpha_1^2}\Big)$, $\alpha_2 = \sqrt{(V^3)^2-\alpha_1^2}$, $\alpha_3 = \delta\dfrac{\pi}{2}$. Непосредственной подстановкой в систему (7) убеждаемся, что данное решение является тривиальным солитоном Риччи тогда и только тогда, когда $V^3 = -\delta\alpha_1$.

(ii) В данном случае уравнение солитона (3) примет вид

$$
\begin{gathered}
-V^2V^3 = 0,\\
-\frac{1}{2}\alpha_1\cos(\alpha_3)V^2 = -P^1\alpha_1\sin(\alpha_3) - P^2\alpha_1\cos(\alpha_3),\\
\cos(\alpha_3)\sin(\alpha_3)\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\cos(\alpha_3)V^3\alpha_1 = P^3\alpha_1\cos(\alpha_3),\\
\frac{1}{2}\cos^2(\alpha_3)\alpha_1^2 + \sin(\alpha_3)V^3\alpha_1 + (V^3)^2 = \Lambda,\\
\frac{1}{2}\cos^2(\alpha_3)\alpha_1^2 - \sin(\alpha_3)V^3\alpha_1 + (V^2)^2 - \alpha_1^2 = -\Lambda,\\
-\frac{3}{2}\cos^2(\alpha_3)\alpha_1^2 + 2\sin(\alpha_3)V^3\alpha_1 + (V^3)^2 - (V^2)^2 + \alpha_1^2 = 2P^3\alpha_1\sin(\alpha_3) + \Lambda.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Из первого уравнения системы заключаем, что либо $V^2 = 0$, либо $V^3 = 0$. Если $V^2 = 0$, то попадаем в рассмотренный выше случай (i). Если $V^3 = 0$, то система (8) преобразуется к виду

$$
\begin{gathered}
-\frac{1}{2}\alpha_1\cos(\alpha_3)V^2 = -P^1\alpha_1\sin(\alpha_3) - P^2\alpha_1\cos(\alpha_3),\\
\cos(\alpha_3)\sin(\alpha_3)\alpha_1^2 = P^3\alpha_1\cos(\alpha_3),\\
\frac{1}{2}\cos^2(\alpha_3)\alpha_1^2 = \Lambda,\\
\frac{1}{2}\cos^2(\alpha_3)\alpha_1^2 + (V^2)^2 - \alpha_1^2 = -\Lambda,\\
-\frac{3}{2}\cos^2(\alpha_3)\alpha_1^2 - (V^2)^2 + \alpha_1^2 = 2P^3\alpha_1\sin(\alpha_3) + \Lambda.
\end{gathered}
$$

Данная система имеет четыре решения: $\Lambda = 0$, $V = (0, \pm\alpha_1, 0)$, $P = \big(0, P^2, 0\big)$, $\alpha_3 = \pm\dfrac{\pi}{2}$. Непосредственной подстановкой в условие (5) убеждаемся, что данные солитоны являются тривиальными.

(iii) В данном случае (аналогично случаю (ii)) находим четыре решения системы (3): $\Lambda = 0$, $V = (\pm\alpha_2, 0, 0)$, $P = \big(P^1, 0, 0\big)$, $\alpha_3 = \pm\dfrac{\pi}{2}$. Затем убеждаемся, что данные солитоны являются тривиальными.

