S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 190–207 (2020) УДК 519.175
DOI 10.33048/semi.2020.17.014 MSC 05C30

О РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЯХ В ЗАДАЧЕ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ЧАСТИЧНЫХ ПОРЯДКОВ

В.И. РОДИОНОВ

Abstract. In two previous works of the author, published in this journal, a series of formulas are obtained related to the themes of enumeration of partial orders (finite topologies). In the first work, a formula is proved that reduces the calculation of the number $T_0(n)$ of all partial orders defined on an n-set to the calculation of the numbers $W(p_1,\ldots,p_k)$ of partial orders of a special form. In the second paper, a partially convolute formula is obtained for the number $T_0(n)$. Relations of a recurrent nature are obtained that relate the individual values $W(p_1,\ldots,p_k)$. Explicit formulas are presented for calculating the individual values $W(p_1,\ldots,p_k)$. In this paper, we obtain new recurrence relations that relate the separate numbers $W(p_1,\ldots,p_k)$ between themselves. The obtained equations are enough to calculate without the computer the numbers $T_0(n)$ for all $n<9$. To calculate the number $T_0(9)$ of these relations not enough (the number of required numbers $W(p_1,\ldots,p_k)$ is 128, and the rank of the system matrix is 123; there are not enough five equations generating the desired rank). We admit the presence of some general regularity generating new formulas.

Keywords: graph enumeration, poset, finite topology.

1. Введение

Работа продолжает исследования [1, 2].

Через $\mathcal{V}_0(X)$ обозначим совокупность всех частичных порядков, определенных на множестве $X \doteq \{1,\ldots,n\}$, $n\in\mathbb{N}$. Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством $\mathcal{V}_0(X)$ и множеством $\mathcal{V}_0^0(X)$ всех помеченных

Rodionov, V.I., On recursion relations in the problem of enumeration of posets.

Поступила 2 декабря 2019 г., опубликована 25 февраля 2020 г.

транзитивных орграфов, определенных на X; кроме того, существует взаимнооднозначное соответствие между $\mathcal{V}_0(X)$ и множеством $\mathcal{T}_0(X)$ всех помеченных T_0-топологий, определенных на X. Пусть $T_0(n) \doteq \operatorname{card} \mathcal{T}_0(X)$. Очевидно, $T_0(n) = \operatorname{card} \mathcal{V}_0(X) = \operatorname{card} \mathcal{V}_0^0(X)$. В работе [1] доказана формула

$$T_0(n) = \sum_{p_1+\ldots+p_k=n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{p_1!\ldots p_k!} W(p_1,\ldots,p_k), \tag{1}$$

сводящая подсчет числа $T_0(n)$ всех частичных порядков, определенных на n-множестве (помеченных T_0-топологий), к вычислению чисел $W(p_1,\ldots,p_k)$ частичных порядков специального вида. Суммирование ведется по всем упорядоченным наборам $(p_1,\ldots,p_k)$ натуральных чисел таких, что $p_1+\ldots+p_k = n$. В работах [1, 2] получены семейства уравнений связи между отдельными числами $W(p_1,\ldots,p_k)$. Так, если D_k — группа диэдра, порожденная подстановками $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k{-}1 & k \\ 2 & 3 & \ldots & k & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k{-}1 & k \\ k & k{-}1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$, то согласно [1] справедливо

$$W(p_{\pi(1)},\ldots,p_{\pi(k)}) = W(p_1,\ldots,p_k), \qquad \pi \in D_k. \tag{2}$$

В [2] доказаны два семейства формул: формулы рекуррентного характера

$$\sum_{q_1+\ldots+q_r=m} (-1)^{m-r} \frac{m!}{q_1!\ldots q_r!} W(p+1,q_1,\ldots,q_r) = \sum_{q_1+\ldots+q_r=m} (-1)^{m-r} \frac{m!}{q_1!\ldots q_r!} (r+1) W(p,q_1,\ldots,q_r), \qquad p \geqslant 0, \qquad m \geqslant 1, \tag{3}$$

$$W(p,1,q,1) = \sum_{r=0}^{q} \binom{q}{r} \left(2^{q-r}+1\right)^p W(p,1,r) + \sum_{r=0}^{p} \binom{p}{r} \left(2^{p-r}+1\right)^q W(q,1,r) \tag{4}$$

(полагаем по определению $W(0,q_1,\ldots,q_r) \doteq W(q_1,\ldots,q_r)$, $W(p,1,0) \doteq W(p,1)$ и $W(q,1,0) \doteq W(q,1)$) и явные формулы

$$W(p) = 1, \qquad W(p,q) = 2^{pq}, \qquad W(p,1,q) = \sum_{r=0}^{q} \binom{q}{r} \left(2^r + 2^q\right)^p, \tag{5}$$

$$W(p,2,q) = \sum_{q_1+\ldots+q_4=q} \frac{q!}{q_1!\ldots q_4!} \left(2^{q_1} + 2^{q_1+q_2} + 2^{q_1+q_3} + 2^q\right)^p, \tag{6}$$

$$W(p,1,1,q) - W(p,2,q) = \sum_{q_1+q_2+q_3=q} \frac{q!}{q_1!\,q_2!\,q_3!} \left(2^{q_1} + 2^{q_1+q_2} + 2^q\right)^p. \tag{7}$$

(В формулах (4)–(7) параметры $p, q \in \mathbb{N}$, формулах (6), (7) переменные $q_i \geqslant 0$.)

Кроме того, согласно [2] для натурального $n \geqslant 2$ справедливо равенство

$$T_0(n) = n\,T_0(n-1) + \sum_{(p_1,\ldots,p_k)} (-1)^{n-1-k} \frac{n!}{(p_1+1)!\,p_2!\ldots p_k!} k\,p_1 W(p_1,\ldots,p_k), \tag{8}$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным наборам $(p_1,\ldots,p_k)$ натуральных чисел таких, что $p_1+\ldots+p_k = n-1$. Понятно, что количество слагаемых в формуле (8) в два раза меньше, чем в формуле (1).

Соотношения (2) – (7) позволяют вычислить числа $T_0(n)$ для всех $n \leqslant 7$ (без применения ЭВМ; за счет решения системы линейных уравнений (2) – (7) относительно величин $W(p_1, \ldots, p_k)$ и применения формулы (8)). В [2] отмечено, что для вычисления числа $T_0(8)$ данных соотношений не достаточно (не хватает всего трех уравнений относительно величин $W(p_1, \ldots, p_k)$, порождающих требуемый ранг матрицы системы).

В настоящей работе в дополнение к (2) – (7) получено новое соотношение рекуррентного характера (см. формулу (27)), связывающее между собой отдельные значения $W(p_1, \ldots, p_k)$. Уравнений $(2), (3), (27)$ достаточно для вычисления без применения ЭВМ числа $T_0(8)$. Для вычисления числа $T_0(9)$ данных соотношений не достаточно (количество неизвестных чисел $W(p_1, \ldots, p_k)$, фигурирующих в формуле (8), равно 128, а ранг матрицы системы $(2), (3), (27)$ равен 123; не хватает всего пяти уравнений, порождающих требуемый ранг).

Мы допускаем наличие некоторой общей закономерности, генерирующей новые уравнения связи. Заметим еще, что благодаря компьютерным вычислениям [3] в настоящее время известны значения $T_0(n)$ для всех $n \leqslant 18$.

2. Определения и вспомогательные утверждения

Пусть $B \doteq \{0, 1\}$ — булево множество, X — произвольное множество. Функции $X^2 \to B$ называем *характеристическими.* Всякое подмножество $\sigma \subseteq X^2$, называемое *бинарным отношением* (или просто *отношением*) на множестве X, порождает характеристическую функцию

$$\chi_\sigma \colon X^2 \to B, \qquad \chi_\sigma(x, y) \doteq \begin{cases} 1, & \text{если} \quad (x, y) \in \sigma, \\ 0, & \text{если} \quad (x, y) \notin \sigma. \end{cases}$$

Далее функцию $\chi_\sigma(\cdot, \cdot)$ обозначаем через $\sigma(\cdot, \cdot)$. С другой стороны, всякая функция $\chi : X^2 \to B$ порождает бинарное отношение $\sigma_\chi \subseteq X^2$ такое, что $(x, y) \in \sigma_\chi$, если $\chi(x, y) = 1$. Отображение $\sigma \to \sigma(\cdot, \cdot)$ является биекцией между множеством бинарных отношений и множеством характеристических функций. В силу этого обстоятельства мы называем подмножества $\sigma \subseteq X^2$ как отношениями, так и функциями (иногда орграфами). В случае $\operatorname{card} X < \infty$ характеристическую функцию можно интерпретировать как бинарную матрицу (матрицу, состоящую из 0 и 1). В работе применяется функциональное представление, позволяющее получать содержательные результаты в наиболее общей форме (см., например, родственные работы [4] – [7], посвященные исследованию подграфов графа бинарных отношений).

