S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 514.765.2
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 53C30

ПРЕДПИСАННЫЙ ОПЕРАТОР РИЧЧИ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ЛОКАЛЬНО ОДНОРОДНЫХ (ПСЕВДО)РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ С НЕТРИВИАЛЬНОЙ ПОДГРУППОЙ ИЗОТРОПИИ

П.Н. КЛЕПИКОВ, Е.Д. РОДИОНОВ

Abstract. This paper is devoted to solving the problem of a prescribed Ricci operator for four-dimensional locally homogeneous (pseudo)Riemannian manifolds with a nontrivial isotropy subgroup. We obtain theorems on what Segre type and what eigenvalues an operator must have in order for there to exist a four-dimensional locally homogeneous manifold with a Riemannian, Lorentzian, or neutral metric such that its Ricci operator would coincide with a given operator.

Keywords: Ricci operator, locally homogeneous spaces, invariant metric, (pseudo)Riemannian manifolds.

1. Введение и основные результаты

Задача об установлении связей между топологией и кривизной (псевдо)риманова многообразия является одной из важных проблем (псевдо)римановой геометрии. Связь между кривизной Риччи, одномерной кривизной и топологией однородного риманова пространства изучалась в работах Дж. Милнора [1], В.Н. Берестовского [2], Е.Д. Родионова, В.В. Славского, Ю.Г. Никонорова [3, 4].

Спектр оператора кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на группах Ли исследовался Дж. Милнором [1]. В случае трехмерных групп Ли

Klepikov, P.N.,Rodionov, E.D., Prescribed Ricci operator of four-dimensional locally homogeneous (pseudo)Riemannian manifolds with non-trivial isotropy subgroup.

Первый автор поддержан Математическим Центром в Академгородке (соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075–15–2022–282), второй автор поддержан РНФ (грант № 22–21–00111).

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

с левоинвариантной римановой метрикой им были найдены возможные сигнатуры оператора Риччи. Позднее О. Ковальский, С. Никшевич решили задачу о предписанных значениях спектра оператора Риччи на трехмерных метрических группах Ли, а также трехмерных римановых локально-однородных пространствах [5]. В дальнейшем аналогичные результаты для оператора одномерной кривизны, а также для оператора секционной кривизны получены Д.Н. Оскорбиным, Е.Д. Родионовым, О.П. Хромовой [4, 6, 7].

В случае инвариантных лоренцевых метрик на локально однородных пространствах известна работа Дж. Кальварусо, О. Ковальского [8], в которой исследуется задача о существовании трехмерного локально однородного лоренцева многообразия с заданным оператором Риччи. Аналогичные результаты для оператора одномерной кривизны получены в работах [9, 10], а для оператора секционной кривизны — в работе [11].

В четырехмерном случае известны работы А.Г. Кремлева и Ю.Г. Никонорова [12, 13], в которых определены возможные сигнатуры кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на группах Ли, однако задача о предписанном операторе Риччи в данном случае пока не решена.

В более высоких размерностях существуют лишь частичные результаты. Например, в работе [14] Ю.Г. Никоноров показал, что оператор Риччи неунимодулярной разрешимой группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой имеет как минимум два отрицательных собственных значения.

Основным результатом данной работы является доказательство следующих теорем.

Теорема 1. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи некоторого четырехмерного локально однородного риманова многообразия с нетривиальной подгруппой изотропии тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, которые с точностью до переобозначения удовлетворяют одному (или нескольким) из следующих условий:*

- $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4$;
- $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$, $\rho_4 = 0$;
- $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_3 = \rho_4$;
- $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$, $\rho_4 < 0$;
- $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_1 + \rho_3 = 2\rho_4 < 0$, $2\rho_4 - 3\rho_1 > 0$;
- $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$, $\rho_1 \neq \rho_4$, $2\rho_1 + \rho_4 < 0$, $\rho_3 = \frac{2\rho_1^2+\rho_4^2}{2\rho_1+\rho_4} < 0$;
- $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_3 > 0$, $\rho_4 = 0$.

Теорема 2. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи некоторого четырехмерного локально однородного лоренцева многообразия с нетривиальной подгруппой изотропии тогда и только тогда, когда*

- *либо $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, которые с точностью до переобозначения удовлетворяют одному (или нескольким) из следующих условий:*
  - $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4$;
  - $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$, $\rho_4 = 0$;
  - $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_3 = \rho_4$;
  - $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$, ρ_4 — *произвольное;*
  - $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_1 + \rho_3 = 2\rho_4 \neq 0$, $\frac{2\rho_4 - 3\rho_1}{\rho_4} > 0$;
  - $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$, $\rho_1 \neq \rho_4$, $2\rho_1 + \rho_4 \neq 0$, $\rho_3 = \frac{2\rho_1^2+\rho_4^2}{2\rho_1+\rho_4} \neq 0$;

  – $\rho_1 = \rho_2$, ρ_3 — *произвольное,* $\rho_4 = 0$*;*
- *либо* $\mathcal{R}$ *имеет тип Сегре* $\{112\}$ *с собственными значениями* ρ_1, ρ_2, ρ_3^2, *которые с точностью до переобозначения* $\rho_1 \leftrightarrow \rho_2$ *удовлетворяют одному (или нескольким) из следующих условий:*
  – $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3^2 \leqslant 0$*;*
  – $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_3^2 = 0$*;*
  – $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = \rho_3^2 < 0$.

Теорема 3. *Оператор* $\mathcal{R}$ *будет оператором Риччи некоторого четырехмерного локально однородного многообразия с инвариантной нейтральной метрикой и нетривиальной подгруппой изотропии тогда и только тогда, когда*

- *либо* $\mathcal{R}$ *имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями* ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, *которые с точностью до переобозначения удовлетворяют одному (или нескольким) из следующих условий:*
  – $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4$*;*
  – $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$, $\rho_4 = 0$*;*
  – $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_3 = \rho_4$*;*
  – $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$, ρ_4 — *произвольное;*
  – $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_1 + \rho_3 = 2\rho_4 \neq 0$, $\frac{2\rho_4 - 3\rho_1}{\rho_4} < 0$*;*
  – $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$, $\rho_1 \neq \rho_4$, $2\rho_1 + \rho_4 \neq 0$, $\rho_3 = \frac{2\rho_1^2 + \rho_4^2}{2\rho_1 + \rho_4} \neq 0$*;*
  – $\rho_1 = \rho_2$, ρ_3 — *произвольное,* $\rho_4 = 0$*;*
- *либо* $\mathcal{R}$ *имеет тип Сегре* $\{112\}$ *с собственными значениями* ρ_1, ρ_2, ρ_3^2, *которые с точностью до переобозначения* $\rho_1 \leftrightarrow \rho_2$ *удовлетворяют одному (или нескольким) из следующих условий:*
  – $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3^2$*;*
  – $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_3^2 = 0$*;*
  – $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = \rho_3^2$*;*
- *либо* $\mathcal{R}$ *имеет тип Сегре* $\{22\}$ *с собственными значениями*
$$\rho_1^2 = \rho_2^2 = 0;$$
- *либо* $\mathcal{R}$ *имеет тип Сегре* $\{1\bar{1}1\bar{1}\}$ *с двумя совпадающими парами комплексно-сопряженных собственных значений*
$$\rho_1 = \bar{\rho}_2 = \rho_3 = \bar{\rho}_4 \neq 0.$$

Теорема 1 является компиляцией результатов предложений 2–25 (они будут доказаны в разделе 5); теорема 2 — компиляция предложений 26–70 (они будут доказаны в разделе 6); теорема 3 — компиляция предложений 71–127 (они будут доказаны в разделе 7).

2. Основные обозначения и факты.

Пусть $(M = G/H, g)$ — локально однородное (псевдо)риманово многообразие размерности n. Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли группы G, через $\mathfrak{h}$ — подалгебру изотропии, а через $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ — дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$.

Пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ однозначно определяет представление изотропии $\psi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ с помощью правила $\psi_X(Y) = [X, Y]_{\mathfrak{m}}$ $\forall X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{m}$. Инвариантной (псевдо)римановой метрике на G/H соответствует невырожденная билинейная форма g на $\mathfrak{m}$ такая, что
$$(\psi_X)^t \cdot g + g \cdot \psi_X = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{h},$$

где $(\psi_X)^t$ — транспонированная матрица. Эта форма однозначно определяет связность Леви-Чивита $\nabla : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ правилом

$$\nabla_X(Y_\mathfrak{m}) = \frac{1}{2}[X, Y]_\mathfrak{m} + v(X, Y),$$

где отображение $v : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{m}$ определяется формулой

$$2g(v(X, Y), Z_\mathfrak{m}) = g(X_\mathfrak{m}, [Z, Y]_\mathfrak{m}) + g(Y_\mathfrak{m}, [Z, X]_\mathfrak{m}).$$

Тензору кривизны связности ∇ соответствует отображение $R : \mathfrak{m}\times\mathfrak{m} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ такое, что

$$R(X, Y) = [\nabla_Y, \nabla_X] + \nabla_{[X,Y]}.$$

Тензор Риччи r и оператор Риччи ρ определяются формулами

$$r(X, Y) = \mathrm{tr}(Z \to R(X, Z)Y), \quad g\left(\rho\left(X\right), Y\right) = r(X, Y).$$

Далее приведем математическую модель, позволяющую вычислять матрицу оператора Риччи на локально однородном (псевдо)римановом пространстве (подробнее см. [15, 16, 17]).

Пусть, как и ранее, $(M = G/H, g)$ — однородное (псевдо)риманово многообразие размерности n, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $\mathfrak{h}$ — подалгебра изотропии, $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ — дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$, $h = \dim\mathfrak{h}$, $m = \dim\mathfrak{m}$.

Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_h, u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ — базис $\mathfrak{g}$, где $\{e_i\}$ и $\{u_i\}$ базисы $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}$ соответственно. Положим

$$[u_i, u_j]_\mathfrak{m} = c^k_{ij}u_k, \quad [u_i, u_j]_\mathfrak{h} = C^k_{ij}e_k, \quad [h_i, u_j]_\mathfrak{m} = \bar{c}^k_{ij}u_k,$$

где c^k_{ij}, C^k_{ij} и $\bar{c}^k_{ij}$ — массивы соответствующих размеров.

Первым шагом вычислим представление изотропии ψ на базисных векторах $\mathfrak{h}$:

$$(\psi_i)^k_j = \left(\psi\left(e_i\right)\right)^k_j = \bar{c}^k_{ij}, \tag{1}$$

и запишем условие инвариантности метрического тензора g:

$$(\psi_i)^t \cdot g + g \cdot \psi_i = 0, \quad i = 1, \ldots, h, \tag{2}$$

где $(\psi_i)^t$ — транспонированная матрица.

Далее, с помощью уже известных структурных констант и матрицы метрического тензора, найдем компоненты связности Леви-Чивита ∇:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\left(c^k_{ij} + g^{sk}c^l_{sj}g_{il} + g^{sk}c^l_{si}g_{jl}\right), \quad \bar{\Gamma}^k_{ij} = \frac{1}{2}\bar{c}^k_{ij} - \frac{1}{2}g^{sk}\bar{c}^l_{is}g_{jl} : \tag{3}$$

где $\nabla_{u_i}u_j = \Gamma^k_{ij}u_k$, $\nabla_{h_i}u_j = \bar{\Gamma}^k_{ij}u_k$ и $\left\{g^{ij}\right\}$ — матрица, обратная к матрице $\{g_{ij}\}$.

Следующим шагом является вычисление компонент тензора кривизны R и тензора Риччи r:

$$R_{ijks} = \left(\Gamma^l_{ik}\Gamma^p_{jl} - \Gamma^l_{jk}\Gamma^p_{il} + c^l_{ij}\Gamma^p_{lk} + C^l_{ij}\bar{\Gamma}^p_{lk}\right)g_{ps}, \quad r_{ik} = R_{ijks}g^{js}. \tag{4}$$

Теперь мы можем вычислить компоненты оператора Риччи:

$$\rho^k_i = r_{is}g^{sk}. \tag{5}$$

В данной работе мы будем использовать классификацию четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий полученную в работе [18]. В данной работе для каждого из 186 случаев указаны скобки Ли, определяющие алгебру Ли группы G, параметры могут принимать любые действительные значения, если не указано обратное; во всех случаях подалгебра изотропии $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\,(e_i)$, дополнение $\mathfrak{m} = \mathrm{span}\,(u_i)$. Далее по тексту мы будем ссылаться на случаи из данной классификации по их номеру (например, "$2.1^3.5$").

3. Инвариантные метрики четырехмерных локально однородных многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии

В данном разделе мы приведем все возможные матрицы метрического тензора для четырехмерных локально однородных многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии. Для каждой матрицы в таблице 1 указано при каких условиях на параметры она определяет риманову, лоренцеву или нейтральную метрику. Если какой-то случай невозможен, то в соответствующей клетке стоит знак "$\times$".