Случай $\mathcal{B}$. В данном случае уравнение солитона (3) имеет вид

$$
\begin{gathered}
(V^3)^2 = 0,\\
-\frac{1}{2}(\alpha_4 + 2V^2)V^3 = -P^3\alpha_4,\\
-V^1V^2 + \frac{1}{2}V^1\alpha_4 - \alpha_2V^2 + \alpha_2\alpha_4 = P^1\alpha_4 - P^2\alpha_2 - P^3\alpha_1,\\
\frac{1}{2}V^1\alpha_4 - V^1V^2 - \alpha_1V^3 + \alpha_2\alpha_4 = P^1\alpha_4 - P^2\alpha_2 - P^3\alpha_1,\\
2V^3V^1 + 2\alpha_2V^3 + \alpha_3V^3 - \frac{1}{2}\alpha_4^2 = 2P^3\alpha_2 + \Lambda,\\
-\frac{1}{2}\alpha_4^2 + (V^2)^2 - \alpha_3V^3 + \frac{1}{2}\alpha_4V^2 - V^3V^1 - \alpha_2V^3 = -P^3\alpha_3 - \Lambda,\\
-V^3V^1 - \alpha_2V^3 - 2\alpha_3V^3 - \frac{1}{2}\alpha_4V^2 - \frac{1}{2}\alpha_4^2 + (V^2)^2 = -P^3\alpha_3 - \Lambda,\\
(V^1)^2 + V^1\alpha_3 + V^2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3 = 2P^1\alpha_3 + 2P^2\alpha_1.
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Из первого уравнения системы сразу же получаем $V^3 = 0$.

Условие (4) в данном случае запишется в виде

$$V^2\alpha_2 = 0, \quad V^2\alpha_4 = 0.$$

Поэтому имеет место одна из следующих возможностей

(i) $V = \big(V^1, 0, 0\big)$;

(ii) $V = \big(V^1, V^2, 0\big)$ и $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$.

Рассмотрим их последовательно.

(i) В данном случае уравнение солитона (3) имеет вид

$$
\begin{gathered}
0 = -P^3\alpha_4,\\
\frac{1}{2}V^1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_4 = P^1\alpha_4 - P^2\alpha_2 - P^3\alpha_1,\\
-\frac{1}{2}\alpha_4^2 = 2P^3\alpha_2 + \Lambda,\\
-\frac{1}{2}\alpha_4^2 = -P^3\alpha_3 - \Lambda,\\
(V^1)^2 + V^1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3 = 2P^1\alpha_3 + 2P^2\alpha_1.
\end{gathered}
$$

Из первого, третьего и четвертого уравнений следует, что $\alpha_4 = 0$, и система упрощается ещё раз

$$
\begin{gathered}
0 = -P^2\alpha_2 - P^3\alpha_1,\\
0 = 2P^3\alpha_2 + \Lambda,\\
0 = -P^3\alpha_3 - \Lambda,\\
(V^1)^2 + V^1\alpha_3 - \alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3 = 2P^1\alpha_3 + 2P^2\alpha_1.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Решениями системы равенств (10) являются

(1) $V=\big(V^1,0,0\big)$, $P=\left(\dfrac{(V^1+\alpha_2)^2\alpha_2^2-\Lambda\alpha_1^2}{4\alpha_2^3},\dfrac{\Lambda\alpha_1}{2\alpha_2^2},-\dfrac{\Lambda}{2\alpha_2}\right)$, $\alpha_3=2\alpha_2$, $\alpha_4=0$,

(2) $\Lambda=0$, $V=\big(V^1,0,0\big)$, $P=\left(\dfrac{(V^1+\alpha_2)(V^1+\alpha_3-\alpha_2)\alpha_2\alpha_3}{2\alpha_2\alpha_3^2},0,0\right)$, $\alpha_4=0$,

(3) $\Lambda=0$, $V=\big(V^1,0,0\big)$, $P=\left(\dfrac{V^1(\alpha_3+V^1)-2P^2\alpha_1}{2\alpha_3},P^2,0\right)$, $\alpha_2=0$, $\alpha_4=0$,

(4) $\Lambda=0$, $V=(\pm\alpha_2,0,0)$, $P=\big(P^1,0,0\big)$, $\alpha_3=0$, $\alpha_4=0$.

Проверим, какие из полученных солитонов тривиальны, а какие нет.