Через $\mathcal{V}_0(X)$ обозначим совокупность всех частичных порядков, определенных на множестве X. В терминах характеристических функций справедливо утверждение: *включение* $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$ *имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\sigma(x, x) = 1 \ \textit{для всех} \ x \in X,$$

$$\sigma(x, y)\, \sigma(y, z) \leqslant \sigma(x, z) \ \textit{для всех} \ x, y, z \in X, \tag{9}$$

$$\sigma(x, y)\, \sigma(y, x) = \delta_{xy} \ \textit{для всех} \ x, y \in X \ \ (\textit{где} \ \delta_{xy} \ - \textit{символ Кронекера}).$$

Далее полагаем $\operatorname{card} X < \infty$. Для любого частичного порядка $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$ определено опорное множество

$$S(\sigma) \doteq \{\, y \in X \colon \sigma(x, y) = \delta_{xy} \ \text{для всех} \ x \in X \,\} \neq \varnothing, \tag{10}$$

а если $\varnothing \neq Y \subseteq X$, то сужение $\sigma|_{Y^2}$ принадлежит $\mathcal{V}_0(Y)$ (есть частичный порядок на множестве Y). Неравенство $S(\sigma) \neq \varnothing$ доказано в [4] (предложение 2).

Предложение 1 (см. [4], лемма 3)**.** *Для любого нетривиального отношения* $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$ *и для всех* $y \in X \backslash S(\sigma)$ *существует* $x \in S(\sigma)$ *такое, что* $\sigma(x, y) = 1$.

(Частичный порядок σ называется *тривиальным*, если $S(\sigma) = X$.)

Пусть $(p_1, \ldots, p_k) \in \mathbb{N}^k$, $n \doteq p_1 + \ldots + p_k$, $X \doteq \{1, \ldots, n\}$. Набор $(p_1, \ldots, p_k)$ называем *разбиением* числа n. Разбиению $(p_1, \ldots, p_k)$ соответствует представление отношения $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$ в блочном виде

$$\begin{vmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & \ldots & \sigma^{1k} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} & \ldots & \sigma^{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma^{k1} & \sigma^{k2} & \ldots & \sigma^{kk} \end{vmatrix}, \tag{11}$$

в котором на пересечении i-ой горизонтальной и j-ой вертикальной полос стоит блок σ^{ij} с p_i строками и p_j столбцами. Запись отношения $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$ в виде (11) будем называть блочным представлением *типа* $(p_1, \ldots, p_k)$.

Через $\mathcal{W}(p_1, \ldots, p_k)$ обозначим совокупность всех отношений $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$, у которых в блочном представлении (11) типа $(p_1, \ldots, p_k)$

1) все блоки σ^{ij}, $1 \leqslant j < i \leqslant k$, состоят из нулей;

2) все диагональные блоки σ^{ii}, $i = 1, \ldots, k$, — единичные матрицы,

и пусть $W(p_1, \ldots, p_k) \doteq \operatorname{card} \mathcal{W}(p_1, \ldots, p_k)$.

Числа $W(p_1, \ldots, p_k)$ фигурируют в формулах (1) – (8) и являются основным объектом исследований настоящей работы (см. также [1, 2, 7]).

Распространим определение чисел $W(p_1, \ldots, p_k)$ на произвольные упорядоченные наборы $(p_1, \ldots, p_k)$ целых неотрицательных аргументов. Полагаем по определению $W(0) \doteq 1$, а если $p_i = 0$ для некоторого i, то полагаем

$$W(p_1, \ldots, p_{i-1}, 0, p_{i+1}, \ldots, p_k) \doteq W(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_k). \tag{12}$$

Пусть, далее, $k \in \mathbb{N}$, $(p_1, \ldots, p_{k+1}) \in \mathbb{N}^{k+1}$, $p \doteq p_1 + \ldots + p_k$, $m \doteq p_{k+1}$,

$$X \doteq \{1, \ldots, p+m\}, \quad M \doteq \{p+1, \ldots, p+m\}.$$

Через $\mathcal{W}(p_1, \ldots, p_k; m)$ обозначим совокупность всех отношений $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$, у которых в блочном представлении (11) типа $(p_1, \ldots, p_{k+1})$

1) все блоки σ^{ij}, $1 \leqslant j < i \leqslant k+1$, состоят из нулей;

2) все диагональные блоки σ^{ii}, $i = 1, \ldots, k$, — единичные матрицы;

3) диагональный блок $\sigma^{k+1,k+1}$ — частичный порядок (принадлежит $\mathcal{V}_0(M)$),

и пусть $W(p_1, \ldots, p_k; m) \doteq \operatorname{card} \mathcal{W}(p_1, \ldots, p_k; m)$.

Для элементов множеств $\mathcal{W}(p_1, \ldots, p_k)$ и $\mathcal{W}(p_1, \ldots, p_k; m)$ справедливы блочные представления (символ 0 означает, что все элементы блока равны нулю; диагональные блоки e_{p_r} — это единичные матрицы порядка p_r, $r = 1, \ldots, k$):

$$\begin{array}{|c|c|c|c|l} \cline{1-4} e_{p_1} & & & & p_1 \\ \cline{1-2} 0 & \ddots & & & \vdots \\ \cline{1-3} \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \cline{1-4} 0 & \ddots & 0 & e_{p_k} & p_k \\ \cline{1-4} \multicolumn{1}{c}{p_1} & \multicolumn{1}{c}{\cdots} & \multicolumn{1}{c}{\cdots} & \multicolumn{1}{c}{p_k} & \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|c|l} \cline{1-5} e_{p_1} & & & & & p_1 \\ \cline{1-2} 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \cline{1-3} \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \cline{1-4} 0 & \ddots & 0 & e_{p_k} & & p_k \\ \cline{1-5} \multicolumn{4}{|c|}{0} & & m = p_{k+1} \\ \cline{1-5} \end{array} .$$

Распространим определение чисел $W(p_1,\dots,p_k;m)$ на произвольные упорядоченные наборы $(p_1,\dots,p_k,m)$ целых неотрицательных аргументов. Полагаем

$$W(0;m)\doteq T_0(m),\qquad W(p_1,\dots,p_k;0)\doteq W(p_1,\dots,p_k), \tag{13}$$

а если $p_i=0$ для некоторого i, то полагаем

$$W(p_1,\dots,p_{i-1},0,p_{i+1},\dots,p_k;m)\doteq W(p_1,\dots,p_{i-1},p_{i+1},\dots,p_k;m). \tag{14}$$

Предложение 2. *Для целых неотрицательных чисел $p_1,\dots,p_k$ и натурального m справедливы равенства*

$$W(p_1,\dots,p_k;m)=\sum_{q=1}^{m}(-1)^{q-1}\binom{m}{q}W(p_1,\dots,p_k,q;m-q), \tag{15}$$

$$W(p_1,\dots,p_k;m)=\sum_{q_1+\ldots+q_r=m}(-1)^{m-r}\,\frac{m!}{q_1!\ldots q_r!}\,W(p_1,\dots,p_k,q_1,\dots,q_r), \tag{16}$$

где суммирование во второй фомуле ведется по всем упорядоченным наборам $(q_1,\dots,q_r)$ натуральных чисел таких, что $q_1+\ldots+q_r=m$.

При $p_1,\dots,p_k\in\mathbb{N}$ формулы доказаны в работе [1] (формула (15) в лемме 1, а формула (16) в лемме 3). При $p_1=\ldots=p_k=0$ формулы принимают вид

$$\underbrace{W(0,\dots,0;m)}_{T_0(m)}=\sum_{q=1}^{m}(-1)^{q-1}\binom{m}{q}\underbrace{W(0,\dots,0,q;m-q)}_{W(q;m-q)},$$

$$\underbrace{W(0,\dots,0;m)}_{T_0(m)}=\sum_{q_1+\ldots+q_r=m}(-1)^{m-r}\,\frac{m!}{q_1!\ldots q_r!}\,\underbrace{W(0,\dots,0,q_1,\dots,q_r)}_{W(q_1,\dots,q_r)}.$$

(В сносках воспользовались определениями (12) – (14).) Последние формулы, действительно, имеют место (первая формула доказана в лемме 2 [1], а вторая — это формула (1)). Наконец, в случае, когда переменные $p_1,\dots,p_k$ не равны нулю одновременно, следует в формулах (15), (16) избавиться от нулевых аргументов, оставив лишь натуральные параметры p_i (воспользовавшись определениями (12) – (14)), и сослаться на изложенную выше ситуацию, когда $p_{i_1},\dots,p_{i_r}\in\mathbb{N}$. □

Через $\mathcal{V}(p_1,\dots,p_k;m)$ обозначим совокупность всех тех $\sigma\in\mathcal{W}(p_1,\dots,p_k;m)$, что в блочном представлении (11) типа $(p_1,\dots,p_{k+1})$ (где $p_{k+1}=m$) наддиагональный блок $\sigma^{k,k+1}$ — *невырожденный* (то есть в каждом столбце блока имеется хотя бы одна единица; в приводимом ниже блочном представлении этот блок обозначен символом $*$):