Алгоритм вычисления вида матрицы инвариантного метрического тензора изложен выше. Мы разберем лишь первый случай, вычисления в остальных случаях выполняются аналогично. Кроме того, для каждой матрицы мы укажем случаи, в которых реализуется данная матрица.

Мы будем называть метрику "римановой", если ее определяет матрица с сигнатурой $(+,+,+,+)$; "лоренцевой", если $(+,+,+,-)$; "нейтральной", если $(+,+,-,-)$; "антилоренцевой", если $(+,-,-,-)$.

Для определения сигнатуры метрики мы будем использовать прямое вычисление собственных значений, тот факт, что определитель матрицы равен произведению всех собственных значений, а также уточненное правило Декарта.

Лемма 1 (Уточненное правило Декарта [19])**.** *Если все корни многочлена $P(x)$ с вещественными коэффициентами вещественны (в частности, это условие выполнено для характеристического многочлена вещественной симметричной матрицы), а его свободный член отличен от нуля, то число положительных корней этого многочлена равно числу перемен знаков в системе его коэффициентов, а число его отрицательных корней равно числу перемен знаков в системе коэффициентов многочлена $P(-x)$.*

Матрица 1. Данная матрица реализуется, например, в случае $1.1^1.7$, в котором скобки Ли имеют следующий вид:

$$[e_1, u_1] = u_1, \quad [e_1, u_3] = -u_3, \quad [u_1, u_3] = e_1,$$

где $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\,(e_1)$, $\mathfrak{m} = \mathrm{span}\,(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Вычислим представление изотропии (1):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть метрический тензор имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

Таблица 1. Вид инвариантных метрик четырехмерных локально однородных многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии

№	Матрица метрического тензора	Риманова метрика	Лоренцева метрика	Нейтральная метрика
1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\times$	$\alpha_{13} \neq 0$, $\alpha_{22} > 0$, $\alpha_{44} > 0$, $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 > 0$	$\alpha_{13} \neq 0$, $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 < 0$
2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\times$	$\times$	$\alpha_{13} \neq 0$, $\alpha_{24} \neq 0$
3	$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{22} > 0$, $\alpha_{33} > 0$, $\alpha_{44} > 0$, $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 > 0$	$\alpha_{33} > 0$, $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 < 0$	($\alpha_{33} > 0$, $\alpha_{22} < 0$, $\alpha_{44} < 0$ или $\alpha_{33} < 0$, $\alpha_{22} > 0$, $\alpha_{44} > 0$) и $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 > 0$
4	$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{33} > 0$, $\alpha_{44} > 0$	$\times$	$\alpha_{33} > 0$, $\alpha_{44} < 0$ или $\alpha_{33} < 0$, $\alpha_{44} > 0$
5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ -\alpha_{23} & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\times$	$\times$	$\alpha_{23} \neq 0$
6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{22} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ -\alpha_{22} & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\times$	$\alpha_{22} > 0$, $\alpha_{44} > 0$	$\alpha_{22} > 0$, $\alpha_{44} < 0$ или $\alpha_{22} < 0$, $\alpha_{44} > 0$
7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\times$	$\alpha_{13} \neq 0$, $\alpha_{44} > 0$	$\times$

тогда условие инвариантности метрического тензора (2) будет иметь вид:

$$\alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{14} = 0, \quad \alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{33} = 0, \quad \alpha_{34} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 1.

Данная матрица не может определять риманову метрику, так как имеет нули на главной диагонали.

Данная матрица имеет характеристический многочлен:

$$x^4 - (\alpha_{44} + \alpha_{22})\, x^3 - \left(\alpha_{13}^2 - \alpha_{22}\alpha_{44} + \alpha_{24}^2\right) x^2 + \\ + \alpha_{13}^2(\alpha_{44} + \alpha_{22})x - \alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2) = 0.$$

Продолжение таблицы 1

№	Матрица метрического тензора	Риманова метрика	Лоренцева метрика	Нейтральная метрика
8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{24} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ -\alpha_{24} & \alpha_{23} & 0 & 0 \\ \alpha_{23} & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\times$	$\times$	$\alpha_{23}^2+\alpha_{24}^2\neq 0$
9	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\times$	$\times$	$\alpha_{24}\neq 0$
10	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & \alpha_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\times$	$\times$	$\alpha_{24}\neq 0$
11	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & \alpha_{44} & 0 \\ -\alpha_{23} & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\times$	$\times$	$\alpha_{23}\neq 0$
12	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\times$	$\times$	$\alpha_{24}\neq 0$

Если она определяет лоренцеву метрику, то по правилу Декарта многочлен должен иметь 3 перемены знаков в ряду коэффициентов. Тогда должна выполняться одна из систем:

$$\begin{cases} -(\alpha_{44}+\alpha_{22})>0, \\ -\left(\alpha_{13}^2-\alpha_{22}\alpha_{44}+\alpha_{24}^2\right)<0, \\ \alpha_{13}^2(\alpha_{44}+\alpha_{22})>0, \\ -\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)<0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -(\alpha_{44}+\alpha_{22})<0, \\ -\left(\alpha_{13}^2-\alpha_{22}\alpha_{44}+\alpha_{24}^2\right)<0, \\ \alpha_{13}^2(\alpha_{44}+\alpha_{22})>0, \\ -\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)<0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(\alpha_{44}+\alpha_{22})<0, \\ -\left(\alpha_{13}^2-\alpha_{22}\alpha_{44}+\alpha_{24}^2\right)>0, \\ \alpha_{13}^2(\alpha_{44}+\alpha_{22})>0, \\ -\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)<0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -(\alpha_{44}+\alpha_{22})<0, \\ -\left(\alpha_{13}^2-\alpha_{22}\alpha_{44}+\alpha_{24}^2\right)>0, \\ \alpha_{13}^2(\alpha_{44}+\alpha_{22})<0, \\ -\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)<0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(\alpha_{44}+\alpha_{22})=0, \\ -\left(\alpha_{13}^2-\alpha_{22}\alpha_{44}+\alpha_{24}^2\right)<0, \\ \alpha_{13}^2(\alpha_{44}+\alpha_{22})>0, \\ -\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)<0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -(\alpha_{44}+\alpha_{22})<0, \\ -\left(\alpha_{13}^2-\alpha_{22}\alpha_{44}+\alpha_{24}^2\right)=0, \\ \alpha_{13}^2(\alpha_{44}+\alpha_{22})>0, \\ -\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)<0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(\alpha_{44}+\alpha_{22})<0, \\ -\left(\alpha_{13}^2-\alpha_{22}\alpha_{44}+\alpha_{24}^2\right)>0, \\ \alpha_{13}^2(\alpha_{44}+\alpha_{22})=0, \\ -\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)<0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -(\alpha_{44}+\alpha_{22})<0, \\ -\left(\alpha_{13}^2-\alpha_{22}\alpha_{44}+\alpha_{24}^2\right)>0, \\ \alpha_{13}^2(\alpha_{44}+\alpha_{22})<0, \\ -\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)=0. \end{cases}$$

Продолжение таблицы 1

№	Матрица метрического тензора	Риманова метрика	Лоренцева метрика	Нейтральная метрика
13	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ \alpha_{44} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\times$	$\alpha_{44} > 0$	$\times$
14	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\times$	$\times$	$\alpha_{24} \neq 0$
15	$\begin{pmatrix} \alpha_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{44} > 0$	$\times$	$\times$
16	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & 0 & 0 \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\times$	$\times$	$\alpha_{13}\alpha_{24} - \alpha_{14}\alpha_{23} \neq 0$
17	$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & \alpha_{34} & 0 & -\alpha_{23} \\ \alpha_{34} & \alpha_{44} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ -\alpha_{23} & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{33} + \alpha_{44} > 0$, $\alpha_{23}^2 - \alpha_{33}\alpha_{44} + \alpha_{34}^2 < 0$	$\times$	$\alpha_{23}^2 - \alpha_{33}\alpha_{44} + \alpha_{34}^2 > 0$
18	$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\times$	$\alpha_{24} \neq 0$, $\alpha_{33} > 0$	$\times$
19	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & -\alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & \alpha_{23} & 0 & 0 \\ -\alpha_{23} & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\times$	$\times$	$\alpha_{23}^2 + \alpha_{24}^2 \neq 0$
20	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\times$	$\times$	$\alpha_{24} \neq 0$
21	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & 0 & 0 \\ -\alpha_{23} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\times$	$\times$	$\alpha_{23} \neq 0$

Заметим, что первая, четвертая, пятая, седьмая и восьмая системы являются несовместными из-за первого и третьего уравнений. Преобразуем оставшиеся:

$$\begin{cases} \alpha_{44} + \alpha_{22} > 0, \\ \alpha_{13}^2 - \alpha_{22}\alpha_{44} + \alpha_{24}^2 > 0, \\ \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_{44} + \alpha_{22} > 0, \\ \alpha_{13}^2 - \alpha_{22}\alpha_{44} + \alpha_{24}^2 < 0, \\ \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{44} + \alpha_{22} > 0, \\ \alpha_{13}^2 - \alpha_{22}\alpha_{44} + \alpha_{24}^2 = 0, \\ \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 > 0. \end{cases}$$

Таким образом, матрица определяет лоренцеву метрику, если $\alpha_{44} + \alpha_{22} > 0$ и $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 > 0$.

Продолжение таблицы 1

№	Матрица метрического тензора	Риманова метрика	Лоренцева метрика	Нейтральная метрика
22	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{22} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ -\alpha_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\times$	$\alpha_{22} > 0$, $\alpha_{44} > 0$	$\alpha_{22} > 0$, $\alpha_{44} < 0$ или $\alpha_{22} < 0$, $\alpha_{44} > 0$
23	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ \alpha_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\times$	$\alpha_{44} > 0$	$\times$
24	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\alpha_{22} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 2\alpha_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\times$	$\alpha_{22} > 0$, $\alpha_{44} > 0$	$\alpha_{22} > 0$, $\alpha_{44} < 0$ или $\alpha_{22} < 0$, $\alpha_{44} > 0$
25	$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{33} > 0$, $\alpha_{44} > 0$	$\alpha_{33} > 0$, $\alpha_{44} < 0$	$\times$
26	$\begin{pmatrix} -\alpha_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\times$	$\alpha_{44} < 0$	$\times$

Заметим, что если α_{22} и α_{44} разных знаков или хотя бы один из них равен нулю, тогда $\alpha_{22}\alpha_{44} \leqslant 0$, следовательно $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 \leqslant -\alpha_{24}^2 \leqslant 0$ — противоречие с условием $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 > 0$. Следовательно α_{22} и α_{44} обязаны быть одного знака. Но тогда условие $\alpha_{22} + \alpha_{44} > 0$ равносильно тому, что α_{22} и α_{44} положительны. Таким образом, итоговое условие для того, чтобы матрица определяла лоренцеву метрику, выглядит следующим образом:

$$\alpha_{13} \neq 0, \quad \alpha_{22} > 0, \quad \alpha_{44} > 0, \quad \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 > 0.$$

Так как риманова метрика невозможна из-за нулей на главной диагонали, то матрица будет определять нейтральную метрику тогда и только тогда, когда ее определитель положителен, то есть

$$-\alpha_{13}^2 \left(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2\right) > 0,$$

что равносильно

$$\alpha_{13} \neq 0, \quad \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 < 0.$$

Данная матрица реализуется как матрица инвариантного метрического тензора для случаев $1.1^1.(1–7)$ и $1.1^1.10$ при $\lambda = 0$.

Матрица 2. Данная матрица имеет неотрицательный определитель равный $\alpha_{13}^2\alpha_{24}^2$, значит лоренцева сигнатура невозможна. Риманова сигнатура также невозможна, так как матрица не является положительно определённой из-за нулей на главной диагонали. Значит она имеет сигнатуру $(2,2)$ при $\alpha_{13} \neq 0$ и $\alpha_{24} \neq 0$.

Данная матрица реализуется как матрица инвариантного метрического тензора для случаев $1.1^1.(8–9)$, $1.1^1.10$ при $\lambda \notin \{0,1\}$, $2.1^1.(1–3)$.