Заметим, что в рассматриваемом случае условие тривиальности солитона (5) равносильно системе уравнений вида

$$P^3\alpha_3=0,\quad P^3\alpha_2=0,\quad P^1\alpha_3+P^2\alpha_1=0,\quad P^2\alpha_2+P^3\alpha_1=0. \tag{11}$$

1. Пусть $V=\big(V^1,0,0\big)$, $P=\left(\dfrac{(V^1+\alpha_2)^2\alpha_2^2-\Lambda\alpha_1^2}{4\alpha_2^3},\dfrac{\Lambda\alpha_1}{2\alpha_2^2},-\dfrac{\Lambda}{2\alpha_2}\right)$, $\alpha_3=2\alpha_2$, $\alpha_4=0$. Непосредственной подстановкой в систему (11) убеждаемся, что данное решение является тривиальным солитоном Риччи тогда и только тогда, когда $\Lambda=0$ и $V^1=-\alpha_2$.

2. Пусть $\Lambda=0$, $V=\big(V^1,0,0\big)$, $P=\left(\dfrac{(V^1+\alpha_2)(V^1+\alpha_3-\alpha_2)\alpha_2\alpha_3}{2\alpha_2\alpha_3^2},0,0\right)$, $\alpha_4=0$. Непосредственной подстановкой в систему (11) убеждаемся, что данное решение является тривиальным солитоном Риччи тогда и только тогда, когда $V^1=-\alpha_2$ или $V^1=\alpha_2-\alpha_3$.

3. Пусть $\Lambda=0$, $V=\big(V^1,0,0\big)$, $P=\left(\dfrac{V^1(\alpha_3+V^1)-2P^2\alpha_1}{2\alpha_3},P^2,0\right)$, $\alpha_2=0$, $\alpha_4=0$. Непосредственной подстановкой в систему (11) убеждаемся, что данное решение является тривиальным солитоном Риччи тогда и только тогда, когда $V^1=0$ или $V^1=-\alpha_3$.

4. Пусть $\Lambda=0$, $V=(\pm\alpha_2,0,0)$, $P=\big(P^1,0,0\big)$, $\alpha_3=0$, $\alpha_4=0$. Непосредственной подстановкой в систему (11) убеждаемся, что данное решение является тривиальным солитоном Риччи.

(ii) В данном случае уравнение солитона (3) имеет вид

$$\begin{gathered}-V^1V^2=-P^3\alpha_1,\\ 0=\Lambda,\\ (V^2)^2=-P^3\alpha_3-\Lambda,\\ (V^1)^2+V^1\alpha_3+V^2\alpha_1=2P^1\alpha_3+2P^2\alpha_1.\end{gathered} \tag{12}$$

Решениеми системы равенств (12) является: $\Lambda=0$, $V=\left(-\dfrac{V^2\alpha_1}{\alpha_3},V^2,0\right)$, $P=\left(\dfrac{\alpha_1((V^2)^2\alpha_1-2P^2\alpha_3^2)}{2\alpha_3^3},P^2,-\dfrac{(V^2)^2}{\alpha_3}\right)$, $\alpha_2=0$, $\alpha_4=0$. Непосредственной подстановкой в систему (5) убеждаемся, что данное решение является тривиальным солитоном Риччи тогда и только тогда, когда $V^2=0$ или $\alpha_1=0$.

Случай $\mathcal{C}_1$. Условие (4) запишется в виде

$$V^1\alpha_1-V^2\alpha_2=0,\quad V^1\alpha_3-V^2\alpha_1=0.$$

Поэтому имеет место один из следующих случаев

(i) $V = \big(0, V^2, V^3\big)$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$;
(ii) $V = \big(0, 0, V^3\big)$ и $\alpha_2 = 0$;
(iii) $V = \big(V^1, V^1\alpha_1/\alpha_2, V^3\big)$ и $\alpha_3 = \alpha_1^2/\alpha_2$.

Рассмотрим их последовательно.