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|l}
\hline
e_{p_1} & & & & & p_1\\
0 & \ddots & & & & \vdots\\
\ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots\\
0 & \ddots & 0 & e_{p_k} & * & p_k\\
\hline
\multicolumn{3}{|c|}{0} & 0 & & m=p_{k+1}\\
\hline
\end{array}\;. \tag{17}$$

Распространим определение чисел $V(p_1,\dots,p_k;m) \doteq \operatorname{card}\mathcal{V}(p_1,\dots,p_k;m)$ на все наборы $(p_1,\dots,p_k,m)$ целых неотрицательных чисел. Полагаем

$$V(p_1,\dots,p_k,0;m) \doteq \delta_{m0}\,W(p_1,\dots,p_k), \qquad V(p_1,\dots,p_k;0) \doteq W(p_1,\dots,p_k), \tag{18}$$

а если $p_i = 0$ для некоторого $i < k$, то полагаем

$$V(p_1,\dots,p_{i-1},0,p_{i+1},\dots,p_k;m) \doteq V(p_1,\dots,p_{i-1},p_{i+1},\dots,p_k;m). \tag{19}$$

Теорема 1. *Для целых неотрицательных чисел* $p_1,\dots,p_k$, q, m *справедливо*

$$W(p_1,\dots,p_k,q;m) = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} V(p_1,\dots,p_k,q+r;m-r), \tag{20}$$

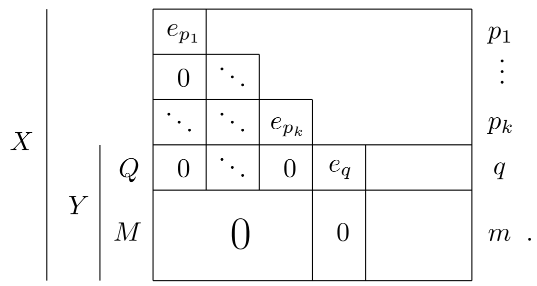
$$V(p_1,\dots,p_k,q;m) = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} W(p_1,\dots,p_k,q+r;m-r). \tag{21}$$

Доказательство. Упорядоченный набор чисел $p_1,\dots,p_k$ обозначим через $\overline{p}$.

Полагаем сначала, что $m \in \mathbb{N}$. Пусть $p \doteq p_1+\ldots+p_k$, $n \doteq p+q+m$,

$$X \doteq \{1,\dots,n\}, \quad Y \doteq \{p+1,\dots,n\}, \quad M \doteq \{p+q+1,\dots,n\}, \quad Q \doteq Y \backslash M.$$

Для элементов множества $\mathcal{W}(\overline{p},q;m)$ справедливо блочное представление



Легко заметить, что для любого $\sigma \in \mathcal{W}(\overline{p},q;m)$ разность Q содержится в опорном множестве $S(\sigma|_{Y^2})$ (см. определение (10) и комментарии к нему). Для любого $\alpha \subseteq M$ через $\mathcal{W}_\alpha(\overline{p},q;m)$ обозначим множество всех тех отношений $\sigma \in \mathcal{W}(\overline{p},q;m)$, у которых $S(\sigma|_{Y^2}) = Q \cup \alpha$, разбив, тем самым, множество $\mathcal{W}(\overline{p},q;m)$ на попарно непересекающиеся классы $\mathcal{W}_\alpha(\overline{p},q;m)$. Следовательно,

$$W(\overline{p},q;m) = \operatorname{card}\mathcal{W}(\overline{p},q;m) = \sum_{\alpha\subseteq M} \operatorname{card}\mathcal{W}_\alpha(\overline{p},q;m).$$

Пусть $\alpha = \varnothing$. При $q \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $\mathcal{W}_\varnothing(\overline{p},q;m) = \mathcal{V}(\overline{p},q;m)$ (так как для любого $\sigma \in \mathcal{W}_\varnothing(\overline{p},q;m)$ блок $Q \times M$ — невырожденный: в силу предложения 1 для любого $y \in M$ существует $x \in Q$ такое, что $\sigma(x,y) = 1$), поэтому $\operatorname{card}\mathcal{W}_\varnothing(\overline{p},q;m) = V(\overline{p},q;m)$. Пусть $q = 0$. Допустим, что $\operatorname{card}\mathcal{W}_\varnothing(\overline{p},0;m) \neq 0$. Для любого $\sigma \in \mathcal{W}_\varnothing(\overline{p},0;m)$ имеем $Q = \varnothing$ и $S(\sigma|_{M^2}) = S(\sigma|_{Y^2}) = Q \cup \alpha = \varnothing$, что противоречит (10). Значит, $\operatorname{card}\mathcal{W}_\varnothing(\overline{p},0;m) = 0$. В силу (18) имеет место равенство $V(\overline{p},0;m) = 0$, поэтому $\operatorname{card}\mathcal{W}_\varnothing(\overline{p},q;m) = V(\overline{p},q;m)$ для всех q.

Легко понять, что если непустые $\alpha,\beta \subseteq M$ таковы, что $|\alpha| = |\beta|$, то

$$\operatorname{card}\mathcal{W}_\alpha(\overline{p},q;m) = \operatorname{card}\mathcal{W}_\beta(\overline{p},q;m) = \operatorname{card}\mathcal{W}_\gamma(\overline{p},q;m),$$

где $\gamma \doteq \{p+q+1,\dots,p+q+r\} \subseteq M$, $r \doteq |\alpha| = |\beta| \in [1,m]$. Так как для всех $\sigma \in \mathcal{W}_\gamma(\overline{p},q;m)$ имеет место равенство $S(\sigma|_{Y^2}) = \{p+1,\dots,p+q+r\}$, то

$\mathcal{W}_\gamma(\overline{p}, q; m) = \mathcal{V}(\overline{p}, q + r; m - r)$, поэтому $\operatorname{card} \mathcal{W}_\gamma(\overline{p}, q; m) = V(\overline{p},\, q + r; m - r)$, что и доказывает равенство (20) при $m \in \mathbb{N}$.

При $m = 0$ в соответствии с определениями (13) и (18) левая и правая части формулы (20) равны одному и тому же числу $W(p_1, \ldots, p_k, q)$.

Обозначим через Σ правую часть формулы (21), тогда в силу (20) справедливо равенство

$$\Sigma = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} \sum_{s=0}^{m-r} \binom{m-r}{s} V(\overline{p},\, q+r+s\,; m-r-s).$$

Заменив индекс s на $t = r + s$ и поменяв порядок суммирования, получим цепочку равенств

$$\begin{aligned}\Sigma = \sum_{t=0}^{m} \Big[\sum_{r=0}^{t} (-1)^r \binom{t}{r} \Big] \binom{m}{t} V(\overline{p},\, q+t\,; m-t)& \\ = \sum_{t=0}^{m} \delta_{t0} \binom{m}{t} V(\overline{p},\, q+t\,; m-t) = V(\overline{p}, q; m) &= V(p_1, \ldots, p_k, q; m),\end{aligned}$$

что и доказывает равенство (21). $\square$

3. Основные утверждения

Теорема 2. *Для любых $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ имеет место равенство*

$$\sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} W(p, q, r+1; m-r) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} 2^{\,(p-k)q} \sum_{l=0}^{q} \binom{q}{l} W(k, l; m). \tag{22}$$

Доказательство. В соответствии с формулой (21) левая часть в (22) равна $V(p, q, 1; m)$. В силу (17) для элементов множества $\mathcal{V}(p, q, 1; m)$ справедливо блочное представление (11) типа $(p_1, \ldots, p_4)$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|l} \hline e_p & & & & p = p_1 \\ \cline{1-2} 0 & e_q & & & q = p_2 \\ \hline 0\ 0 & 0\ 0 & 1 & 1\ \ldots\ 1 & 1 = p_3 \\ \hline \multicolumn{2}{|c|}{0} & \begin{smallmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{smallmatrix} & & m = p_4\ . \\ \hline \end{array} \tag{23}$$

Блок σ^{34} имеет высоту, равную 1, и, как блок $*$ из (17), он невырожденный, поэтому состоит целиком из единиц. В частном случае $p = q = 0$ формула (22) принимает вид $V(0, 0, 1; m) = W(0, 0; m)$. Равенство, действительно, имеет место, так как оба числа равны $T_0(m)$ (см. (23) при $p = q = 0$ и (13)–(14) соответственно). Далее полагаем, что числа p и q не равны нулю одновременно.