Матрица 3. Если данная матрица определяет риманову метрику, то все элементы на главной диагонали и минор, который включает вторые и четвертые строку и столбец, должны быть положительны, то есть:

$$\alpha_{22} > 0, \quad \alpha_{33} > 0, \quad \alpha_{44} > 0, \quad \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 > 0.$$

Данная матрица имеет собственные значения:

$$g_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\alpha_{22} + \alpha_{44} \pm \sqrt{(\alpha_{22} - \alpha_{44})^2 + 4\alpha_{24}^2}\right), \quad g_3 = g_4 = \alpha_{33}.$$

Если она определяет лоренцеву метрику, то $g_3 = g_4 = \alpha_{33} > 0$, а g_1 и g_2 — разного знака. Значит

$$g_1 g_2 = \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 < 0.$$

Если матрица определяет нейтральную метрику, то либо $g_3 = g_4 = \alpha_{33} > 0$ и $g_1 < 0$, $g_2 < 0$; либо $g_3 = g_4 = \alpha_{33} < 0$ и $g_1 > 0$, $g_2 > 0$. Тогда

$$\alpha_{33} > 0, \quad \alpha_{22} + \alpha_{44} < 0, \quad \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 > 0$$

или

$$\alpha_{33} < 0, \quad \alpha_{22} + \alpha_{44} > 0, \quad \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 > 0.$$

Заметим, что если α_{22} и α_{44} разных знаков или хотя бы один из них равен нулю, тогда $\alpha_{22}\alpha_{44} \leqslant 0$, следовательно $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 \leqslant -\alpha_{24}^2 \leqslant 0$ — противоречие с условием $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 > 0$. Следовательно α_{22} и α_{44} обязаны быть одного знака. Но тогда условие $\alpha_{22} + \alpha_{44} < 0$ равносильно тому, что α_{22} и α_{44} отрицательны, а условие $\alpha_{22} + \alpha_{44} > 0$ — что α_{22} и α_{44} положительны. Таким образом, итоговое условие для того, чтобы матрица определяло нейтральную метрику, выглядит следующим образом:

$$\alpha_{33} > 0, \quad \alpha_{22} < 0, \quad \alpha_{44} < 0, \quad \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 > 0$$

или

$$\alpha_{33} < 0, \quad \alpha_{22} > 0, \quad \alpha_{44} > 0, \quad \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 > 0.$$

Данная матрица реализуется как матрица инвариантного метрического тензора для случаев $1.1^2.(1\text{–}10)$, $1.1^2.12$ при $\lambda = 0$.

Матрица 4. Данная матрица имеет собственные значения:

$$g_1 = g_3 = \alpha_{33}, \quad g_2 = g_4 = \alpha_{44}.$$

Таким образом, она имеет сигнатуру либо $(4, 0)$, если $\alpha_{33} > 0$, $\alpha_{44} > 0$; либо $(2, 2)$, если $\alpha_{33} > 0$, $\alpha_{44} < 0$ или $\alpha_{33} < 0$, $\alpha_{44} > 0$.

Данная матрица реализуется как матрица инвариантного метрического тензора для случаев $1.1^2.11$, $1.1^2.12$ при $\lambda \notin \{0, 1\}$, $2.1^3.(1\text{–}6)$.

Матрица 5. Данная матрица имеет неотрицательный определитель равный α_{23}^4, значит лоренцева сигнатура невозможна. Риманова сигнатура также невозможна, так как матрица не является положительно определённой из-за нулей на главной диагонали. Значит она имеет сигнатуру $(2, 2)$ при $\alpha_{23} \neq 0$.

Данная матрица реализуется как матрица инвариантного метрического тензора для случаев $1.3^1.(1\text{–}32)$.

Матрица 6. Данная матрица не может определять риманову метрику, так как имеет нули на главной диагонали.

Данная матрица имеет характеристический многочлен:

$$(x - \alpha_{22})\left(x^3 - (\alpha_{44} + \alpha_{33})\,x^2 - \left(\alpha_{22}^2 - \alpha_{33}\alpha_{44} + \alpha_{34}^2\right)x + \alpha_{22}^2\alpha_{44}\right) = 0.$$

Если она определяет лоренцеву метрику, то либо $\alpha_{22} > 0$ и кубический многочлен должен иметь 2 перемены знаков в ряду коэффициентов; либо $\alpha_{22} < 0$ и кубический многочлен должен иметь 3 перемены знаков в ряду коэффициентов. Тогда должна выполняться одна из систем:

$$\begin{cases} \alpha_{22} > 0, \\ -(\alpha_{44} + \alpha_{33}) > 0, \\ -\left(\alpha_{22}^2 - \alpha_{33}\alpha_{44} + \alpha_{34}^2\right) < 0, \\ \alpha_{22}^2\alpha_{44} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{22} > 0, \\ -(\alpha_{44} + \alpha_{33}) < 0, \\ -\left(\alpha_{22}^2 - \alpha_{33}\alpha_{44} + \alpha_{34}^2\right) < 0, \\ \alpha_{22}^2\alpha_{44} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{22} > 0, \\ -(\alpha_{44} + \alpha_{33}) < 0, \\ -\left(\alpha_{22}^2 - \alpha_{33}\alpha_{44} + \alpha_{34}^2\right) > 0, \\ \alpha_{22}^2\alpha_{44} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{22} > 0, \\ -(\alpha_{44} + \alpha_{33}) = 0, \\ -\left(\alpha_{22}^2 - \alpha_{33}\alpha_{44} + \alpha_{34}^2\right) < 0, \\ \alpha_{22}^2\alpha_{44} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{22} > 0, \\ -(\alpha_{44} + \alpha_{33}) < 0, \\ -\left(\alpha_{22}^2 - \alpha_{33}\alpha_{44} + \alpha_{34}^2\right) = 0, \\ \alpha_{22}^2\alpha_{44} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{22} > 0, \\ -(\alpha_{44} + \alpha_{33}) < 0, \\ -\left(\alpha_{22}^2 - \alpha_{33}\alpha_{44} + \alpha_{34}^2\right) > 0, \\ \alpha_{22}^2\alpha_{44} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{22} < 0, \\ -(\alpha_{44} + \alpha_{33}) < 0, \\ -\left(\alpha_{22}^2 - \alpha_{33}\alpha_{44} + \alpha_{34}^2\right) > 0, \\ \alpha_{22}^2\alpha_{44} < 0. \end{cases}$$

Заметим, что шестая система невозможна, так как в этом случае матрица будет иметь нулевое собственное значение. Преобразуем оставшиеся системы:

$$\begin{cases} \alpha_{22} > 0, \\ \alpha_{44} > 0, \\ \alpha_{44} + \alpha_{33} > 0, \\ \alpha_{22}^2 - \alpha_{33}\alpha_{44} + \alpha_{34}^2 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{22} > 0, \\ \alpha_{44} > 0, \\ \alpha_{44} + \alpha_{33} > 0, \\ \alpha_{22}^2 - \alpha_{33}\alpha_{44} + \alpha_{34}^2 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{22} > 0, \\ \alpha_{44} > 0, \\ \alpha_{44} + \alpha_{33} > 0, \\ \alpha_{22}^2 - \alpha_{33}\alpha_{44} + \alpha_{34}^2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{22} > 0, \\ \alpha_{44} > 0, \\ \alpha_{44} + \alpha_{33} < 0 \ \Rightarrow \ \alpha_{33} < 0, \\ \alpha_{33}\alpha_{44} < \alpha_{22}^2 + \alpha_{34}^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{22} > 0, \\ \alpha_{44} > 0, \\ \alpha_{44} + \alpha_{33} = 0 \ \Rightarrow \ \alpha_{33} < 0, \\ \alpha_{33}\alpha_{44} < \alpha_{22}^2 + \alpha_{34}^2; \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{22} < 0, \\ \alpha_{44} < 0, \\ \alpha_{44} + \alpha_{33} > 0 \ \Rightarrow \ \alpha_{33} > 0, \\ \alpha_{22}^2 + \alpha_{34}^2 < \alpha_{33}\alpha_{44}. \end{cases}$$

Первые три системы равносильны условию $\alpha_{22} > 0$, $\alpha_{44} > 0$, $\alpha_{44} + \alpha_{33} > 0$; последнее неравенство в четвертой и пятой системах следует из остальных неравенств, значит из них получаем условие $\alpha_{22} > 0$, $\alpha_{44} > 0$, $\alpha_{44} + \alpha_{33} \leqslant 0$; шестая система является несовместной из-за последнего условия. Объединяя, получаем, что матрица определяет лоренцеву метрику тогда и только тогда, когда $\alpha_{22} > 0$, $\alpha_{44} > 0$.

Если матрица определяет антилоренцеву метрику, то либо $\alpha_{22} < 0$ и кубический многочлен от переменной $-x$ должен иметь 2 перемены знаков в ряду коэффициентов; либо $\alpha_{22} > 0$ и кубический многочлен от переменной $-x$ должен иметь 3 перемены знаков в ряду коэффициентов. Тогда должна выполняться одна из систем:

$$\begin{cases} \alpha_{22} < 0, \\ \alpha_{44} + \alpha_{33} > 0, \\ -\left(\alpha_{22}^2 - \alpha_{33}\alpha_{44} + \alpha_{34}^2\right) < 0, \\ -\alpha_{22}^2\alpha_{44} > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_{22} < 0, \\ \alpha_{44} + \alpha_{33} < 0, \\ -\left(\alpha_{22}^2 - \alpha_{33}\alpha_{44} + \alpha_{34}^2\right) < 0, \\ -\alpha_{22}^2\alpha_{44} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{22} < 0, \\ \alpha_{44} + \alpha_{33} < 0, \\ -\left(\alpha_{22}^2 - \alpha_{33}\alpha_{44} + \alpha_{34}^2\right) > 0, \\ -\alpha_{22}^2\alpha_{44} > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_{22} < 0, \\ \alpha_{44} + \alpha_{33} = 0, \\ -\left(\alpha_{22}^2 - \alpha_{33}\alpha_{44} + \alpha_{34}^2\right) < 0, \\ -\alpha_{22}^2\alpha_{44} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{22} < 0, \\ \alpha_{44} + \alpha_{33} < 0, \\ -\left(\alpha_{22}^2 - \alpha_{33}\alpha_{44} + \alpha_{34}^2\right) = 0, \\ -\alpha_{22}^2\alpha_{44} > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_{22} < 0, \\ \alpha_{44} + \alpha_{33} < 0, \\ -\left(\alpha_{22}^2 - \alpha_{33}\alpha_{44} + \alpha_{34}^2\right) > 0, \\ -\alpha_{22}^2\alpha_{44} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{22} > 0, \\ \alpha_{44} + \alpha_{33} < 0, \\ -\left(\alpha_{22}^2 - \alpha_{33}\alpha_{44} + \alpha_{34}^2\right) > 0, \\ -\alpha_{22}^2\alpha_{44} < 0. \end{cases}$$

Заметим, что шестая система невозможна, так как в этом случае матрица будет иметь нулевое собственное значение. Преобразуем оставшиеся системы:

$$\begin{cases} \alpha_{22} < 0, \\ \alpha_{44} < 0, \\ \alpha_{44} + \alpha_{33} < 0, \\ \alpha_{22}^2 - \alpha_{33}\alpha_{44} + \alpha_{34}^2 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_{22} < 0, \\ \alpha_{44} < 0, \\ \alpha_{44} + \alpha_{33} < 0, \\ \alpha_{22}^2 - \alpha_{33}\alpha_{44} + \alpha_{34}^2 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{22} < 0, \\ \alpha_{44} < 0, \\ \alpha_{44} + \alpha_{33} < 0, \\ \alpha_{22}^2 - \alpha_{33}\alpha_{44} + \alpha_{34}^2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_{22} < 0, \\ \alpha_{44} < 0, \\ \alpha_{44} + \alpha_{33} > 0 \;\Rightarrow\; \alpha_{33} > 0, \\ \alpha_{22}^2 + \alpha_{34}^2 > \alpha_{33}\alpha_{44}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{22} < 0, \\ \alpha_{44} < 0, \\ \alpha_{44} + \alpha_{33} = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_{33} > 0, \\ \alpha_{22}^2 + \alpha_{34}^2 > \alpha_{33}\alpha_{44}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_{22} > 0, \\ \alpha_{44} > 0, \\ \alpha_{44} + \alpha_{33} < 0 \;\Rightarrow\; \alpha_{33} < 0, \\ \alpha_{22}^2 + \alpha_{34}^2 < \alpha_{33}\alpha_{44}. \end{cases}$$

Первые три системы равносильны условию $\alpha_{22} < 0$, $\alpha_{44} < 0$, $\alpha_{44} + \alpha_{33} < 0$; последнее неравенство в четвертой и пятой системах следует из остальных неравенств, значит из них получаем условие $\alpha_{22} < 0$, $\alpha_{44} < 0$, $\alpha_{44} + \alpha_{33} \geqslant 0$; шестая система является несовместной из-за последнего условия. Объединяя, получаем, что матрица определяет антилоренцеву метрику тогда и только тогда, когда $\alpha_{22} < 0$, $\alpha_{44} < 0$.

Тогда матрица определяет метрику нейтральной сигнатуры при $\alpha_{22} > 0$, $\alpha_{44} < 0$ или $\alpha_{22} < 0$, $\alpha_{44} > 0$.

Данная матрица реализуется как матрица инвариантного метрического тензора для случаев $1.4^1.(1–26)$.

Матрица 7. Данная матрица имеет собственные значения:

$$g_1 = -g_2 = \alpha_{13}, \quad g_3 = g_4 = \alpha_{44}.$$

Таким образом, она имеет сигнатуру $(3, 1)$, если $\alpha_{13} \neq 0$, $\alpha_{44} > 0$.