(i) В данном случае уравнение солитона (3) примет вид

$$\begin{gathered} 0 = -P^1\alpha_3, \\ -V^2V^3 = 0, \\ (V^3)^2 - V^3\alpha_3 = -\Lambda, \\ (V^2)^2 + V^3\alpha_3 - \alpha_3^2 = \Lambda, \\ (V^2)^2 - (V^3)^2 + 2V^3\alpha_3 - \alpha_3^2 = 2P^3\alpha_3 + \Lambda. \end{gathered} \tag{13}$$

Решениями системы равенств (13) являются

(1) $\Lambda = 0$, $V = (0, \pm\alpha_3, 0)$, $P = \big(0, P^2, 0\big)$,
(2) $\Lambda = -2\alpha_3^2$, $V = (0, 0, -\alpha_3)$, $P = \big(0, P^2, -\alpha_3\big)$,
(3) $\Lambda = 0$, $V = (0, 0, \alpha_3)$, $P = \big(0, P^2, 0\big)$.

Проверим, какие из полученных солитонов тривиальны, а какие нет.

Заметим, что в рассматриваемом случае условие тривиальности солитона (5) равносильно следующей системе уравнений

$$P^1\alpha_3 = 0, \quad P^3\alpha_3 = 0.$$

Таким образом, солитоны 1 и 3 являются тривиальными, а солитон 2 — нет.

(ii) В данном случае уравнение солитона (3) имеет вид

$$\begin{gathered} 0 = P^1\alpha_1, \\ 0 = -P^1\alpha_3 - P^2\alpha_1, \\ -\alpha_1\alpha_3 = 0, \\ V^3\alpha_3 - \alpha_3^2 = \Lambda, \\ (V^3)^2 - V^3\alpha_3 = -\Lambda, \\ -(V^3)^2 + 2V^3\alpha_3 - \alpha_3^2 = 2P^3\alpha_3 + \Lambda. \end{gathered}$$

Так как $\alpha_3 \neq \alpha_2 = 0$, то из третьего уравнения системы получаем $\alpha_1 = 0$. Но тогда мы возвращаемся к случаю (i). Таким образом, в этом случае новых решений нет.

(iii) В данном случае уравнение солитона (3) примет вид

$$\begin{gathered}
\frac{\alpha_2^3 - 2V^3\alpha_2^2 + ((V^1)^2 + (V^3)^2 + \alpha_1^2)\alpha_2 - V^3\alpha_1^2}{\alpha_2} = -2P^3\alpha_2 - \Lambda, \\
\frac{(V^1)^2\alpha_1^2 - (V^3)^2\alpha_2^2 + 2V^3\alpha_1^2\alpha_2 + V^3\alpha_2^3 - \alpha_1^4 - \alpha_1^2\alpha_2^2}{\alpha_2} = 2P^3\alpha_1^2 + \Lambda\alpha_2, \\
\frac{(V^1)^2\alpha_1^2 - (V^1)^2\alpha_2^2 + V^3\alpha_1^2\alpha_2 + V^3\alpha_2^3 - \alpha_1^4 - \alpha_2^4}{\alpha_2^2} = \Lambda, \\
(V^3\alpha_2 - \alpha_1^2)V^1 = -\alpha_1(P^1\alpha_1 + P^2\alpha_2), \\
-\alpha_1((V^1)^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2) = 0, \\
-\frac{(V^3 - \alpha_2)V^1\alpha_1}{\alpha_2} = P^1\alpha_1 + P^2\alpha_2.
\end{gathered} \tag{14}$$

Решениями системы равенств (14) являются

(1) $\Lambda = 0$, $V = (0, 0, \alpha_2)$, $P = \left(P^1, 0, 0\right)$, $\alpha_1 = 0$,
(2) $\Lambda = -2\alpha_2^2$, $V = (0, 0, -\alpha_2)$, $P = \left(P^1, 0, -\alpha_2\right)$, $\alpha_1 = 0$.