Понятно, что блоки σ^{13} и σ^{23} имеют ширину, равную 1 (являются столбцами), и, по крайней мере, один из них не пуст. Пусть $y \doteq p + q + 1 \geqslant 2$,

$$P \doteq \{\, 1, \ldots, p \,\}, \quad Q \doteq \{\, p+1, \ldots, p+q \,\}, \quad R \doteq \{\, y \,\}, \quad M \doteq \{\, y+1, \ldots, y+m \,\}.$$

Тогда можно сказать, что блоки σ^{13} и σ^{23} — это столбцы $P \times R$ и $Q \times R$ соответственно. Для любых $\alpha \subseteq P$ и $\mu \subseteq Q$ полагаем $\alpha' \doteq P \backslash \alpha$ и $\mu' \doteq Q \backslash \mu$. Через $\mathcal{V}_{\alpha\mu}(p, q, 1; m)$ обозначим множество всех тех отношений $\sigma \in \mathcal{V}(p, q, 1; m)$, у которых $\sigma(x,y)=0$ для всех $x\in\alpha\cup\mu$ и $\sigma(x,y)=1$ для всех $x\in\alpha'\cup\mu'$. Следовательно, семейство $\mathcal{V}(p,q,1;m)$ разбивается на попарно непересекающиеся классы $\mathcal{V}_{\alpha\mu}(p,q,1;m)$, поэтому

$$V(p,q,1;m)=\operatorname{card}\mathcal{V}(p,q,1;m)=\sum_{\alpha\subseteq P,\ \mu\subseteq Q}\operatorname{card}\mathcal{V}_{\alpha\mu}(p,q,1;m). \tag{24}$$

Очевидно, если $\alpha,\beta\subseteq P$ и $\mu,\nu\subseteq Q$ таковы, что $|\alpha|=|\beta|$ и $|\mu|=|\nu|$, то

$$\operatorname{card}\mathcal{V}_{\alpha\mu}(p,q,1;m)=\operatorname{card}\mathcal{V}_{\beta\nu}(p,q,1;m)=\operatorname{card}\mathcal{V}_{\gamma\lambda}(p,q,1;m), \tag{25}$$

где $\gamma\doteq\{1,\dots,k\}$, $\lambda\doteq\{p+1,\dots,p+l\}$, $k\doteq|\alpha|=|\beta|$, $l\doteq|\mu|=|\nu|$. Полагаем $k'\doteq p-k$, $l'\doteq q-l$. В силу (23) для любого $\sigma\in\mathcal{V}_{\gamma\lambda}(p,q,1;m)$ имеет место блочное представление (11) типа $(p_1,\dots,p_6)$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|l}
\hline
e_k & 0 & & \begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix} & & k=p_1\\
\hline
 & e_{k'} & \odot & \odot & \begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1&\dots&1\\1&\dots&1\end{smallmatrix} & k'=p_2\\
\hline
 & & e_l & 0 & \begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix} & & l=p_3\\
\hline
 & & & e_{l'} & \begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1&\dots&1\\1&\dots&1\end{smallmatrix} & l'=p_4\\
\hline
 & & & & 1 & 1\ \dots\ 1 & 1=p_5\\
\hline
 & & 0 & & & & m=p_6\ .\\
\hline
\end{array} \tag{26}$$

Дадим необходимые пояснения. Блоки σ^{13} и σ^{23} (столбцы $P\times R$ и $Q\times R$) из представления (23) в представлении (26) трансформировались в объединения $\sigma^{15}\cup\sigma^{25}$ и $\sigma^{35}\cup\sigma^{45}$ соответственно.

Так как все элементы блоков σ^{25}, σ^{45} и σ^{56} равны 1, то в силу (9) все элементы блоков σ^{26}, σ^{46} тоже равны 1. Действительно. Напомним, прежде всего, что $y=p+q+1$. Любое отношение σ в $\mathcal{V}_{\gamma\lambda}(p,q,1;m)$ таково, что $\sigma(x,y)=1$ для любого $x\in P\backslash\gamma$ (в блоке σ^{25}) и $\sigma(y,z)=1$ для любого $z\in M$ (в блоке σ^{56}). Значит, согласно (9) имеем $1=\sigma(x,y)\,\sigma(y,z)\leqslant\sigma(x,z)$, поэтому $\sigma(x,z)=1$ для всех $(x,z)\in(P\backslash\gamma)\times M$ (в блоке σ^{26}). Аналогичные рассуждения справедливы для элементов блока σ^{46}.

Так как все элементы блока σ^{15} равны 0, а все элементы блока σ^{45} равны 1, то в силу (9) все элементы блока σ^{14} равны 0. Действительно. Любое отношение σ в $\mathcal{V}_{\gamma\lambda}(p,q,1;m)$ таково, что $\sigma(x,y)=0$ для любого $x\in\gamma$ (в блоке σ^{15}) и $\sigma(z,y)=1$ для любого $z\in Q\backslash\mu$ (в блоке σ^{45}). Значит,

$$\sigma(x,z)=\sigma(x,z)\,\sigma(z,y)\leqslant\sigma(x,y)=0,$$

поэтому $\sigma(x,z)=0$ для всех $(x,z)\in\gamma\times(Q\backslash\mu)$ (в блоке σ^{14}).

В блоках $\odot$ может стоять любая комбинация нулей и единиц, а для любой такой фиксированной комбинации процедура исключения горизонтальных и вертикальных полос с номерами 2, 4, 5 в представлении (26) является биекцией на множество $\mathcal{W}(k,l;m)$ (остаются полосы с номерами 1, 3, 6). Следовательно,

$$\operatorname{card}\mathcal{V}_{\gamma\lambda}(p,q,1;m)=2^{k'l}\,2^{k'l'}\operatorname{card}\mathcal{W}(k,l;m)=2^{\,(p-k)q}\,W(k,l;m).$$

Для завершения доказательства формулы (22) остается сослаться на последние равенства и формулы (24), (25). $\square$

Теорема 3. *Для любых $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $m \geqslant 1$ имеет место равенство*

$$(27)\qquad \sum_{q_1+\ldots+q_r=\,m+1} (-1)^{m+1-r}\,\frac{m!}{(q_1-1)!\,q_2!\ldots q_r!}\,W(p,q,q_1,\ldots,q_r)$$
$$=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}2^{\,(p-k)q}\sum_{l=0}^{q}\binom{q}{l}\sum_{q_1+\ldots+q_r=\,m}(-1)^{m-r}\,\frac{m!}{q_1!\ldots q_r!}\,W(k,l,q_1,\ldots,q_r).$$

Доказательство. В силу (16) для правой части (22) (обозначим ее Σ_1) имеем

$$\Sigma_1=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}2^{\,(p-k)q}\sum_{l=0}^{q}\binom{q}{l}\sum_{q_1+\ldots+q_r=m}(-1)^{m-r}\,\frac{m!}{q_1!\ldots q_r!}\,W(k,l,q_1,\ldots,q_r),$$

что совпадает с правой частью (27). Согласно (13) и (16) для левой части (22) (обозначим ее Σ_2) справедлива цепочка равенств

$$\Sigma_2-(-1)^m\,W(p,q,m{+}1)=\Sigma_2-(-1)^m\,W(p,q,m{+}1;0)$$
$$=\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r\binom{m}{r}\sum_{p_1+\ldots+p_s=m-r}(-1)^{m-r-s}\,\frac{(m-r)!}{p_1!\ldots p_s!}\,W(p,q,r{+}1,p_1,\ldots,p_s)$$
$$=\sum_{t=1}^{m}\sum_{p_1+\ldots+p_s=m+1-t}(-1)^{m-s}\,\frac{m!}{(t-1)!\,p_1!\ldots p_s!}\,W(p,q,t,p_1,\ldots,p_s)$$
$$=\sum_{\substack{t+p_1+\ldots+p_s=m+1\\ t\leqslant m}}(-1)^{m-s}\,\frac{m!}{(t-1)!\,p_1!\ldots p_s!}\,W(p,q,t,p_1,\ldots,p_s).$$

Сначала сделали замену переменной суммирования $r=t-1$, а затем перешли от двойного суммирования к суммированию по всем переменным одновременно. Сделав замену $q_1=t,\ q_i=p_{i-1},\ i=2,\ldots,r=s+1$, получаем

$$\Sigma_2=(-1)^m\,W(p,q,m{+}1)$$
$$+\sum_{\substack{q_1+\ldots+q_r=m+1\\ q_1\leqslant m}}(-1)^{m+1-r}\,\frac{m!}{(q_1-1)!\,q_2!\ldots q_r!}\,W(p,q,q_1,\ldots,q_r).$$

Внеся слагаемое $(-1)^m\,W(p,q,m+1)$ в общую сумму, избавляемся в ней от ограничения $q_1\leqslant m$ и получаем левую часть формулы (27). □

4. Значения $W(p_1,\ldots,p_k)$ при $p_1+\ldots+p_k=7$

В работе [2] представлены все числа $W(p_1,\ldots,p_k)$ такие, что $p_1+\ldots+p_k\leqslant 6$. Их общее количество — 63. В приводимых ниже вычислениях мы применяем эти числа без каких-либо оговорок. (Данные значения можно получить и методами настоящей работы.) При $p_1+\ldots+p_k=7$ количество неизвестных чисел $W(p_1,\ldots,p_k)$ равно 64, а при $p_1+\ldots+p_k=8$ таких чисел — 128.