Данная матрица реализуется как матрица инвариантного метрического тензора для случаев $1.1^3.1$, $2.1^2.(1–6)$.

Матрица 8. Данная матрица имеет собственные значения:

$$g_1 = g_2 = -g_3 = -g_4 = \sqrt{\alpha_{23}^2 + \alpha_{24}^2}.$$

Таким образом, она имеет сигнатуру $(2, 2)$, если $\alpha_{23}^2 + \alpha_{24}^2 \neq 0$.

Данная матрица реализуется как матрица инвариантного метрического тензора для случаев $1.1^5.1$, $2.1^4.(1–2)$.

Матрица 9. Данная матрица является частным случаем матрицы 1 при $\alpha_{13} = \alpha_{24}$ и $\alpha_{44} = 0$. Таким образом, она имеет сигнатуру $(2, 2)$, если $\alpha_{24} \neq 0$.

Данная матрица реализуется как матрица инвариантного метрического тензора для случаев $2.2^1.(1–3)$, $2.2^1.7$ при $\lambda = 1$.

Матрица 10. Данная матрица имеет собственные значения:

$$g_{1,2,3,4} = \frac{1}{2}\left(\pm\alpha_{23} \pm \sqrt{\alpha_{23}^2 + 4\alpha_{24}^2}\right).$$

Таким образом, она имеет сигнатуру $(2, 2)$, если $\alpha_{24} \neq 0$.

Данная матрица реализуется как матрица инвариантного метрического тензора для случаев $1.2^1.1$, $2.2^1.(4–5)$, $2.2^1.7$ при $\lambda = 0$.

Матрица 11. Данная матрица имеет собственные значения:

$$g_1 = g_2 = \frac{1}{2}\left(\alpha_{44} + \sqrt{4\alpha_{23}^2 + \alpha_{44}^2}\right), \quad g_3 = g_4 = \frac{1}{2}\left(\alpha_{44} - \sqrt{4\alpha_{23}^2 + \alpha_{44}^2}\right).$$

Таким образом, она имеет сигнатуру $(2, 2)$, если $\alpha_{23} \neq 0$.

Данная матрица реализуется как матрица инвариантного метрического тензора для случаев $2.2^2.(1–4)$.

Матрица 12. Данная матрица имеет неотрицательный определитель равный α_{24}^4, значит лоренцева сигнатура невозможна. Риманова сигнатура также невозможна, так как матрица не является положительно определённой из-за нулей на главной диагонали. Значит она имеет сигнатуру $(2, 2)$ при $\alpha_{24} \neq 0$.

Данная матрица реализуется как матрица инвариантного метрического тензора для случаев $2.5^1.(1–14)$, $3.3^1.(1–4)$.

Матрица 13. Данная матрица имеет собственные значения:

$$g_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\alpha_{33} \pm \sqrt{\alpha_{33}^2 + 4\alpha_{44}^2}\right), \quad g_3 = g_4 = \alpha_{44}.$$

Таким образом, она имеет сигнатуру $(3, 1)$, если $\alpha_{44} > 0$.

Данная матрица реализуется как матрица инвариантного метрического тензора для случаев $2.5^2.(1–7)$, $3.3^2.(1–4)$.

Матрица 14. Данная матрица является частным случаем матрицы 9 при $\alpha_{22} = 0$. Таким образом, она имеет сигнатуру $(2, 2)$, если $\alpha_{24} \neq 0$.

Данная матрица реализуется как матрица инвариантного метрического тензора для случаев $2.2^1.6$, $2.2^1.7$ при $\lambda \notin \{0, 1\}$, $2.3^1.1$, $3.1^1.1$, $3.2^1.(1–4)$, $3.4^1.1$, $4.1^1.1$, $4.2^1.(1–2)$, $4.2^3.(1–2)$, $4.3^1.(1–2)$, $5.1^1.1$, $6.1^1.(1–2)$.

Матрица 15. Данная матрица имеет собственные значения:

$$g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = \alpha_{44}.$$

Таким образом, она имеет сигнатуру $(4, 0)$, если $\alpha_{44} > 0$.

Данная матрица реализуется как матрица инвариантного метрического тензора для случаев $3.4^2.1$, $4.2^2.(1–3)$, $6.1^2.(1–3)$.

Матрица 16. Данная матрица имеет неотрицательный определитель равный $(\alpha_{13}\alpha_{24} - \alpha_{14}\alpha_{23})^2$, значит лоренцева сигнатура невозможна. Риманова сигнатура также невозможна, так как матрица не является положительно определённой из-за нулей на главной диагонали. Значит она имеет сигнатуру $(2, 2)$ при $\alpha_{13}\alpha_{24} - \alpha_{14}\alpha_{23} \neq 0$.

Данная матрица реализуется как матрица инвариантного метрического тензора для случая $1.1^1.10$ при $\lambda = 1$.

Матрица 17. Определитель матрицы равен $\left(\alpha_{23}^2 - \alpha_{33}\alpha_{44} + \alpha_{34}^2\right)^2 > 0$, следовательно она не может определять лоренцеву метрику.

Данная матрица имеет собственные значения:

$$g_1 = g_2 = \frac{1}{2}\left(\alpha_{33} + \alpha_{44} + \sqrt{4\alpha_{23}^2 + 4\alpha_{34}^2 + (\alpha_{33} - \alpha_{44})^2}\right),$$
$$g_3 = g_4 = \frac{1}{2}\left(\alpha_{33} + \alpha_{44} - \sqrt{4\alpha_{23}^2 + 4\alpha_{34}^2 + (\alpha_{33} - \alpha_{44})^2}\right).$$

Если данная матрица определяет риманову метрику, то

$$g_1 + g_3 = \alpha_{33} + \alpha_{44} > 0, \quad g_1 g_3 = -\alpha_{23}^2 + \alpha_{33}\alpha_{44} - \alpha_{34}^2 > 0;$$

если же нейтральную, то $g_1 g_3 = -\alpha_{23}^2 + \alpha_{33}\alpha_{44} - \alpha_{34}^2 < 0$.

Данная матрица реализуется как матрица инвариантного метрического тензора для случая $1.1^2.12$ при $\lambda = 1$.

Матрица 18. Данная матрица имеет собственные значения:

$$g_1 = -g_2 = \alpha_{24}, \quad g_3 = g_4 = \alpha_{33}.$$

Таким образом, она имеет сигнатуру $(3, 1)$, если $\alpha_{24} \neq 0$, $\alpha_{33} > 0$.

Данная матрица реализуется как матрица инвариантного метрического тензора для случая $1.1^4.1$.

Матрица 19. Данная матрица имеет собственные значения:

$$g_1 = g_2 = -g_3 = -g_4 = \sqrt{\alpha_{23}^2 + \alpha_{24}^2}.$$

Таким образом, она имеет сигнатуру $(2, 2)$, если $\alpha_{23}^2 + \alpha_{24}^2 \neq 0$.

Данная матрица реализуется как матрица инвариантного метрического тензора для случая $1.1^6.1$.

Матрица 20. Данная матрица имеет неотрицательный определитель равный α_{24}^4, значит лоренцева сигнатура невозможна. Риманова сигнатура также невозможна, так как матрица не является положительно определённой из-за нулей на главной диагонали. Значит она имеет сигнатуру $(2,2)$ при $\alpha_{24} \neq 0$.

Данная матрица реализуется как матрица инвариантного метрического тензора для случая $1.2^2.1$.

Матрица 21. Данная матрица имеет неотрицательный определитель равный α_{23}^4, значит лоренцева сигнатура невозможна. Риманова сигнатура также невозможна, так как матрица не является положительно определённой из-за нулей на главной диагонали. Значит она имеет сигнатуру $(2,2)$ при $\alpha_{23} \neq 0$.

Данная матрица реализуется как матрица инвариантного метрического тензора для случаев $2.2^3.1$, $3.1^2.1$.

Матрица 22. Данная матрица имеет собственные значения:

$$g_1 = g_2 = -g_3 = \alpha_{22}, \quad g_4 = \alpha_{44}.$$

Таким образом, она имеет сигнатуру $(3,1)$, если $\alpha_{22} > 0$, $\alpha_{44} > 0$; нейтральную сигнатуру, если $\alpha_{22} > 0$, $\alpha_{44} < 0$ или $\alpha_{22} < 0$, $\alpha_{44} > 0$.

Данная матрица реализуется как матрица инвариантного метрического тензора для случаев $2.4^1.(1–3)$.

Матрица 23. Данная матрица имеет собственные значения:

$$g_1 = g_2 = g_3 = -g_4 = \alpha_{44}.$$

Таким образом, она имеет сигнатуру $(3,1)$, если $\alpha_{44} > 0$.

Данная матрица реализуется как матрица инвариантного метрического тензора для случаев $3.2^2.(1–2)$, $4.1^2.1$.

Матрица 24. Данная матрица имеет собственные значения:

$$g_1 = \alpha_{22}, \quad g_2 = -g_3 = 2\alpha_{22}, \quad g_4 = \alpha_{44}.$$

Таким образом, она имеет сигнатуру $(3,1)$, если $\alpha_{22} > 0$, $\alpha_{44} > 0$; нейтральную сигнатуру, если $\alpha_{22} > 0$, $\alpha_{44} < 0$ или $\alpha_{22} < 0$, $\alpha_{44} > 0$.

Данная матрица реализуется как матрица инвариантного метрического тензора для случаев $3.5^1.(1–4)$.

Матрица 25. Данная матрица имеет собственные значения:

$$g_1 = g_2 = g_3 = \alpha_{33}, \quad g_4 = \alpha_{44}.$$

Таким образом, она имеет сигнатуру $(4,0)$, если $\alpha_{33} > 0$, $\alpha_{44} > 0$; лоренцеву сигнатуру, если $\alpha_{33} > 0$, $\alpha_{44} < 0$.

Данная матрица реализуется как матрица инвариантного метрического тензора для случаев $3.5^2.(1–4)$.

Матрица 26. Данная матрица имеет собственные значения:

$$g_1 = -g_2 = -g_3 = -g_4 = \alpha_{44}.$$

Таким образом, она имеет сигнатуру $(3,1)$, если $\alpha_{44} < 0$.

Данная матрица реализуется как матрица инвариантного метрического тензора для случаев $6.1^3.(1–3)$.

4. Тип Сегре оператора Риччи

В отличии от случая римановой метрики, где всегда существует ортонормированный базис, в котором матрица самосопряженного оператора ρ диагональна, в псевдоримановом случае могут возникнуть различные варианты известные как *типы Сегре* (см., например, [20]). В четырехмерном пространстве может возникнуть 9 вариантов, но мы приведем только те, которые возникают в случае четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии:

(1) Тип Сегре $\{1111\}$: ρ имеет четыре действительных собственных значения (возможно совпадающих) ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, каждому из которых соответствует одномерное собственное подпространство.
(2) Тип Сегре $\{112\}$: ρ имеет три действительных собственных значения (возможно совпадающих) ρ_1, ρ_2, ρ_3^2, причем ρ_3^2 имеет алгебраическую кратность 2, каждому из которых соответствует одномерное собственное подпространство.
(3) Тип Сегре $\{22\}$: ρ имеет два действительных собственных значения (возможно совпадающих) ρ_1^2, ρ_2^2, причем оба имеют алгебраическую кратность 2, каждому из которых соответствует одномерное собственное подпространство.
(4) Тип Сегре $\{1\bar{1}1\bar{1}\}$: ρ имеет две пары комплексно сопряженных собственных значений $\rho_1 = \bar{\rho}_2$ и $\rho_3 = \bar{\rho}_4$, которые возможно совпадают.

В таблице 2 приведены ненулевые элементы матрицы оператора Риччи для всех 186 случаев. Алгоритм вычислений для всех случаев изложен выше, при доказательстве предложения 3 мы приведем пример вычислений, в остальных случаях алгоритм аналогичен.

Также в таблице приведены условия, при которых оператор имеет тот или иной тип Сегре; если соответствующая ячейка таблицы пуста, то данный тип Сегре невозможен; если в ячейке стоит знак ✓, то оператор Риччи имеет данный тип Сегре при любых значениях параметров.

Мы опустим доказательство того, какой тип Сегре имеет тот или иной оператор. В большинстве случаев это очевидно и основывается на прямых вычислениях, например, если матрица оператора диагональна, то он имеет тип Сегре $\{1111\}$; если же оператор имеет единственный ненулевой элемент не на главной диагонали, то оператор Риччи имеет тип Сегре $\{112\}$.

Особо нужно обратить внимание на случай $2.1^4.1$, так как только в этом случае возможен тип Сегре $\{1\bar{1}1\bar{1}\}$. Это в таблице обговорено отдельно.

Другие типы Сегре, кроме приведенных в таблице (т.е. кроме $\{1111\}$, $\{112\}$, $\{22\}$ и $\{1\bar{1}1\bar{1}\}$), невозможны для оператора Риччи в случае четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии.