Заметим, что в рассматриваемом случае условие тривиальности солитона (5) равносильно системе уравнений вида

$$P^3\alpha_2 = 0, \quad \frac{P^3\alpha_1^2}{\alpha_2} = 0, \quad \frac{P^1\alpha_1^2}{\alpha_2} + P^2\alpha_1 = 0, \quad P^1\alpha_1 + P^2\alpha_2 = 0.$$

Таким образом, солитон 1 является тривиальными, а солитон 2 — нет.

Случай $\mathcal{C}_2$. Условие (4) запишется в виде

$$V^1\alpha_1 - V^2\alpha_2 = 0, \quad V^1\alpha_2 + V^2\alpha_3 = 0.$$

Поэтому имеет место один из следующих случаев

(i) $V = \left(0, 0, V^3\right)$;
(ii) $V = \left(V^1, V^1\alpha_1/\alpha_2, V^3\right)$ и $\alpha_3 = -\alpha_2^2/\alpha_1$.

Рассмотрим их последовательно.

(i) В данном случае уравнение солитона (3) имеет вид

$$\begin{gathered}
0 = -P^1\alpha_2 - P^2\alpha_1, \\
0 = -P^1\alpha_3 + P^2\alpha_2, \\
\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3)(V^3 - 2\alpha_2) = P^3(\alpha_1 + \alpha_3), \\
(V^3)^2 - 3\alpha_2V^3 + 2\alpha_2^2 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 = -2P^3\alpha_2 - \Lambda, \\
-\frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 - (V^3)^2 + 3\alpha_2V^3 - 2\alpha_2^2 = 2P^3\alpha_2 + \Lambda, \\
\frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 + 2\alpha_2V^3 - 2\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_3 = \Lambda.
\end{gathered} \tag{15}$$

Система (15) имеет единственное решение: $\Lambda = -2\alpha_2^2 + 2\alpha_3^2 + 2\alpha_2\delta\sqrt{2\alpha_2^2 - 2\alpha_3^2}$, $V = \left(0, 0, \delta\sqrt{2\alpha_2^2 - 2\alpha_3^2}\right)$, $P = \left(0, 0, \frac{1}{2}\delta\sqrt{2\alpha_2^2 - 2\alpha_3^2} - \alpha_2\right)$, $\alpha_1 = \alpha_3$, $\delta = \pm 1$. Непосредственной подстановкой в систему (5) убеждаемся, что данное решение является нетривиальным солитоном Риччи.

(ii) В данном случае уравнение солитона (3) имеет вид

$$
\begin{gathered}
\frac{(2(V^1)^2+2(V^3)^2-6V^3\alpha_2+4\alpha_2^2)\alpha_1^2+\alpha_2^4-\alpha_1^4}{2\alpha_1^2}=-2P^3\alpha_2-\Lambda,\\
\frac{V^1(2V^3\alpha_2-\alpha_1^2-\alpha_2^2)}{2\alpha_2}=-P^1\alpha_2-P^2\alpha_1,\\
\frac{(2(V^1)^2-\alpha_2^2)\alpha_1^4-2\alpha_2^2(V^3-\alpha_2)(V^3-2\alpha_2)\alpha_1^2+\alpha_2^6}{2\alpha_1^2\alpha_2^2}=2P^3\alpha_2+\Lambda,\\
\frac{(2(V^1)^2+\alpha_2^2)\alpha_1^4+(-2(V^1)^2\alpha_2^2+4V^3\alpha_2^3-6\alpha_2^4)\alpha_1^2+\alpha_2^6}{2\alpha_1^2\alpha_2^2}=\Lambda,\\
\frac{-2(V^1)^2\alpha_1^2+V^3\alpha_1^2\alpha_2-V^3\alpha_2^3-2\alpha_1^2\alpha_2^2+2\alpha_2^4}{2\alpha_2\alpha_1}=\frac{P^3(\alpha_1^2-\alpha_2^2)}{\alpha_1},\\
-\frac{V^1((2V^3-\alpha_2)\alpha_1^2-\alpha_2^3)}{2\alpha_1\alpha_2}=\frac{\alpha_2(P^1\alpha_2+P^2\alpha_1)}{\alpha_1}.
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Если сложить пятое уравнение и шестое, домноженное на α_1/α_2, то получим