В силу уравнений (2) при $p_1+\ldots+p_k=7$ имеется 17 классов неизвестных:

$$A\doteq W(7),\qquad B\doteq W(6,1)=W(1,6),\qquad C\doteq W(5,2)=W(2,5),$$
$$D\doteq W(5,1,1)=W(1,5,1)=W(1,1,5),\qquad E\doteq W(4,3)=W(3,4),$$
$$F\doteq W(4,2,1)=W(4,1,2)=W(2,4,1)=W(2,1,4)=W(1,4,2)=W(1,2,4),$$
$$G\doteq W(4,1,1,1)=W(1,4,1,1)=W(1,1,4,1)=W(1,1,1,4),$$

$$
\begin{aligned}
&H \doteq W(3,3,1) = W(3,1,3) = W(1,3,3),\\
&K \doteq W(3,2,2) = W(2,3,2) = W(2,2,3),\\
&L \doteq W(3,2,1,1) = W(3,1,1,2) = W(2,3,1,1) = W(2,1,1,3)\\
&\qquad\qquad = W(1,3,2,1) = W(1,2,3,1) = W(1,1,3,2) = W(1,1,2,3),\\
&M \doteq W(3,1,2,1) = W(2,1,3,1) = W(1,3,1,2) = W(1,2,1,3),\\
&N \doteq W(3,1,1,1,1) = W(1,3,1,1,1)\\
&\qquad\qquad = W(1,1,3,1,1) = W(1,1,1,3,1) = W(1,1,1,1,3),\\
&P \doteq W(2,2,2,1) = W(2,2,1,2) = W(2,1,2,2) = W(1,2,2,2),\\
&Q \doteq W(2,2,1,1,1) = W(2,1,1,1,2)\\
&\qquad\qquad = W(1,2,2,1,1) = W(1,1,2,2,1) = W(1,1,1,2,2),\\
&R \doteq W(2,1,2,1,1) = W(2,1,1,2,1)\\
&\qquad\qquad = W(1,2,1,2,1) = W(1,2,1,1,2) = W(1,1,2,1,2),\\
&S \doteq W(2,1,1,1,1,1) = W(1,2,1,1,1,1) = W(1,1,2,1,1,1)\\
&\qquad\qquad = W(1,1,1,2,1,1) = W(1,1,1,1,2,1) = W(1,1,1,1,1,2),\\
&T \doteq W(1,1,1,1,1,1,1).
\end{aligned}
$$

Далее мы полагаем, что целые неотрицательные числа p, q и m таковы, что $p+q+m=6$. Таких наборов — 28. Мы перебираем все эти наборы и получаем 28 уравнений относительно 17 неизвестных. При $m=0$ применяем формулу (22), а в остальных случаях — формулу (27). Последовательно придавая элементам тройки (p,q,m) значения $(0,6,0)$, $(1,5,0)$, $(2,4,0)$, $(3,3,0)$, получаем:

$$B = 64, \qquad D = 1267, \qquad F = 7313, \qquad H = 13009.$$

Например, для тройки $(2,4,0)$ в (22) имеет место равенство

$$W(2,4,1) = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} 16^{\,2-k} \sum_{l=0}^{4} \binom{4}{l} W(k,l) \implies F = 7313.$$

Тройки $(4,2,0)$, $(5,1,0)$, $(6,0,0)$ дублируют эти результаты. В следующую группу включаем уравнения, порожденные тройками $(0,5,1)$, $(1,4,1)$, $(0,4,2)$ в (27):

$$D - C = 243, \qquad G - F = 2177, \qquad 2G - 3F + E = 1137.$$

Например, для тройки $(1,4,1)$ в (27) имеет место равенство

$$W(1,4,1,1) - W(1,4,2) = \sum_{k=0}^{1} 16^{\,1-k} \sum_{l=0}^{4} \binom{4}{l} W(k,l,1) \quad\implies\quad G - F = 2177.$$

Тройки $(4,1,1)$, $(5,0,1)$, $(4,0,2)$ дублируют эти результаты. Полученные выше значения для чисел D и F порождают равенства

$$C = 1024, \qquad G = 9490, \qquad E = 4096.$$

В следующую группу включаем уравнения, порожденные тройками $(2,3,1)$, $(1,3,2)$, $(3,1,2)$, $(0,3,3)$ в формуле (27):

$$L - K = 6383, \qquad 2N - M - 2L + H = 5023, \qquad 2N - 2M - L + H = 4975,$$

$$6N - 3M - 9L + 4H + 3K - E = 4833.$$

Например, для тройки $(1,3,2)$ в (27) имеет место равенство

$$2\,W(1,3,1,1,1)-W(1,3,1,2)-2\,W(1,3,2,1)+W(1,3,3)$$
$$=\sum_{k=0}^{1}8^{\,1-k}\sum_{l=0}^{3}\binom{3}{l}\big[\,2\,W(k,l,1,1)-W(k,l,2)\,\big]$$
$$\Longrightarrow\quad 2N-M-2L+H=5023.$$

Тройка $(3,2,1)$ порождает дубль первого уравнения, а тройка $(3,0,3)$ дублирует четвертое уравнение. Так как числа E и H уже известны, то получаем параметрическое представление решений:

$$K=\varphi,\qquad L=\varphi+6383,\qquad M=\varphi+6431,\qquad 2N=3\varphi+11211. \tag{28}$$

В следующую группу включаем уравнения, порожденные тройками $(2,2,2)$, $(2,1,3)$, $(1,2,3)$, $(0,2,4)$ в формуле (27):

$$2Q-3P+K=8129,$$
$$6S-9R-3Q+3P+3M+L-F=11615,$$
$$6S-6R-6Q+3P+M+3L-F=11681,$$
$$24S-24R-36Q+30P+4M+16L-10K-5F+C=17193.$$

Например, для тройки $(2,1,3)$ в (27) имеет место равенство

$$6\,W(2,1,1,1,1,1)-3\,W(2,1,1,1,2)-3\,W(2,1,1,2,1)+W(2,1,1,3)$$
$$-6\,W(2,1,2,1,1)+3\,W(2,1,2,2)+3\,W(2,1,3,1)-W(2,1,4)$$
$$=\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}2^{\,2-k}\sum_{l=0}^{1}\big[\,6\,W(k,l,1,1,1)-3\,W(k,l,1,2)-3\,W(k,l,2,1)+W(k,l,3)\,\big]$$
$$\Longrightarrow\quad 6S-9R-3Q+3P+3M+L-F=11615.$$

Тройка $(2,0,4)$ порождает дубль четвертого уравнения. Числа C и F уже известны, а для чисел K, L, M справедливы формулы (28), следовательно, имеет место параметрическое представление решений:

$$3P=\psi,\qquad 2Q=\psi-\varphi+8129,\qquad 2R=\psi-\varphi+8237,\qquad 6S=5\psi-10\varphi+42512. \tag{29}$$

Тройка $(1,1,4)$ в формуле (27) порождает уравнение

$$24T-60S+12R+18Q+20N-10L-5G+D=25447.$$

Учитывая значения чисел D, G и формулы (28), (29), получаем, что

$$24T=35\psi+105\varphi+325887. \tag{30}$$

Тройка $(0,1,5)$ в формуле (27) порождает уравнение

$$120T-360S+150R+120Q-30P$$
$$+120N-50M-70L+10H-30G+15F+6D-B=51153.$$

Учитывая полученные ранее значения, получаем, что

$$120T=175\psi+525\varphi+1629435.$$

Тройка $(1,0,5)$ порождает такое же уравнение, причем, оба случая оказываются бесполезными, так как последнее уравнение — это уравнение (30). Наконец, заключительное разбиение $(0,0,6)$ порождает уравнение

$$720T-2520S+1260R+1260Q-630P+840N-420M-840L+210K$$
$$+140H-210G+210F-35E+42D-21C-7B+A=130023.$$

(Его получение требует определенных усилий.) Учитывая найденные ранее значения, получаем равенство

$$A = 1.$$

(К сожалению, «богатое» уравнение, охватывающее все 17 неизвестных, породило изначально очевидное следствие $A = 1$, см. формулу (5).) Тем не менее, констатируем главное: система из 28 линейных уравнений относительно 17-ти неизвестных допускает двупарамерическое представление решений через параметры φ и ψ (другими словами, ранг матрицы системы равен 15).