В следующем предложении мы отдельно перечислим все случаи, в которых оператор Риччи тождественно равен нулю, а значит всегда имеет тип Сегре $\{1111\}$. Всего в предложении 1 перечислено 58 случаев, они не будут включены в таблицу 2.

Предложение 1. *Пусть G/H — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с нетривиальной подгруппой изотропии. Тогда $(G/H, g)$ имеет тривиальный оператор Риччи (т.е. $\rho = 0$) для любой инвариантной метрики g тогда и только тогда, когда G/H содержится в списке:*

Таблица 2. Тип Сегре оператора Риччи

№	Матрица оператора Риччи	{1111}	{112}	{22}
$1.1^1.1$	$\rho_{11}=-\frac{(2\alpha_{13}^2-\alpha_{22}\alpha_{44}+\alpha_{24}^2)\alpha_{22}}{2\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)}$, $\rho_{22}=-\frac{(4\alpha_{13}^2+\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)\alpha_{22}}{2\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)}$, $\rho_{24}=-\frac{(\alpha_{13}^2+\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)\alpha_{24}}{2\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)}$, $\rho_{33}=-\frac{(2\alpha_{13}^2-\alpha_{22}\alpha_{44}+\alpha_{24}^2)\alpha_{22}}{2\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)}$, $\rho_{44}=-\frac{3\alpha_{22}}{2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)}$	$\alpha_{22}\neq 0$ или $\alpha_{13}=\pm\alpha_{24}$	$\alpha_{22}=0$, $\alpha_{13}\neq\pm\alpha_{24}$	
$1.1^1.2$	$\rho_{11}=\frac{\alpha_{22}(p+1)}{2(\alpha_{24}^2-\alpha_{22}\alpha_{44})}$, $\rho_{22}=\frac{\alpha_{22}p(p+1)}{\alpha_{24}^2-\alpha_{22}\alpha_{44}}$, $\rho_{24}=\frac{\alpha_{24}(2p-1)}{2(\alpha_{24}^2-\alpha_{22}\alpha_{44})}$, $\rho_{33}=\frac{\alpha_{22}(p+1)}{2(\alpha_{24}^2-\alpha_{22}\alpha_{44})}$, $\rho_{44}=\frac{\alpha_{22}(2p^2+1)}{2(\alpha_{24}^2-\alpha_{22}\alpha_{44})}$	$\alpha_{22}\neq 0$ или $p=\frac{1}{2}$	$\alpha_{22}=0$, $p\neq\frac{1}{2}$	
$1.1^1.3$	$\rho_{11}=-\frac{2\alpha_{13}-\alpha_{22}}{2\alpha_{13}^2}$, $\rho_{22}=-\frac{\alpha_{22}}{2\alpha_{13}^2}$, $\rho_{24}=-\frac{\alpha_{24}}{2\alpha_{13}^2}$, $\rho_{33}=-\frac{2\alpha_{13}-\alpha_{22}}{2\alpha_{13}^2}$	$\alpha_{22}\neq 0$ или $\alpha_{24}=0$	$\alpha_{22}=0$, $\alpha_{24}\neq 0$	
$1.1^1.4$	$\rho_{11}=\frac{\alpha_{22}}{2\alpha_{13}^2}$, $\rho_{22}=-\frac{\alpha_{22}}{2\alpha_{13}^2}$, $\rho_{24}=-\frac{\alpha_{24}}{2\alpha_{13}^2}$, $\rho_{33}=\frac{\alpha_{22}}{2\alpha_{13}^2}$	$\alpha_{22}\neq 0$ или $\alpha_{24}=0$	$\alpha_{22}=0$, $\alpha_{24}\neq 0$	
$1.1^1.5$	$\rho_{11}=-\frac{1}{\alpha_{13}}$, $\rho_{22}=\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{24}^2-\alpha_{22}\alpha_{44}}$, $\rho_{33}=-\frac{1}{\alpha_{13}}$, $\rho_{44}=\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{24}^2-\alpha_{22}\alpha_{44}}$	✓		
$1.1^1.6$	$\rho_{11}=0$, $\rho_{22}=-\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}$, $\rho_{33}=0$, $\rho_{44}=-\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}$	✓		
$1.1^1.7$	$\rho_{11}=-\frac{1}{\alpha_{13}}$, $\rho_{22}=0$, $\rho_{33}=-\frac{1}{\alpha_{13}}$, $\rho_{44}=0$	✓		
$1.1^1.8$	$\rho_{11}=\frac{3}{\alpha_{13}}$, $\rho_{22}=0$, $\rho_{33}=\frac{3}{\alpha_{13}}$, $\rho_{44}=0$	✓		
$1.1^2.1$	$\rho_{11}=-\frac{(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2+8\alpha_{33}^2)\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)}$, $\rho_{22}=\frac{(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2-16\alpha_{33}^2)\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)}$, $\rho_{24}=\frac{(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2-4\alpha_{33}^2)\alpha_{24}}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)}$, $\rho_{33}=-\frac{(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2+8\alpha_{33}^2)\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)}$, $\rho_{44}=-\frac{6\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}$	$\alpha_{22}\neq 0$	$\alpha_{22}=0$	

$1.1^1.9$, $1.1^1.10$, $1.1^2.12$, $1.1^3.1$, $1.1^4.1$, $1.1^5.1$, $1.1^6.1$, $1.2^1.1$, $1.2^2.1$, $1.3^1.17$, $1.3^1.18$, $1.3^1.23$, $1.3^1.31$, $1.3^1.32$, $1.4^1.23$, $1.4^1.26$, $2.1^1.3$, $2.1^2.6$, $2.1^3.6$, $2.1^4.2$, $2.2^1.5$, $2.2^1.6$, $2.2^1.7$, $2.2^2.3$, $2.2^2.4$, $2.2^3.1$, $2.3^1.1$, $2.4^1.3$, $2.5^1.2$, $2.5^1.11$, $2.5^1.12$, $2.5^1.13$, $2.5^1.14$, $2.5^2.6$, $2.5^2.7$, $3.1^1.1$, $3.1^2.1$, $3.2^1.2$, $3.2^1.3$, $3.2^1.4$, $3.2^2.2$, $3.3^1.4$, $3.3^2.4$, $3.4^1.1$, $3.4^2.1$, $3.5^1.4$, $3.5^2.4$, $4.1^1.1$, $4.1^2.1$, $4.2^1.2$, $4.2^2.3$, $4.2^3.2$, $4.3^1.1$, $4.3^1.2$, $5.1^1.1$, $6.1^1.2$, $6.1^2.3$, $6.1^3.3$.

5. Предписанные значения спектра оператора Риччи. Случай римановой метрики

Сначала мы перечислим все случаи, в которых оператор Риччи тривиален, а значит имеет тип Сегре {1111} с единственным собственным значением равным нулю. Доказательство следующего предложения прямо следует из предложения 1, таблиц 1 и 2.

Продолжение таблицы 2

№	Матрица оператора Риччи	{1111}	{112}	{22}
$1.1^2.2$	$\rho_{11}=-\frac{\alpha_{22}(p+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}$, $\rho_{22}=-\frac{p\alpha_{22}(p+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}$, $\rho_{24}=-\frac{2\alpha_{24}(p-1)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}$, $\rho_{33}=-\frac{\alpha_{22}(p+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}$, $\rho_{44}=-\frac{\alpha_{22}(p^2+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}$	$\alpha_{22}\neq 0$ или $p=1$	$\alpha_{22}=0$, $p\neq 1$	
$1.1^2.3$	$\rho_{11}=-\frac{\alpha_{22}-2\alpha_{33}}{2\alpha_{33}^2}$, $\rho_{22}=\frac{\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2}$, $\rho_{24}=\frac{\alpha_{24}}{2\alpha_{33}^2}$, $\rho_{33}=-\frac{\alpha_{22}-2\alpha_{33}}{2\alpha_{33}^2}$	$\alpha_{22}\neq 0$ или $\alpha_{24}=0$	$\alpha_{22}=0$, $\alpha_{24}\neq 0$	
$1.1^2.4$	$\rho_{11}=-\frac{\alpha_{22}+2\alpha_{33}}{2\alpha_{33}^2}$, $\rho_{22}=\frac{\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2}$, $\rho_{24}=\frac{\alpha_{24}}{2\alpha_{33}^2}$, $\rho_{33}=-\frac{\alpha_{22}+2\alpha_{33}}{2\alpha_{33}^2}$	$\alpha_{22}\neq 0$ или $\alpha_{24}=0$	$\alpha_{22}=0$, $\alpha_{24}\neq 0$	
$1.1^2.5$	$\rho_{11}=-\frac{\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2}$, $\rho_{22}=\frac{\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2}$, $\rho_{24}=\frac{\alpha_{24}}{2\alpha_{33}^2}$, $\rho_{33}=-\frac{\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2}$	$\alpha_{22}\neq 0$ или $\alpha_{24}=0$	$\alpha_{22}=0$, $\alpha_{24}\neq 0$	
$1.1^2.6$	$\rho_{11}=\frac{1}{\alpha_{33}}$, $\rho_{22}=-\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}$, $\rho_{33}=\frac{1}{\alpha_{33}}$, $\rho_{44}=-\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}$	✓		
$1.1^2.7$	$\rho_{11}=-\frac{1}{\alpha_{33}}$, $\rho_{22}=\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{24}^2-\alpha_{22}\alpha_{44}}$, $\rho_{33}=-\frac{1}{\alpha_{33}}$, $\rho_{44}=\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{24}^2-\alpha_{22}\alpha_{44}}$	✓		
$1.1^2.8$	$\rho_{11}=0$, $\rho_{22}=-\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}$, $\rho_{33}=0$, $\rho_{44}=-\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}$	✓		
$1.1^2.9$	$\rho_{11}=\frac{1}{\alpha_{33}}$, $\rho_{22}=0$, $\rho_{33}=\frac{1}{\alpha_{33}}$, $\rho_{44}=0$	✓		
$1.1^2.10$	$\rho_{11}=-\frac{1}{\alpha_{33}}$, $\rho_{22}=0$, $\rho_{33}=-\frac{1}{\alpha_{33}}$, $\rho_{44}=0$	✓		
$1.1^2.11$	$\rho_{11}=-\frac{6}{\alpha_{33}}$, $\rho_{22}=0$, $\rho_{33}=-\frac{6}{\alpha_{33}}$, $\rho_{44}=0$	✓		
$1.3^1.1$	$\rho_{11}=\frac{3\alpha_{44}}{8\alpha_{23}^2}$, $\rho_{22}=\frac{3\alpha_{44}}{8\alpha_{23}^2}$, $\rho_{23}=\frac{15(\alpha_{33}\alpha_{44}-\alpha_{34}^2)}{8\alpha_{23}^3}$, $\rho_{33}=\frac{3\alpha_{44}}{8\alpha_{23}^2}$, $\rho_{44}=\frac{3\alpha_{44}}{8\alpha_{23}^2}$	$\alpha_{33}\alpha_{44}-\alpha_{34}^2=0$	$\alpha_{33}\alpha_{44}-\alpha_{34}^2\neq 0$	
$1.3^1.2$	$\rho_{13}=-\frac{\lambda+1}{2\alpha_{23}}$, $\rho_{14}=\frac{1}{2\alpha_{23}}$, $\rho_{23}=-\frac{\lambda^2+1}{2\alpha_{23}}$, $\rho_{24}=\frac{\lambda+1}{2\alpha_{23}}$		$\lambda=0$	$\lambda\neq 0$

Предложение 2. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространств* $1.1^2.12$, $2.1^3.6$, $3.4^2.1$, $3.5^2.4$, $4.2^2.3$, $6.1^2.3$ *с инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с единственным собственным значением равным нулю.*

Далее мы последовательно рассмотрим все случаи, неупомянутые ранее.