$$V^1V^3(\alpha_1^2-\alpha_2^2)=0.$$

Если $V^1=0$, то мы возвращаемся к случаю (i). Случай $\alpha_1^2=\alpha_2^2$ невозможен, так как $\alpha_1\neq-\alpha_3=\alpha_2^2/\alpha_1$. Таким образом, $V^3=0$. Кроме того, выразим P^3 и Λ из первого и третьего уравнений:

$$
\begin{gathered}
P^3=\frac{-(V^1)^2\alpha_1^4+\alpha_1^2\alpha_2^4-\alpha_2^6}{2\alpha_1^2\alpha_2^3},\\
\Lambda=\frac{2(V^1)^2\alpha_1^4-2(V^1)^2\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_1^4\alpha_2^2-6\alpha_1^2\alpha_2^4+\alpha_2^6}{2\alpha_1^2\alpha_2^2}.
\end{gathered}
$$

Подставляя в (16), получим

$$
\begin{gathered}
\frac{2(V^1)^2\alpha_1^4-\alpha_1^4\alpha_2^2-4\alpha_1^2\alpha_2^4+\alpha_2^6}{2\alpha_1^2\alpha_2^2}=\frac{-2(V^1)^2\alpha_1^2+\alpha_1^4-4\alpha_1^2\alpha_2^2-\alpha_2^4}{2\alpha_1^2},\\
\frac{-(V^1)^2\alpha_1^2-\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^4}{\alpha_2\alpha_1}=-\frac{((V^1)^2\alpha_1^4-\alpha_1^2\alpha_2^4+\alpha_2^6)(\alpha_1^2-\alpha_2^2)}{2\alpha_1^3\alpha_2^3},\\
-\frac{V^1(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}{2\alpha_2}=-P^1\alpha_2-P^2\alpha_1.
\end{gathered}
$$

Выражая из первого уравнения $(V^1)^2=(\alpha_1^2-\alpha_2^2)\alpha_2^2/\alpha_1^2$ (что также дает $|\alpha_1|>|\alpha_2|$) и подставляя во второе, получим

$$\alpha_1^6-7\alpha_1^4\alpha_2^2+7\alpha_1^2\alpha_2^4-\alpha_2^6=0.$$

Из всех решений данного уравнения, условию $|\alpha_1|>|\alpha_2|$ удовлетворяют $\alpha_1=\delta_1(1+\sqrt{2})\alpha_2$, $\delta_1=\pm1$. Тогда $V^1=\delta_2\sqrt{2\sqrt{2}-2}\alpha_2$, $\delta_2=\pm1$. В системе (16) останется единственное уравнение, из которого мы выразим

$$P^1=\delta_2(2+\sqrt{2})\alpha_2\sqrt{2\sqrt{2}-2}-P^2\delta_1\sqrt{2}-P^2\delta_1.$$

Таким образом, получено решение:
$\Lambda=4\alpha_2^2$, $V=\Big(\delta_2\sqrt{2\sqrt{2}-2}\alpha_2,\delta_2\sqrt{2\sqrt{2}-2}\alpha_2\delta_1(1+\sqrt{2}),0\Big)$, $\delta_1=\pm1$, $\delta_2=\pm1$, $P=\Big(\delta_2(2+\sqrt{2})\alpha_2\sqrt{2\sqrt{2}-2}-P^2\delta_1\sqrt{2}-P^2\delta_1,P^2,-2\alpha_2\Big)$, $\alpha_1=\delta_1(1+\sqrt{2})\alpha_2$,

$\alpha_3 = \alpha_2\delta_1(1-\sqrt{2})$. Непосредственной подстановкой в систему (5) убеждаемся, что данное решение является нетривиальным солитоном Риччи. Теорема доказана.

Замечание 1. Инвариантные солитоны Риччи на трехмерных унимодулярных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и полусимметрической связностью исследовались в [17].