Для того чтобы найти эти параметры, воспользуемся формулой (3), последовательно придавая элементам пары (p, m) значения $(2, 4)$ и $(1, 5)$:

$$24N - 12M - 24L + 6K + 8H - E = 117286,$$

$$120S - 120R - 120Q + 90P + 20M + 40L - 20K - 10F + C = 559654.$$

Например, для пары $(2, 4)$ в (3) имеет место равенство

$$\begin{aligned} &24\,W(3,1,1,1,1) - 12\,W(3,1,1,2) - 12\,W(3,1,2,1) + 4\,W(3,1,3) \\ &\qquad -12\,W(3,2,1,1) + 6\,W(3,2,2) + 4\,W(3,3,1) - W(3,4) \\ &= 120\,W(2,1,1,1,1) - 48\,W(2,1,1,2) - 48\,W(2,1,2,1) + 12\,W(2,1,3) \\ &\qquad -48\,W(2,2,1,1) + 18\,W(2,2,2) + 12\,W(2,3,1) - 2\,W(2,4) \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow \quad 24N - 12M - 24L + 6K + 8H - E = 117286. \end{aligned}$$

Учитывая значения чисел C, E, F, H и формулы (28), (29), из первого уравнения находим значение φ, а затем из второго уравнения — значение ψ:

$$\varphi = 18857, \qquad \psi = 113382.$$

В соответствии с (28)–(30) получаем числа

$$K = 18857, \qquad L = 25240, \qquad M = 25288, \qquad N = 33891,$$

$$P = 37794, \qquad Q = 51327, \qquad R = 51381, \qquad S = 70142, \qquad T = 96428.$$

Таким образом, определены все 64 числа $W(p_1, \ldots, p_k)$ при $p_1 + \ldots + p_k = 7$. Из формулы (8) следует, что

$$T_0(8) = 431723379.$$

5. Значения $W(p_1, \ldots, p_k)$ при $p_1 + \ldots + p_k = 8$

В силу уравнений (2) при $p_1 + \ldots + p_k = 8$ имеется 29 классов неизвестных:

$$A \doteq W(8), \qquad B \doteq W(7,1) = W(1,7), \qquad C \doteq W(6,2) = W(2,6),$$

$$D \doteq W(6,1,1) = W(1,6,1) = W(1,1,6), \qquad E \doteq W(5,3) = W(3,5),$$

$$\begin{aligned} &F \doteq W(5,2,1) = W(5,1,2) = W(2,5,1) = W(2,1,5) = W(1,5,2) = W(1,2,5), \\ &G \doteq W(5,1,1,1) = W(1,5,1,1) = W(1,1,5,1) = W(1,1,1,5), \\ &\Gamma \doteq W(4,4), \\ &H \doteq W(4,3,1) = W(4,1,3) = W(3,4,1) = W(3,1,4) = W(1,4,3) = W(1,3,4), \\ &K \doteq W(4,2,2) = W(2,4,2) = W(2,2,4), \\ &L \doteq W(4,2,1,1) = W(4,1,1,2) = W(2,4,1,1) = W(2,1,1,4) \\ &\qquad\qquad = W(1,4,2,1) = W(1,2,4,1) = W(1,1,4,2) = W(1,1,2,4), \\ &M \doteq W(4,1,2,1) = W(2,1,4,1) = W(1,4,1,2) = W(1,2,1,4), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&N \doteq W(4,1,1,1,1) = W(1,4,1,1,1)\\
&\qquad\qquad = W(1,1,4,1,1) = W(1,1,1,4,1) = W(1,1,1,1,4),\\
&\Delta \doteq W(3,3,2) = W(3,2,3) = W(2,3,3),\\
&\Phi \doteq W(3,3,1,1) = W(3,1,1,3) = W(1,3,3,1) = W(1,1,3,3),\\
&\Psi \doteq W(3,1,3,1) = W(1,3,1,3),\\
&P \doteq W(3,2,2,1) = W(3,1,2,2) = W(2,3,1,2) = W(2,2,3,1)\\
&\qquad\qquad = W(2,2,1,3) = W(2,1,3,2) = W(1,3,2,2) = W(1,2,2,3),\\
&\Pi \doteq W(3,2,1,2) = W(2,3,2,1) = W(2,1,2,3) = W(1,2,3,2),\\
&Q \doteq W(3,2,1,1,1) = W(3,1,1,1,2) = W(2,3,1,1,1)\\
&\qquad = W(2,1,1,1,3) = W(1,3,2,1,1) = W(1,2,3,1,1) = W(1,1,3,2,1)\\
&\qquad\qquad = W(1,1,2,3,1) = W(1,1,1,3,2) = W(1,1,1,2,3),\\
&R \doteq W(3,1,2,1,1) = W(3,1,1,2,1) = W(2,1,3,1,1)\\
&\qquad = W(2,1,1,3,1) = W(1,3,1,2,1) = W(1,2,1,3,1) = W(1,3,1,1,2)\\
&\qquad\qquad = W(1,2,1,1,3) = W(1,1,3,1,2) = W(1,1,2,1,3),\\
&S \doteq W(3,1,1,1,1,1) = W(1,3,1,1,1,1) = W(1,1,3,1,1,1)\\
&\qquad\qquad = W(1,1,1,3,1,1) = W(1,1,1,1,3,1) = W(1,1,1,1,1,3),\\
&\Omega \doteq W(2,2,2,2),\\
&U \doteq W(2,2,2,1,1) = W(2,2,1,1,2)\\
&\qquad\qquad = W(2,1,1,2,2) = W(1,2,2,2,1) = W(1,1,2,2,2),\\
&V \doteq W(2,2,1,2,1) = W(2,1,2,2,1)\\
&\qquad\qquad = W(2,1,2,1,2) = W(1,2,2,1,2) = W(1,2,1,2,2),\\
&X \doteq W(2,2,1,1,1,1) = W(2,1,1,1,1,2) = W(1,2,2,1,1,1)\\
&\qquad\qquad = W(1,1,2,2,1,1) = W(1,1,1,2,2,1) = W(1,1,1,1,2,2),\\
&Y \doteq W(2,1,2,1,1,1) = W(2,1,1,1,2,1) = W(1,2,1,2,1,1)\\
&\qquad\qquad = W(1,2,1,1,1,2) = W(1,1,2,1,2,1) = W(1,1,1,2,1,2),\\
&Z \doteq W(2,1,1,2,1,1) = W(1,2,1,1,2,1) = W(1,1,2,1,1,2),\\
&T \doteq W(2,1,1,1,1,1,1) = W(1,2,1,1,1,1,1)\\
&\qquad = W(1,1,2,1,1,1,1) = W(1,1,1,2,1,1,1) = W(1,1,1,1,2,1,1)\\
&\qquad\qquad = W(1,1,1,1,1,2,1) = W(1,1,1,1,1,1,2),\\
&\Sigma \doteq W(1,1,1,1,1,1,1,1).
\end{aligned}
$$

Далее мы полагаем, что целые неотрицательные числа p, q и m таковы, что $p+q+m=7$. Таких наборов — 36. Мы перебираем все эти наборы и получаем 36 уравнений относительно 29 неизвестных. При $m=0$ применяем формулу (22), а в остальных случаях — формулу (27). Последовательно придавая элементам тройки (p,q,m) значения $(0,7,0)$, $(1,6,0)$, $(2,5,0)$, $(3,4,0)$, получаем:

$$B=128, \qquad D=4825, \qquad F=51445, \qquad H=164305. \tag{31}$$

Например, для тройки $(2,5,0)$ в (22) имеет место равенство

$$W(2,5,1)=\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}32^{\,2-k}\sum_{l=0}^{5}\binom{5}{l}W(k,l) \implies F=51445.$$

Тройки $(4,3,0)$, $(5,2,0)$, $(6,1,0)$, $(7,0,0)$ дублируют эти результаты. В следующую группу включаем уравнения, порожденные тройками $(0,6,1)$, $(1,5,1)$, $(0,5,2)$ в (27):

$$D - C = 729, \qquad G - F = 11925, \qquad 2G - 3F + E = 5173.$$

Например, для тройки $(1,5,1)$ в (27) имеет место равенство

$$W(1,5,1,1) - W(1,5,2) = \sum_{k=0}^{1} 32^{\,1-k} \sum_{l=0}^{5} \binom{5}{l} W(k,l,1) \quad \Longrightarrow \quad G - F = 11925.$$

Тройки $(5,1,1)$, $(6,0,1)$, $(5,0,2)$ дублируют эти результаты. В силу (31) справедливы равенства

$$C = 4096, \qquad G = 63370, \qquad E = 32768. \tag{32}$$

В следующую группу включаем уравнения, порожденные тройками $(2,4,1)$, $(1,4,2)$, $(4,1,2)$, $(0,4,3)$ в формуле (27):

$$L - K = 61587, \qquad 2N - M - 2L + H = 39495, \qquad 2N - 2M - L + H = 38725,$$

$$6N - 3M - 9L + 3K + 4H - \Gamma = 32493. \tag{33}$$

Например, для тройки $(1,4,2)$ в (27) имеет место равенство

$$\begin{aligned} &2\,W(1,4,1,1,1) - W(1,4,1,2) - 2\,W(1,4,2,1) + W(1,4,3) \\ &\qquad = \sum_{k=0}^{1} 16^{\,1-k} \sum_{l=0}^{4} \binom{4}{l} \big[\,2\,W(k,l,1,1) - W(k,l,2)\,\big] \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow \quad 2N - M - 2L + H = 39495. \end{aligned}$$

Тройка $(4,2,1)$ порождает дубль первого уравнения, а тройка $(4,0,3)$ дублирует четвертое уравнение. Добавим в группу еще одно уравнение, — воспользуемся формулой (3), полагая в ней $(p,m) = (3,4)$:

$$\begin{aligned} &24\,W(4,1,1,1,1) - 12\,W(4,1,1,2) - 12\,W(4,1,2,1) + 4\,W(4,1,3) \\ &\qquad -12\,W(4,2,1,1) + 6\,W(4,2,2) + 4\,W(4,3,1) - W(4,4) \\ &\quad = 120\,W(3,1,1,1,1) - 48\,W(3,1,1,2) - 48\,W(3,1,2,1) + 12\,W(3,1,3) \\ &\qquad -48\,W(3,2,1,1) + 18\,W(3,2,2) + 12\,W(3,3,1) - 2\,W(3,4) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad 24N - 12M - 24L + 6K + 8H - \Gamma = 1073506. \tag{34}$$