Предложение 3. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^2.1$ *с инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями $\rho_1=\rho_2$, $\rho_1+\rho_3=2\rho_4<0$, $2\rho_4-3\rho_1>0$.*

Доказательство. В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&[e_1,u_1]=u_3, && [e_1,u_3]=-u_1, && [u_1,u_3]=-u_2,\\
&[u_1,u_4]=u_1, && [u_2,u_4]=2u_2, && [u_3,u_4]=u_3,
\end{aligned}
$$

Продолжение таблицы 2

№	Матрица оператора Риччи	{1111}	{112}	{22}
$1.3^1.3$	$\rho_{13} = -\frac{1}{2\alpha_{23}}$, $\rho_{14} = \frac{1}{2\alpha_{23}}$, $\rho_{23} = -\frac{1}{2\alpha_{23}}$, $\rho_{24} = \frac{1}{2\alpha_{23}}$		✓	
$1.3^1.4$	$\rho_{13} = -\frac{\lambda}{\alpha_{23}}$, $\rho_{14} = \frac{1}{2\alpha_{23}}$, $\rho_{23} = -\frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{\alpha_{23}}$, $\rho_{24} = \frac{\lambda}{\alpha_{23}}$			✓
$1.3^1.5$	$\rho_{13} = \frac{\lambda\mu}{2\alpha_{23}}$, $\rho_{14} = \frac{\mu(-2+\mu)}{2\alpha_{23}}$, $\rho_{23} = -\frac{\lambda^2\mu+\lambda^2-2\mu+4}{2(\mu-1)\alpha_{23}}$, $\rho_{24} = -\frac{\lambda\mu}{2\alpha_{23}}$	$\lambda = 0$ и $\mu = 2$	$\mu = 0$	$(\lambda \neq 0$ или $\mu \neq 2)$ и $\mu \neq 0$
$1.3^1.6$	$\rho_{23} = \frac{2}{\alpha_{23}}$		✓	
$1.3^1.7$	$\rho_{13} = -\frac{\lambda}{(1+\lambda)\alpha_{23}}$, $\rho_{14} = \frac{\lambda}{(1+\lambda)\alpha_{23}}$, $\rho_{23} = -\frac{\lambda-1}{2(1+\lambda)\alpha_{23}}$, $\rho_{24} = \frac{\lambda}{(1+\lambda)\alpha_{23}}$		$\lambda = 0$	$\lambda \neq 0$
$1.3^1.8$	$\rho_{14} = \frac{1}{2\alpha_{23}}$		✓	
$1.3^1.9$	$\rho_{14} = \frac{(\lambda-1)^2}{2\alpha_{23}}$	$\lambda = 1$	$\lambda \neq 1$	
$1.3^1.10$	$\rho_{14} = \frac{1}{2\alpha_{23}}$		✓	
$1.3^1.11$	$\rho_{14} = \frac{2}{\alpha_{23}}$		✓	
$1.3^1.12$	$\rho_{14} = \frac{(-\mu+\lambda+1)(-\mu+\lambda-1)}{2\alpha_{23}}$	$\mu = \lambda + 1$ или $\mu = \lambda - 1$	$\mu \neq \lambda + 1$ и $\mu \neq \lambda - 1$	
$1.3^1.13$	$\rho_{14} = \frac{(1+2\lambda)(-3+2\lambda)}{8\alpha_{23}}$	$\lambda = -\frac{1}{2}$ или $\lambda = \frac{3}{2}$	$\lambda \neq -\frac{1}{2}$ и $\lambda \neq \frac{3}{2}$	
$1.3^1.14$	$\rho_{14} = \frac{2\lambda(\lambda-1)}{\alpha_{23}}$	$\lambda = 0$ или $\lambda = 1$	$\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq 1$	
$1.3^1.15$	$\rho_{14} = \frac{1}{\alpha_{23}}$, $\rho_{23} = \frac{1}{2\alpha_{23}}$			✓
$1.3^1.16$	$\rho_{14} = -\frac{1}{\alpha_{23}}$, $\rho_{23} = \frac{1}{2\alpha_{23}}$			✓
$1.3^1.19$	$\rho_{14} = -\frac{1}{2\alpha_{23}}$		✓	
$1.3^1.20$	$\rho_{14} = \frac{1}{2\alpha_{23}}$		✓	
$1.3^1.21$	$\rho_{14} = \frac{\lambda(\lambda-2)}{2\alpha_{23}}$	$\lambda = 0$ или $\lambda = 2$	$\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq 2$	
$1.3^1.22$	$\rho_{14} = -\frac{3}{8\alpha_{23}}$		✓	
$1.3^1.24$	$\rho_{14} = \frac{-2+\lambda}{2(\lambda-1)\alpha_{23}}$, $\rho_{23} = -\frac{(-2+\lambda)(3\lambda-2)}{2\alpha_{23}}$	$\lambda = 2$	$\lambda = \frac{2}{3}$	$\lambda \neq 2$ и $\lambda \neq \frac{2}{3}$

где $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\,(e_1)$, $\mathfrak{m} = \mathrm{span}\,(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Как указано в таблице 1, матрица инвариантного метрического тензора имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$$

и определяет риманову метрику тогда и только тогда, когда $\alpha_{22} > 0$, $\alpha_{33} > 0$, $\alpha_{44} > 0$, $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 > 0$.

Продолжение таблицы 2

№	Матрица оператора Риччи	{1111}	{112}	{22}
$1.3^1.25$	$\rho_{14} = -\frac{-2+\lambda}{2(\lambda-1)\alpha_{23}}$, $\rho_{23} = -\frac{(-2+\lambda)(3\lambda-2)}{2\alpha_{23}}$	$\lambda = 2$	$\lambda = \frac{2}{3}$	$\lambda \neq 2$ и $\lambda \neq \frac{2}{3}$
$1.3^1.26$	$\rho_{14} = \frac{2}{\alpha_{23}}$		✓	
$1.3^1.27$	$\rho_{14} = -\frac{2}{\alpha_{23}}$		✓	
$1.3^1.28$	$\rho_{14} = \frac{1}{2\alpha_{23}}$, $\rho_{23} = -\frac{3}{2\alpha_{23}}$			✓
$1.3^1.29$	$\rho_{14} = -\frac{1}{2\alpha_{23}}$, $\rho_{23} = -\frac{3}{2\alpha_{23}}$			✓
$1.3^1.30$	$\rho_{13} = -\frac{(\mu-1)(\lambda-1)(\lambda\mu+\lambda+\mu)}{2(\lambda\mu-\lambda-\mu)\alpha_{23}}$, $\rho_{14} = \frac{(\mu-1)(\lambda\mu^2-\mu^2+\lambda+\mu)}{2(\lambda\mu-\lambda-\mu)\alpha_{23}}$, $\rho_{23} = -\frac{(\lambda-1)(\lambda^2\mu-\lambda^2+\lambda+\mu)}{2(\lambda\mu-\lambda-\mu)\alpha_{23}}$, $\rho_{24} = \frac{(\mu-1)(\lambda-1)(\lambda\mu+\lambda+\mu)}{2(\lambda\mu-\lambda-\mu)\alpha_{23}}$	$\lambda = 1$ и $\mu = 1$	$\mu = 1$ и $\lambda \neq 1$	$\mu \neq 1$
$1.4^1.1$	$\rho_{11} = -\frac{1}{2\alpha_{22}}$, $\rho_{13} = \frac{\alpha_{33}(\alpha_{44}+2\alpha_{22})}{\alpha_{22}^2\alpha_{44}}$, $\rho_{14} = \frac{\alpha_{34}}{2\alpha_{22}^2}$, $\rho_{22} = -\frac{1}{2\alpha_{22}}$, $\rho_{33} = -\frac{1}{2\alpha_{22}}$	$\alpha_{33} = 0$ или $\alpha_{44} = -2\alpha_{22}$	$\alpha_{33} \neq 0$ и $\alpha_{44} \neq -2\alpha_{22}$	
$1.4^1.2$	$\rho_{11} = -\frac{3(p-1)^2}{\alpha_{44}}$, $\rho_{13} = -\frac{\alpha_{33}(3p-5)}{\alpha_{44}\alpha_{22}}$, $\rho_{22} = -\frac{3(p-1)^2}{\alpha_{44}}$, $\rho_{33} = -\frac{3(p-1)^2}{\alpha_{44}}$, $\rho_{44} = -\frac{3(p-1)^2}{\alpha_{44}}$	$p = \frac{5}{3}$ или $\alpha_{33} = 0$	$p \neq \frac{5}{3}$ и $\alpha_{33} \neq 0$	
$1.4^1.3$	$\rho_{11} = -\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{13} = -\frac{\alpha_{33}-\alpha_{44}}{\alpha_{44}\alpha_{22}}$, $\rho_{22} = -\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{33} = -\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{44} = -\frac{3}{\alpha_{44}}$	$\alpha_{33} = \alpha_{44}$	$\alpha_{33} \neq \alpha_{44}$	
$1.4^1.4$	$\rho_{11} = -\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{13} = -\frac{\alpha_{33}+\alpha_{44}}{\alpha_{44}\alpha_{22}}$, $\rho_{22} = -\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{33} = -\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{44} = -\frac{3}{\alpha_{44}}$	$\alpha_{33} = -\alpha_{44}$	$\alpha_{33} \neq -\alpha_{44}$	
$1.4^1.5$	$\rho_{11} = -\frac{1}{2\alpha_{22}}$, $\rho_{13} = \frac{\alpha_{33}}{\alpha_{22}^2}$, $\rho_{14} = \frac{\alpha_{34}}{2\alpha_{22}^2}$, $\rho_{22} = -\frac{1}{2\alpha_{22}}$, $\rho_{33} = -\frac{1}{2\alpha_{22}}$	$\alpha_{33} = 0$	$\alpha_{33} \neq 0$	
$1.4^1.6$	$\rho_{11} = -\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{13} = -\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{22} = -\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{33} = -\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{44} = -\frac{3}{\alpha_{44}}$		✓	
$1.4^1.7$	$\rho_{11} = -\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{13} = \frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{22} = -\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{33} = -\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{44} = -\frac{3}{\alpha_{44}}$		✓	
$1.4^1.8$	$\rho_{11} = -\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{22} = -\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{33} = -\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{44} = -\frac{3}{\alpha_{44}}$	✓		
$1.4^1.9$	$\rho_{13} = \frac{2p^2\alpha_{22}+2p\alpha_{22}+2r\alpha_{22}+\alpha_{44}}{2\alpha_{22}^2}$	$r = -(2p^2\alpha_{22} + 2p\alpha_{22}+\alpha_{44})/(2\alpha_{22})$	$r \neq -(2p^2\alpha_{22} + 2p\alpha_{22}+\alpha_{44})/(2\alpha_{22})$	

Теперь с помощью формул (3), (4) и (5) вычислим матрицу оператора Риччи. Ее ненулевые компоненты будут иметь вид:

$$\rho_{11} = -\frac{(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 + 8\alpha_{33}^2)\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}, \quad \rho_{22} = \frac{(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 - 16\alpha_{33}^2)\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)},$$
$$\rho_{24} = \frac{(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 - 4\alpha_{33}^2)\alpha_{24}}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}, \quad \rho_{33} = -\frac{(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 + 8\alpha_{33}^2)\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)},$$
$$\rho_{44} = -\frac{6\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2}.$$

Продолжение таблицы 2

№	Матрица оператора Риччи	{1111}	{112}	{22}
$1.4^1.10$	$\rho_{13}=\frac{p^2+p+r}{\alpha_{22}}$	$r=-p-p^2$	$r\neq -p-p^2$	
$1.4^1.11$	$\rho_{13}=\frac{2r\alpha_{22}+\alpha_{44}}{2\alpha_{22}^2}$	$r=-\frac{\alpha_{44}}{2\alpha_{22}}$	$r\neq -\frac{\alpha_{44}}{2\alpha_{22}}$	
$1.4^1.12$	$\rho_{13}=\frac{r}{\alpha_{22}}$	$r=0$	$r\neq 0$	
$1.4^1.13$	$\rho_{13}=\frac{2r\alpha_{22}+2\alpha_{22}+\alpha_{44}}{2\alpha_{22}^2}$	$r=-\frac{\alpha_{44}+2\alpha_{22}}{2\alpha_{22}}$	$r\neq -\frac{\alpha_{44}+2\alpha_{22}}{2\alpha_{22}}$	
$1.4^1.14$	$\rho_{13}=\frac{1+r}{\alpha_{22}}$	$r=-1$	$r\neq -1$	
$1.4^1.15$	$\rho_{13}=\frac{\alpha_{44}+2\alpha_{22}}{2\alpha_{22}^2}$	$\alpha_{44}=-2\alpha_{22}$	$\alpha_{44}\neq -2\alpha_{22}$	
$1.4^1.16$	$\rho_{13}=-\frac{-\alpha_{44}+2\alpha_{22}}{2\alpha_{22}^2}$	$\alpha_{44}=2\alpha_{22}$	$\alpha_{44}\neq 2\alpha_{22}$	
$1.4^1.17$	$\rho_{13}=\frac{\alpha_{44}}{2\alpha_{22}^2}$		✓	
$1.4^1.18$	$\rho_{13}=\frac{\alpha_{44}+2\alpha_{22}}{2\alpha_{22}^2}$	$\alpha_{44}=-2\alpha_{22}$	$\alpha_{44}\neq -2\alpha_{22}$	
$1.4^1.19$	$\rho_{13}=-\frac{-\alpha_{44}+2\alpha_{22}}{2\alpha_{22}^2}$	$\alpha_{44}=2\alpha_{22}$	$\alpha_{44}\neq 2\alpha_{22}$	
$1.4^1.20$	$\rho_{13}=\frac{\alpha_{44}}{2\alpha_{22}^2}$		✓	
$1.4^1.21$	$\rho_{13}=\frac{1}{\alpha_{22}}$		✓	
$1.4^1.22$	$\rho_{13}=-\frac{1}{\alpha_{22}}$		✓	
$1.4^1.24$	$\rho_{13}=\frac{1}{\alpha_{22}}$		✓	
$1.4^1.25$	$\rho_{13}=-\frac{1}{\alpha_{22}}$		✓	
$2.1^1.1$	$\rho_{11}=-\frac{1}{\alpha_{13}}$, $\rho_{22}=-\frac{1}{\alpha_{24}}$, $\rho_{33}=-\frac{1}{\alpha_{13}}$, $\rho_{44}=-\frac{1}{\alpha_{24}}$	✓		
$2.1^1.2$	$\rho_{11}=-\frac{1}{\alpha_{13}}$, $\rho_{22}=0$, $\rho_{33}=-\frac{1}{\alpha_{13}}$, $\rho_{44}=0$	✓		
$2.1^2.1$	$\rho_{11}=-\frac{1}{\alpha_{13}}$, $\rho_{22}=\frac{1}{\alpha_{44}}$, $\rho_{33}=-\frac{1}{\alpha_{13}}$, $\rho_{44}=\frac{1}{\alpha_{44}}$	✓		
$2.1^2.2$	$\rho_{11}=-\frac{1}{\alpha_{13}}$, $\rho_{22}=-\frac{1}{\alpha_{44}}$, $\rho_{33}=-\frac{1}{\alpha_{13}}$, $\rho_{44}=-\frac{1}{\alpha_{44}}$	✓		
$2.1^2.3$	$\rho_{11}=-\frac{1}{\alpha_{13}}$, $\rho_{22}=0$, $\rho_{33}=-\frac{1}{\alpha_{13}}$, $\rho_{44}=0$	✓		
$2.1^2.4$	$\rho_{11}=0$, $\rho_{22}=\frac{1}{\alpha_{44}}$, $\rho_{33}=0$, $\rho_{44}=\frac{1}{\alpha_{44}}$	✓		
$2.1^2.5$	$\rho_{11}=0$, $\rho_{22}=-\frac{1}{\alpha_{44}}$, $\rho_{33}=0$, $\rho_{44}=-\frac{1}{\alpha_{44}}$	✓		
$2.1^3.1$	$\rho_{11}=\frac{1}{\alpha_{33}}$, $\rho_{22}=\frac{1}{\alpha_{44}}$, $\rho_{33}=\frac{1}{\alpha_{33}}$, $\rho_{44}=\frac{1}{\alpha_{44}}$	✓		