Замечание 2. Теорема 5 дает ответ на гипотезу Л.Цербо в лоренцевом случае. Более того, в этом случае даже для связности Леви-Чивиты существуют нетривиальные инвариантные солитоны Риччи.

References

[1] E. Cartan, *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie)*, Ann. Ecole Norm. Sup., **42** (1925), 17–88.

[2] G. Muniraja, *Manifolds Admitting a Semi-Symmetric Metric Connection and a Generalization of Schur's Theorem*, Int. J. Contemp. Math. Sci.,**3**:25 (2008), 1223–1232.

[3] I. Agricola, C. Thier, *The Geodesics of Metric Connections with Vectorial Torsion*, Annals of Global Analysis and Geometry, **26** (2004), 321–332.

[4] C. Murathan, C. Özgür, *Riemannian manifolds with a semi-symmetric metric connection satisfying some semisymmetry conditions*, Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, **57**:4 (2008), 210–216.

[5] H.B. Yilmaz, F.Ö. Zengin, S.A. Uysal, *On a Semi Symmetric Metric Connection with a Special Condition on a Riemannian Manifold*, European journal of pure and applied mathematics, **4**:2 (2011), 152–161.

[6] F.Ö. Zengin, S.A. Demirbağ, S.A. Uysal, H.B. Yilmaz, *Some vector fields on a riemannian manifold with semi-symmetric metric connection*, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, **38**:2 (2012),479–490.

[7] I. Agricola, M. Kraus, *Manifolds with vectorial torsion*, Differential Geometry and its Applications, **46** (2016), 130–147.

[8] K. Yano, *On semi-symmetric metric connection*, Revue Roumame de Math. Pure et Appliquees, **15** (1970), 1579–1586.

[9] B. Barua, A.Kr. Ray, *Some properties of a semi-symmetric metric connection in a Riemannian manifold*, Indian J. pure appl. Math, **16**:7 (1985), 736–740.

[10] U.C De, B.K. De, *Some properties of a semi-symmetric metric connection on a Riemannian manifold*, Istanbul Univ. Fen. Fak. Mat. Der, **54** (1995), 111–117.

[11] L.F. Cerbo, *Generic properties of homogeneous Ricci solitons*, Adv. Geom, **14**:2 (2014), 225–237.

[12] P.N. Klepikov, D.N. Oskorbin, *Homogeneous invariant Ricci solitons on four-dimensional Lie groups*, Izvestiya of Altai State University, **85**:1/2 (2015), 115–122.

[13] P.N. Klepikov, E.D. Rodionov, O.P. Khromova, *Invariant Ricci Solitons on Three-Dimensional Metric Lie Groups with Semi-Symmetric Connection*, Russian Mathematics, **65**:8 (2021), 70–74.

[14] E.D. Rodionov, V.V. Slavskii, L.N. Chibrikova, *Locally conformally homogeneous pseudo-Riemannian spaces*, Siberian Advances in Mathematics, **17**:3 (2007), 186–212.

[15] G. Calvaruso, *Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds*, J. Geom. Phys., **57** (2007), 1279–1291.

[16] L.A. Cordero, P.E. Parker, *Left-invariant Lorentzian metrics on 3-dimensional Lie groups*, Rend. Mat., **17** (1997), 129–155.

[17] O. Khromova, P. Klepikov, E. Rodionov *Invariant Ricci solitons on metric Lie groups with semi-symmetric connections*, Classical and Modern Geometry: Proceedings of the International Conference Dedicated to the 100th Anniversary of the Birth of L. S. Atanasyan, MSPU : МПГУ (2021) , 22–23.

Pavel Nikolaevich Klepikov, Evgeny Dmitrievich Rodionov, Olesya Pavlovna Khromova
Altai State University,
pr. Lenina, 61,
656049, Barnaul, Russia
E-mail address: klepikov.math@gmail.com, edr2002@mail.ru, khromova.olesya@gmail.com