В силу (33), (34) справедливы равенства

$$\Gamma = 65536, \qquad K = 220387, \qquad L = 281974, \qquad M = 282744, \qquad N = 360941. \tag{35}$$

В следующую группу включаем уравнения, порожденные тройками $(3,3,1)$, $(2,3,2)$, $(3,2,2)$, $(1,3,3)$, $(3,1,3)$, $(0,3,4)$ в формуле (27):

$$\Phi - \Delta = 105753, \qquad 2Q - 2\Pi - P + \Delta = 105997, \qquad 2Q - \Pi - 2P + \Delta = 104871,$$

$$\begin{gathered} 6S - 6R - 6Q + 3P + \Psi + 3\Phi - H = 126975, \\ 6S - 9R - 3Q + 3P + 3\Psi + \Phi - H = 124695, \\ 24S - 24R - 36Q + 12\Pi + 18P + 4\Psi + 16\Phi - 10\Delta - 5H + E = 163393. \end{gathered}$$

Тройка $(3,0,4)$ дублирует последнее уравнение. Так как числа E и H уже известны, то получаем параметрическое представление решений:

$$\Delta = \alpha, \quad \Phi = \alpha + 105753, \quad \Pi = \beta, \quad P = \beta + 1126, \quad 2Q = -\alpha + 3\beta + 107123,$$

$$\Psi=\gamma,\quad 6R=-7\alpha+9\beta+4\gamma-97083,\quad 6S=-13\alpha+15\beta+3\gamma+194929.$$

Добавим в группу еще одно уравнение, — воспользуемся формулой (3), полагая в ней $(p,m)=(2,5)$:

$$120S-120R-120Q+30\Pi+60P+20\Psi+40\Phi-20\Delta-10H+E=8806240.$$

Вывод данного уравнения осуществляется аналогично выводу уравнения (34) (и требует определенных усилий). Оно порождает уравнение связи

$$-4\alpha+3\beta=509570,$$

следовательно, параметрическое представление решений принимает вид:

$$\Delta=\alpha,\qquad \Phi=\alpha+105753, \tag{36}$$

$$3P=4\alpha+512948,\qquad 3\Pi=4\alpha+509570,\qquad 2Q=3\alpha+616693,$$

$$\Psi=\gamma,\qquad 6R=5\alpha+4\gamma+1431627,\qquad 6S=7\alpha+3\gamma+2742779.$$

Заметим, что формулы (6) и (4) позволяют найти параметры $\alpha=\Delta=W(3,2,3)$ и $\gamma=\Psi=W(3,1,3,1)$, что, в свою очередь, позволяет вычислить все вышеперечисленные числа (в настоящий момент мы этого делать не будем).

В следующую группу включаем уравнения, порожденные тройками $(2,2,3)$, $(1,2,4)$, $(2,1,4)$, $(0,2,5)$, $(1,1,5)$, $(0,1,6)$ в формуле (27):

$$6X-3V-9U+3\Omega+4P-K=196191,$$

$$\begin{aligned}&24T-12Z-24Y-24X+18V+12U\\&\qquad\qquad+8R+12Q-6\Pi-4P-M-4L+F=366303,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&24T-12Z-36Y-12X+24V+6U\\&\qquad\qquad+16R+4Q-4\Pi-6P-4M-L+F=363721,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&120T-60Z-120Y-180X+120V+150U-30\Omega\\&\qquad+40R+80Q-40\Pi-80P+10\Delta-5M-25L+15K+6F-C=657729,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&120\Sigma-360T+60Z+90Y+120X-30U\\&\qquad\qquad+120S-50R-70Q+10\Phi-30N+15L+6G-D=942585,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&720\Sigma-2520T+540Z+1080Y+900X-360V-270U\\&\qquad+840S-720R-540Q+60\Pi+150P+60\Psi+80\Phi\\&\qquad\qquad-210N+90M+120L-35H+42G-21F-7D+B=2179573.\end{aligned}$$

Тройки $(2,0,5)$ и $(1,0,6)$ порождают, к сожалению, те же уравнения, что и тройки $(0,2,5)$ и $(0,1,6)$. Добавим в группу еще два уравнения, — воспользуемся формулой (3), полагая в ней $(p,m)=(1,6)$ и $(p,m)=(0,7)$ соответственно:

$$\begin{aligned}&720T-360Z-720Y-720X+540V+540U-90\Omega+240R\\&\qquad+240Q-120\Pi-240P+20\Delta-30M-60L+30K+12F-C=35206834,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&5040\Sigma-15120T+2520Z+5040Y+5040X-1260V-1260U\\&\qquad+4200S-2520R-2520Q+210\Pi+420P+140\Psi+280\Phi\\&\qquad\qquad-840N+210M+420L-70H+126G-42F-14D+B=135499898.\end{aligned}$$

Подставив в уравнения группы выражения из (31), (32), (35), (36), получаем:

$$18X-9V-27U+9\Omega=-16\alpha-802058,$$

$$36T-18Z-36Y-36X+27V+18U=-17\alpha-8\gamma-3270638,$$

$$36T - 18Z - 54Y - 18X + 36V + 9U = -9\alpha - 16\gamma - 2430764,$$
$$36T - 18Z - 36Y - 54X + 36V + 45U - 9\Omega = -\alpha - 8\gamma - 2468580,$$
$$36\Sigma - 108T + 18Z + 27Y + 36X - 9U = -\alpha - 8\gamma - 4569846,$$
$$72\Sigma - 252T + 54Z + 108Y + 90X - 36V - 27U = 7\alpha - 6708928,$$
$$72T - 36Z - 72Y - 72X + 54V + 54U - 9\Omega = -10\alpha - 16\gamma - 1646686,$$
$$36\Sigma - 108T + 18Z + 36Y + 36X - 9V - 9U = -\alpha - 4\gamma - 2943517.$$

Параметрическое представление решений имеет вид:

$$X = \lambda, \qquad Y = \mu, \qquad Z = \nu, \tag{37}$$
$$9\Omega = -40\alpha + 8\gamma + 36\lambda - 18\mu - 9826996,$$
$$9U = -8\alpha + 4\gamma + 18\lambda - 9\mu - 2466203,$$
$$9V = -4\gamma + 9\mu - 1626329,$$
$$36T = -\alpha - 4\gamma + 27\mu + 18\nu + 6540755,$$
$$36\Sigma = -12\alpha - 16\gamma - 18\lambda + 45\mu + 36\nu + 12586216.$$

Тройка $(0, 0, 7)$ (завершающая перебор всех троек в формуле (27)) порождает равенство $A = 1$ (вывод данного равенства требует определенных усилий). К сожалению, в силу (5) это равенство нам уже известно, хотя, с формальных позиций, оно относится к системе уравнений (2), (3), (27).

К этой же системе утносятся еще четыре уравнения, порожденные парами $(7, 0)$, $(6, 1)$, $(5, 2)$, $(4, 3)$ в формуле (3) (что завершает перебор всех пар в (3)), однако все они линейно зависимы с предыдущими уравнениями. Таким образом, мы перебрали все варианты реализации формул (3) и (27).

В комментариях к формуле (36) говорится, что для вычисления параметров α и γ можно применить формулы (6) и (4) соответственно, однако, для вычисления параметров λ, μ и ν ресурсов настоящей работы (вместе с ресурсами предыдущих работ) не хватает. Тем не менее, констатируем главное: система из 36 линейных уравнений относительно 29-ти неизвестных допускает пятипарамерическое представление решений через параметры α, γ, λ, μ, ν.

Более того, система линейных уравнений (2), (3), (27) относительно 128-ми неизвестных $W(p_1, \ldots, p_k)$, фигурирующих в формуле (8) при $n = 9$, имеет ранг 123; не хватает всего пяти уравнений, порождающих требуемый ранг.