В данном случае невозможно, чтобы $\alpha_{22}=0$, поэтому оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1=\rho_2=-\frac{(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2+8\alpha_{33}^2)\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)},\quad \rho_3=\frac{(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2-16\alpha_{33}^2)\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)},$$
$$\rho_4=-\frac{6\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}<0.$$

Отметим, что

$$\rho_1+\rho_3=-\frac{12\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}=2\rho_4<0,$$

а также

$$2\rho_4-3\rho_1=\frac{3\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2}>0.$$

Осталось заметить, что ρ_1, ρ_3 и ρ_4 могут быть произвольными при выполнении условий

$$\rho_1+\rho_3=2\rho_4<0,\quad 2\rho_4-3\rho_1>0.$$

Продолжение таблицы 2

№	Матрица оператора Риччи	{1111}	{112}	{22}
$2.1^3.2$	$\rho_{11}=\frac{1}{\alpha_{33}}$, $\rho_{22}=-\frac{1}{\alpha_{44}}$, $\rho_{33}=\frac{1}{\alpha_{33}}$, $\rho_{44}=-\frac{1}{\alpha_{44}}$	✓		
$2.1^3.3$	$\rho_{11}=-\frac{1}{\alpha_{33}}$, $\rho_{22}=-\frac{1}{\alpha_{44}}$, $\rho_{33}=-\frac{1}{\alpha_{33}}$, $\rho_{44}=-\frac{1}{\alpha_{44}}$	✓		
$2.1^3.4$	$\rho_{11}=\frac{1}{\alpha_{33}}$, $\rho_{22}=0$, $\rho_{33}=\frac{1}{\alpha_{33}}$, $\rho_{44}=0$	✓		
$2.1^3.5$	$\rho_{11}=-\frac{1}{\alpha_{33}}$, $\rho_{22}=0$, $\rho_{33}=-\frac{1}{\alpha_{33}}$, $\rho_{44}=0$	✓		
$2.1^4.1$	$\rho_{11}=\frac{2\alpha_{24}}{\alpha_{23}^2+\alpha_{24}^2}$, $\rho_{12}=\frac{2\alpha_{23}}{\alpha_{23}^2+\alpha_{24}^2}$, $\rho_{21}=-\frac{2\alpha_{23}}{\alpha_{23}^2+\alpha_{24}^2}$, $\rho_{22}=\frac{2\alpha_{24}}{\alpha_{23}^2+\alpha_{24}^2}$, $\rho_{33}=\frac{2\alpha_{24}}{\alpha_{23}^2+\alpha_{24}^2}$, $\rho_{34}=\frac{2\alpha_{23}}{\alpha_{23}^2+\alpha_{24}^2}$, $\rho_{43}=-\frac{2\alpha_{23}}{\alpha_{23}^2+\alpha_{24}^2}$, $\rho_{44}=\frac{2\alpha_{24}}{\alpha_{23}^2+\alpha_{24}^2}$	$\alpha_{23}=0$	При $\alpha_{23}\neq 0$ имеет тип Сегре $\{1\bar{1}1\bar{1}\}$	
$2.2^1.1$	$\rho_{11}=\frac{3\alpha_{22}}{2\alpha_{24}^2}$, $\rho_{22}=\frac{3\alpha_{22}}{2\alpha_{24}^2}$, $\rho_{33}=\frac{3\alpha_{22}}{2\alpha_{24}^2}$, $\rho_{44}=\frac{3\alpha_{22}}{2\alpha_{24}^2}$	✓		
$2.2^1.2$	$\rho_{42}=\frac{(p-2)(p+2)}{2\alpha_{24}}$	$p=2$ или $p=-2$	$p\neq 2$ и $p\neq -2$	
$2.2^1.3$	$\rho_{42}=\frac{1}{2\alpha_{24}}$		✓	
$2.2^1.4$	$\rho_{12}=-\frac{2}{\alpha_{24}}$, $\rho_{43}=-\frac{2}{\alpha_{24}}$			✓
$2.2^2.1$	$\rho_{14}=\frac{2}{\alpha_{23}}$, $\rho_{23}=-\frac{2}{\alpha_{23}}$			✓
$2.2^2.2$	$\rho_{14}=-\frac{2}{\alpha_{23}}$, $\rho_{23}=\frac{2}{\alpha_{23}}$			✓
$2.4^1.1$	$\rho_{11}=-\frac{1}{2\alpha_{22}}$, $\rho_{22}=-\frac{1}{2\alpha_{22}}$, $\rho_{33}=-\frac{1}{2\alpha_{22}}$, $\rho_{44}=0$	✓		
$2.4^1.2$	$\rho_{11}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{22}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{33}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{44}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$	✓		
$2.5^1.1$	$\rho_{11}=-\frac{6}{\alpha_{24}}$, $\rho_{13}=-\frac{10\alpha_{33}}{\alpha_{24}^2}$, $\rho_{22}=-\frac{6}{\alpha_{24}}$, $\rho_{33}=-\frac{6}{\alpha_{24}}$, $\rho_{44}=-\frac{6}{\alpha_{24}}$	$\alpha_{33}=0$	$\alpha_{33}\neq 0$	
$2.5^1.3$	$\rho_{13}=\frac{-q^2+4p+2q}{2\alpha_{24}}$	$p=\frac{q^2-2q}{4}$	$p\neq\frac{q^2-2q}{4}$	
$2.5^1.4$	$\rho_{13}=-\frac{p^2-2p-4q}{2\alpha_{24}}$	$q=\frac{p^2-2p}{4}$	$q\neq\frac{p^2-2p}{4}$	
$2.5^1.5$	$\rho_{13}=\frac{-1+4q}{2\alpha_{24}}$	$q=\frac{1}{4}$	$q\neq\frac{1}{4}$	

Действительно, положим $\alpha_{22}=\frac{2}{3}(2\rho_4-3\rho_1)>0$, $\alpha_{44}=-\frac{6}{\rho_4}>0$, $\alpha_{24}=0$, $\alpha_{33}=1$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1=\rho_2$, ρ_3 и ρ_4, а $\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2=\frac{-4(2\rho_4-3\rho_1)}{\rho_4}>0$. □

Предложение 4. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.1^2.2$ с инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$*

- *либо имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями*

$$\rho_1=\rho_2=\rho_3=\rho_4<0;$$

- *либо имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1<0$, $\rho_2=\rho_3=\rho_4=0$;*
- *либо имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1=\rho_2\neq 0$, $2\rho_1+\rho_4<0$, $\rho_1\neq\rho_4$, $\rho_3=\frac{2\rho_1^2+\rho_4^2}{2\rho_1+\rho_4}<0$.*

Продолжение таблицы 2

№	Матрица оператора Риччи	{1111}	{112}	{22}
$2.5^1.6$	$\rho_{13}=\frac{-1+4q}{2\alpha_{24}}$	$q=\frac{1}{4}$	$q\neq\frac{1}{4}$	
$2.5^1.7$	$\rho_{13}=\frac{2}{\alpha_{24}}$		✓	
$2.5^1.8$	$\rho_{13}=-\frac{2}{\alpha_{24}}$		✓	
$2.5^1.9$	$\rho_{13}=\frac{2}{\alpha_{24}}$		✓	
$2.5^1.10$	$\rho_{13}=-\frac{2}{\alpha_{24}}$		✓	
$2.5^2.1$	$\rho_{11}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{13}=-\frac{5\alpha_{33}}{\alpha_{44}^2}$, $\rho_{22}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{33}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{44}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$	$\alpha_{33}=0$	$\alpha_{33}\neq 0$	
$2.5^2.2$	$\rho_{13}=\frac{2(r^2+p)}{\alpha_{44}}$	$p=-r^2$	$p\neq -r^2$	
$2.5^2.3$	$\rho_{13}=-\frac{-1+4r}{2\alpha_{44}}$	$r=\frac{1}{4}$	$r\neq\frac{1}{4}$	
$2.5^2.4$	$\rho_{13}=\frac{2}{\alpha_{44}}$		✓	
$2.5^2.5$	$\rho_{13}=-\frac{2}{\alpha_{44}}$		✓	
$3.2^1.1$	$\rho_{11}=-\frac{6}{\alpha_{24}}$, $\rho_{22}=-\frac{6}{\alpha_{24}}$, $\rho_{33}=-\frac{6}{\alpha_{24}}$, $\rho_{44}=-\frac{6}{\alpha_{24}}$	✓		
$3.2^2.1$	$\rho_{11}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{22}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{33}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{44}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$	✓		
$3.3^1.1$	$\rho_{13}=\frac{2p}{\alpha_{24}}$	$p=0$	$p\neq 0$	
$3.3^1.2$	$\rho_{13}=\frac{2}{\alpha_{24}}$		✓	
$3.3^1.3$	$\rho_{13}=-\frac{2}{\alpha_{24}}$		✓	
$3.3^2.1$	$\rho_{13}=\frac{2p}{\alpha_{44}}$	$p=0$	$p\neq 0$	
$3.3^2.2$	$\rho_{13}=\frac{2}{\alpha_{44}}$		✓	
$3.3^2.3$	$\rho_{13}=-\frac{2}{\alpha_{44}}$		✓	
$3.5^1.1$	$\rho_{11}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{22}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{33}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{44}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$	✓		
$3.5^1.2$	$\rho_{11}=-\frac{2}{\alpha_{22}}$, $\rho_{22}=-\frac{2}{\alpha_{22}}$, $\rho_{33}=-\frac{2}{\alpha_{22}}$, $\rho_{44}=0$	✓		

Доказательство. Пусть $p=1$, тогда оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1=\rho_2=\rho_3=\rho_4=-\frac{3\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}<0.$$

Собственное значение может быть равно любому отрицательному числу, потому что можно положить $\alpha_{44}=-\frac{4}{\rho_1}$, $\alpha_{24}=1$ и $\alpha_{22}=-\rho_1$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны между собой $\rho_1=\rho_2=\rho_3=\rho_4$, а $\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2=3>0$.

Пусть $p=-2$, тогда оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1=-\frac{6\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}<0,\quad \rho_2=\rho_3=\rho_4=0.$$

Собственное значение ρ_1 может быть равно любому отрицательному числу, потому что можно положить $\alpha_{44}=-\frac{7}{\rho_1}$, $\alpha_{24}=1$ и $\alpha_{22}=-\rho_1$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны ρ_1, 0, 0 и 0, а $\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2=6>0$.