Если же включить параметры α и γ в список известных величин:

$$\alpha = \Delta = W(3, 3, 2) = 353347, \qquad \gamma = \Psi = W(3, 1, 3, 1) = 461236,$$

то ранг системы возрастает до 125. В силу естественного интереса к получению числа $T_0(9)$ для нахождения параметров λ, μ и ν мы применили компьютерные вычисления (основанные на формулах (10) из [1]) и получили числа

$$\lambda = X = W(2, 2, 1, 1, 1, 1) = 1582502,$$
$$\mu = Y = W(2, 1, 2, 1, 1, 1) = 1584088,$$
$$\nu = Z = W(2, 1, 1, 2, 1, 1) = 1584772.$$

Итак, наряду с формулами (31), (32), (35) имеем следствия формул (36), (37):

$$\Phi = 459100, \qquad P = 642112, \qquad \Pi = 640986, \qquad Q = 838367,$$
$$R = 840551, \qquad S = 1099986, \qquad \Omega = 909500, \qquad U = 1197801,$$
$$V = 1198391, \qquad T = 2101076, \qquad \Sigma = 2800472.$$

Таким образом, определены все 128 чисел $W(p_1,\ldots,p_k)$ при $p_1+\ldots+p_k=8$. Из формулы (8) следует, что

$$T_0(9) = 44511042511.$$

6. Заключение

Через $\mathcal{A}(X)$ обозначим совокупность всех ациклических орграфов, определенных на множестве $X=\{1,\ldots,n\}$. Пусть, далее, $A_n \doteq \operatorname{card}\mathcal{A}(X)$. Согласно [8] имеет место равенство

$$A_n = \sum_{p_1+\ldots+p_k=n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{p_1!\ldots p_k!} \, 2^{(n^2-p_1^2-\ldots-p_k^2)/2}. \tag{38}$$

Включение $\mathcal{V}_0^0(X)\subset\mathcal{A}(X)$ хорошо известно, причем формулы (1) и (38) для вычисления чисел $\operatorname{card}\mathcal{V}_0^0(X)$ и $\operatorname{card}\mathcal{A}(X)$ имеют одинаковую структуру.

Для любых $n\in\mathbb{N}$ и $p=1,\ldots,n$ через $T_0^{(p)}(n)$ $\bigl($через $A_n^{(p)}\bigr)$ обозначим количество всех помеченных транзитивных орграфов $\sigma\in\mathcal{V}_0^0(X)$ (соответственно помеченных ациклических орграфов $\sigma\in\mathcal{A}(X)$), определенных на X и таких, что множество вершин графа σ, имеющих нулевую полустепень захода, совпадает с множеством $\{1,\ldots,p\}$. В работах [7] и [6] доказаны формулы:

$$T_0^{(p)}(n) = \sum_{\substack{p_1+\ldots+p_k=n\\ p_1\geqslant p}} (-1)^{n-p+1-k} \frac{(n-p)!}{(p_1-p)!\,p_2!\ldots p_k!} \, W(p_1,\ldots,p_k), \tag{39}$$

$$A_n^{(p)} = \sum_{\substack{p_1+\ldots+p_k=n\\ p_1\geqslant p}} (-1)^{n-p+1-k} \frac{(n-p)!}{(p_1-p)!\,p_2!\ldots p_k!} \, 2^{(n^2-p_1^2-\ldots-p_k^2)/2}. \tag{40}$$

Суммирование в формулах (39), (40) ведется по всем упорядоченным наборам $(p_1,\ldots,p_k)$ натуральных чисел таких, что $p_1+\ldots+p_k=n$ и $p_1\geqslant p$.

Формулы (39) и (40) имеют одинаковую структуру (так же как и формулы (1) и (38)). Однако, если формулы (38), (40) имеют завершенный вид (и могут, в определенной степени, служить ориентиром в задаче перечисления конечных частичных порядков), то для формул (1), (39) сохраняется проблема вычисления чисел $W(p_1,\ldots,p_k)$, чему, собственно, и посвящена настоящая работа.

Известные автору алгоритмы перечисления конечных частичных порядков имеют вычислительную сложность экспоненциального типа, что затрудняет вычисление значений $T_0(n)$ даже при малых n. Здесь необходимо отметить прямые вычисления чисел $T_0(n)$, представленные в работах [9] – [12], и компьютерные вычисления, представленные в [3], [13] – [17].

Принципиальная разница вычислений в указанных источниках от вычислений настоящей работы заключается в следующем. В перечисленных работах процедура вычисления осуществляется «в лоб», то есть вычисляется количество частичных порядков того или иного вида в соответствии с некоей структурной иерархией. В наших исследованиях реализован иной, своеобразный характер рекурсивных вычислений: при переходе $T_0(n-1)\to T_0(n)$ мы используем уравнения, связывающие между собой те или иные величины $W(p_1,\ldots,p_k)$ при $p_1+\ldots+p_k\leqslant n$. Мы допускаем наличие некоторой общей закономерности, генерирующей новые уравнения связи между величинами $W(p_1,\ldots,p_k)$.

Отметим также современные публикации [18] – [24] в рамках тематики.

References

[1] V.I. Rodionov, *On enumeration of posets defined on finite set*, Siberian electr. Math. Reports, **13** (2016), 318–330. MR3506895, Zbl 1341.05127

[2] V.I. Rodionov, *On recurrence relation in the problem of enumeration of finite posets*, Siberian electr. Math. Reports, **14** (2017), 98–111. MR3610858, Zbl 1357.05061

[3] G. Brinkmann, B.D. McKay, *Posets on up to 16 points*, Order, **19**:2 (2002), 147–179. MR 2134160, Zbl 1006.06003

[4] Kh.Sh. Al'Dzhabri, V.I. Rodionov, *The graph of partial orders*, Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki, **4** (2013), 3–12. Zbl 1299.05169

[5] Kh.Sh. Al'Dzhabri, *The graph of reflexive-transitive relations and the graph of finite topologies*, Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki, **25**:1 (2015), 3–11. Zbl 1332.05072

[6] Kh.Sh. Al'Dzhabri, V.I. Rodionov, *The graph of acyclic digraphs*, Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki, **25**:4 (2015), 441–452. Zbl 1364.05038

[7] Kh.Sh. Al'Dzhabri, V.I. Rodionov, *On support sets of acyclic and transitive digraphs*, Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki, **27**:2 (2017), 153–161. MR3678096, Zbl 1390.05080

[8] V.I. Rodionov, *On the number of labeled acyclic digraphs*, Discrete Mathematics, **105**: 1–3 (1992), 319–321. MR1180216, Zbl 0761.05050

[9] L. Comtet, *Recouvrements, bases de filtre et topologies d'un ensemble fini*, C. R. Acad. Sci., **262** (1966), A1091–A1094. MR201325, Zbl 0152.39701

[10] V. Krishnamurthy, *On the number of topologies on a finite set*, Amer. Math. Monthly, **73**:2 (1966), 154–157. MR201324, Zbl 0135.40704

[11] M. Erne, *Struktur- und anzahlformeln fur topologien auf endlichen mengen*, Manuscripta Math., **11** (1974), 221–259. MR360300, Zbl 0269.54001

[12] Z.I. Borevich, *Enumeration of finite topologies*, J. Sov. Math., **20**:6 (1982), 2532–2545. MR541003, Zbl 0498.05007

[13] J.W. Evans, F. Harary, M.S. Lynn, *On the computer enumeration of finite topologies*, Comm. ACM, **10**:5 (1967), 295–297. Zbl 0166.01003

[14] S.K. Das, *A machine representation of finite T_0 topologies*, J. Assoc. Comput. Mach., **24**:4 (1977), 676–692. MR472543, Zbl 0413.54022

[15] Z.I. Borevich, W. Wieslaw, E. Dobrowolski, V.I. Rodionov, *The number of labeled topologies on nine points*, J. Sov. Math., **37**:2 (1987), 937–942. MR503838, Zbl 0612.05004

[16] Z.I. Borevich, V.V. Bumagin, V.I. Rodionov, *Number of labeled topologies on ten points*, J. Sov. Math., **17**:4 (1981), 1941–1945. MR535474, Zbl 0459.05011

[17] M. Erne, K. Stege, *Counting finite posets and topologies*, Order, **8**:3 (1991), 247–265. MR 1154928, Zbl 0752.05002

[18] M. Benoumhani, M. Kolli, *Finite topologies and partitions*, J. Integer Seq., **13**:3 (2010), Article 10.3.5, 19 p. Zbl 1228.05025

[19] D. Kim, Y.S. Kwon, J. Lee, *Enumerations of finite topologies associated with a finite graph*, Kyungpook Math J., **54**:4 (2014), 655–665. Zbl 1408.05071

[20] M. Kolli, *Direct and elementary approach to enumerate topologies on a finite set*, J. Integer Seq., **10**:3 (2007), Article 07.3.1, 11 p. MR2291945, Zbl 1113.05007

[21] C. Marijuan, *Finite topologies and digraphs*, Proyecciones Journal of Mathematics, **29**:3 (2010), 291–307. Zbl 1217.54002

[22] K. Ragnarsson, B.E. Tenner, *Obtainable sizes of topologies on finite sets*, J. Comb. Theory, Ser. A, **117**:2 (2010), 138–151. Zbl 1189.05038

[23] N.P. Adamenko, I.G. Velichko, *Classification of Topologies on Finite Sets Using Graphs*, Ukrainian Mathematical Journal, **60**:7 (2008), 1164–1167. MR2489848, Zbl 1164.05336

[24] I.G. Velichko, P.G. Stegantseva, N.P. Bashova, *The listing of topologies close to the discrete one on finite sets*, Russian Math., **59**:11 (2015), 19–25. Zbl 1329.05018

Vitalii Ivanovich Rodionov
Udmurt State University,
1, Universitetskaya str.,
Izhevsk, 426034, Russia
E-mail address: rodionov@uni.udm.ru