Продолжение таблицы 2

№	Матрица оператора Риччи	{1111}	{112}	{22}
$3.5^1.3$	$\rho_{11}=\frac{2}{\alpha_{22}}$, $\rho_{22}=\frac{2}{\alpha_{22}}$, $\rho_{33}=\frac{2}{\alpha_{22}}$, $\rho_{44}=0$	✓		
$3.5^2.1$	$\rho_{11}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{22}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{33}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{44}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$	✓		
$3.5^2.2$	$\rho_{11}=-\frac{2}{\alpha_{33}}$, $\rho_{22}=-\frac{2}{\alpha_{33}}$, $\rho_{33}=-\frac{2}{\alpha_{33}}$, $\rho_{44}=0$	✓		
$3.5^2.3$	$\rho_{11}=\frac{2}{\alpha_{33}}$, $\rho_{22}=\frac{2}{\alpha_{33}}$, $\rho_{33}=\frac{2}{\alpha_{33}}$, $\rho_{44}=0$	✓		
$4.2^1.1$	$\rho_{11}=-\frac{6}{\alpha_{24}}$, $\rho_{22}=-\frac{6}{\alpha_{24}}$, $\rho_{33}=-\frac{6}{\alpha_{24}}$, $\rho_{44}=-\frac{6}{\alpha_{24}}$	✓		
$4.2^2.1$	$\rho_{11}=\frac{6}{\alpha_{44}}$, $\rho_{22}=\frac{6}{\alpha_{44}}$, $\rho_{33}=\frac{6}{\alpha_{44}}$, $\rho_{44}=\frac{6}{\alpha_{44}}$	✓		
$4.2^2.2$	$\rho_{11}=-\frac{6}{\alpha_{44}}$, $\rho_{22}=-\frac{6}{\alpha_{44}}$, $\rho_{33}=-\frac{6}{\alpha_{44}}$, $\rho_{44}=-\frac{6}{\alpha_{44}}$	✓		
$4.2^3.1$	$\rho_{11}=-\frac{6}{\alpha_{24}}$, $\rho_{22}=-\frac{6}{\alpha_{24}}$, $\rho_{33}=-\frac{6}{\alpha_{24}}$, $\rho_{44}=-\frac{6}{\alpha_{24}}$	✓		
$6.1^1.1$	$\rho_{11}=-\frac{6}{\alpha_{24}}$, $\rho_{22}=-\frac{6}{\alpha_{24}}$, $\rho_{33}=-\frac{6}{\alpha_{24}}$, $\rho_{44}=-\frac{6}{\alpha_{24}}$	✓		
$6.1^2.1$	$\rho_{11}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{22}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{33}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{44}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$	✓		
$6.1^2.2$	$\rho_{11}=\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{22}=\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{33}=\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{44}=\frac{3}{\alpha_{44}}$	✓		
$6.1^3.1$	$\rho_{11}=\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{22}=\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{33}=\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{44}=\frac{3}{\alpha_{44}}$	✓		
$6.1^3.2$	$\rho_{11}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{22}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{33}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$, $\rho_{44}=-\frac{3}{\alpha_{44}}$	✓		

Пусть теперь $p \neq 1$, $p \neq -2$, тогда оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1=\rho_2=-\frac{\alpha_{22}(p+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}\neq 0,\quad \rho_3=-\frac{\alpha_{22}(p^2+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}<0,$$
$$\rho_4=-\frac{\alpha_{22}p(p+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}.$$

Заметим, что

$$2\rho_1+\rho_4=-\frac{\alpha_{22}(p+2)^2}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}<0,\quad \frac{\rho_4}{\rho_1}=p\neq 1,$$

а также

$$\frac{2\rho_1^2+\rho_4^2}{2\rho_1+\rho_4}=\frac{2\left(-\frac{\alpha_{22}(p+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}\right)^2+\left(-\frac{\alpha_{22}p(p+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}\right)^2}{2\left(-\frac{\alpha_{22}(p+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}\right)+\left(-\frac{\alpha_{22}p(p+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}\right)}=-\frac{\alpha_{22}(p^2+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}=\rho_3.$$

Осталось заметить, что ρ_1, ρ_3 и ρ_4 могут быть произвольными при выполнении условий

$$\rho_1\neq 0,\quad 2\rho_1+\rho_4<0,\quad \rho_1\neq\rho_4\quad \rho_3=\frac{2\rho_1^2+\rho_4^2}{2\rho_1+\rho_4}<0.$$

Действительно, положим $\alpha_{22} = -\frac{1}{2\rho_1+\rho_4}$ $\alpha_{44} = -\frac{2\rho_1+\rho_4}{\rho_1^2}$, $\alpha_{24} = 0$, $p = \frac{\rho_4}{\rho_1} \notin \{-2, 1\}$, α_{33} выберем произвольным положительным числом. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$, ρ_3 и ρ_4, а $\alpha_{33} > 0$ и $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = \frac{1}{\rho_1^2} > 0$. □

Предложение 5. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^2.3$ *с инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_3 > 0$, $\rho_1 + \rho_3 > 0$ и $\rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\alpha_{22} - 2\alpha_{33}}{2\alpha_{33}^2}, \quad \rho_3 = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{33}^2} > 0, \quad \rho_4 = 0.$$

Из приведенных выражений видно, что $\rho_1 + \rho_3 = \frac{1}{\alpha_{33}} > 0$.

Заметим, что ρ_1 и ρ_3 могут быть произвольными при выполнении условий $\rho_1 + \rho_3 > 0$, $\rho_3 > 0$. Положим $\alpha_{22} = \frac{2\rho_3}{(\rho_1+\rho_3)^2}$, $\alpha_{33} = \frac{1}{\rho_1+\rho_3}$, $\alpha_{44} = \alpha_{22}$, а $\alpha_{24} = 0$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$, ρ_3 и 0, а $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = \frac{4\rho_3^2}{(\rho_1+\rho_3)^4} > 0$. □

Предложение 6. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^2.4$ *с инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_3 > 0$, $\rho_1 + \rho_3 < 0$ и $\rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{2\alpha_{33} + \alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2}, \quad \rho_3 = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{33}^2} > 0, \quad \rho_4 = 0.$$

Из приведенных выражений видно, что $\rho_1 + \rho_3 = -\frac{1}{\alpha_{33}} < 0$.

Заметим, что ρ_1 и ρ_3 могут быть произвольными при выполнении условий $\rho_1 + \rho_3 < 0$, $\rho_3 > 0$. Положим $\alpha_{22} = \frac{2\rho_3}{(\rho_1+\rho_3)^2}$, $\alpha_{33} = -\frac{1}{\rho_1+\rho_3}$, $\alpha_{44} = \alpha_{22}$, а $\alpha_{24} = 0$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$, ρ_3 и 0, а $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = \frac{4\rho_3^2}{(\rho_1+\rho_3)^4} > 0$. □

Предложение 7. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^2.5$ *с инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 = -\rho_3 < 0$ и $\rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\rho_3 = -\frac{\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2} < 0, \quad \rho_4 = 0.$$

При $\alpha_{22} > 0$ выражение $-\frac{\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2}$ может принимать любое отрицательное значение. □

Предложение 8. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^2.6$ *с инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 < 0$ и $\rho_3 = \rho_4 > 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} < 0, \quad \rho_3 = \rho_4 = \frac{1}{\alpha_{33}} > 0.$$

Заметим, что ρ_1 может быть любым отрицательным числом, а ρ_3 — положительным. Действительно, пусть $\alpha_{22} = -\rho_1$, $\alpha_{44} = -\frac{2}{\rho_1}$, $\alpha_{24} = 1$, $\alpha_{33} = \frac{1}{\rho_3}$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_3 = \rho_4$, а $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = 1 > 0$. $\square$

Предложение 9. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^2.7$ *с инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 < 0$ и $\rho_3 = \rho_4 < 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} < 0, \quad \rho_3 = \rho_4 = -\frac{1}{\alpha_{33}} < 0.$$

Заметим, что ρ_1 и ρ_3 могут быть любыми отрицательными числами. Действительно, пусть $\alpha_{22} = -\rho_1$, $\alpha_{44} = -\frac{2}{\rho_1}$, $\alpha_{24} = 1$, $\alpha_{33} = -\frac{1}{\rho_3}$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_3 = \rho_4$, а $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = 1 > 0$. $\square$

Предложение 10. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^2.8$ *с инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 < 0$ и $\rho_3 = \rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} < 0, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

Заметим, что ρ_1 может быть любым отрицательным числом. Действительно, пусть $\alpha_{22} = -\rho_1$, $\alpha_{44} = -\frac{2}{\rho_1}$, $\alpha_{24} = 1$, $\alpha_{33} = 1$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$, 0 и 0, а $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = 1 > 0$. $\square$

Предложение 11. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^2.9$ *с инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 > 0$ и $\rho_3 = \rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{\alpha_{33}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

В данном случае $\alpha_{33} > 0$, поэтому собственные значения $\rho_1 = \rho_2$ могут быть любыми положительными числами. $\square$

Предложение 12. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^2.10$ *с инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 < 0$ и $\rho_3 = \rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{1}{\alpha_{33}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

В данном случае $\alpha_{33} > 0$, поэтому собственные значения $\rho_1 = \rho_2$ могут быть любыми отрицательными числами. $\square$

Предложение 13. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^2.11$ *с инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 < 0$ и $\rho_3 = \rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{6}{\alpha_{33}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

В данном случае $\alpha_{33} > 0$, поэтому собственные значения $\rho_1 = \rho_2$ могут быть любыми отрицательными числами. $\square$

Предложение 14. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $2.1^3.1$ *с инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 > 0$ и $\rho_3 = \rho_4 > 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{\alpha_{33}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = \frac{1}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{33} > 0$ и $\alpha_{44} > 0$, поэтому пары собственных значений $\rho_1 = \rho_2$ и $\rho_3 = \rho_4$ могут быть любыми положительными числами. $\square$

Предложение 15. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $2.1^3.2$ *с инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 > 0$ и $\rho_3 = \rho_4 < 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{\alpha_{33}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = -\frac{1}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{33} > 0$ и $\alpha_{44} > 0$, поэтому собственные значения $\rho_1 = \rho_2$ могут быть любыми положительными числами, а $\rho_3 = \rho_4$ — любыми отрицательными. $\square$

Предложение 16. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $2.1^3.3$ *с инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 < 0$ и $\rho_3 = \rho_4 < 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{1}{\alpha_{33}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = -\frac{1}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{33} > 0$ и $\alpha_{44} > 0$, поэтому пары собственных значений $\rho_1 = \rho_2$ и $\rho_3 = \rho_4$ могут быть любыми отрицательными числами. □

Предложение 17. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $2.1^3.4$ с инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 > 0$ и $\rho_3 = \rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{\alpha_{33}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

В данном случае $\alpha_{33} > 0$, поэтому собственные значения $\rho_1 = \rho_2$ могут быть любыми положительными числами. □

Предложение 18. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $2.1^3.5$ с инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 < 0$ и $\rho_3 = \rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{1}{\alpha_{33}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

В данном случае $\alpha_{33} > 0$, поэтому собственные значения $\rho_1 = \rho_2$ могут быть любыми отрицательными числами. □

Предложение 19. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $3.5^2.1$ с инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным отрицательным собственным значением.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{3}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} > 0$, поэтому собственное значение может быть любым отрицательным числом. □

Предложение 20. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $3.5^2.2$ с инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 < 0$ и $\rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = -\frac{2}{\alpha_{33}}, \quad \rho_4 = 0.$$

В данном случае $\alpha_{33} > 0$, поэтому собственное значение $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ может быть любым отрицательным числом. □

Предложение 21. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $3.5^2.3$ *с инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 > 0$ и $\rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \frac{2}{\alpha_{33}}, \quad \rho_4 = 0.$$

В данном случае $\alpha_{33} > 0$, поэтому собственное значение $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ может быть любым положительным числом. □

Предложение 22. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $4.2^2.1$ *с инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным положительным собственным значением.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \frac{6}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} > 0$, поэтому собственное значение может быть любым положительным числом. □

Предложение 23. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $4.2^2.2$ *с инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным отрицательным собственным значением.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{6}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} > 0$, поэтому собственное значение может быть любым отрицательным числом. □

Предложение 24. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $6.1^2.1$ *с инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным отрицательным собственным значением.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{3}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} > 0$, поэтому собственное значение может быть любым отрицательным числом. $\square$

Предложение 25. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $6.1^2.2$ *с инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с единственным положительным собственным значением.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \frac{3}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} > 0$, поэтому собственное значение может быть любым положительным числом. $\square$

6. Предписанные значения спектра оператора Риччи. Случай лоренцевой метрики

Сначала мы перечислим все случаи, в которых оператор Риччи тривиален, а значит имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением равным нулю. Доказательство следующего предложения прямо следует из предложения 1, таблиц 1 и 2.

Предложение 26. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространств* $1.1^1.10$, $1.1^2.12$, $1.1^3.1$, $1.1^4.1$, $1.2^1.1$, $1.4^1.23$, $1.4^1.26$, $2.1^2.6$, $2.4^1.3$, $2.5^2.6$, $2.5^2.7$, $3.2^2.2$, $3.3^2.4$, $3.5^1.4$, $3.5^2.4$, $4.1^2.1$, $6.1^3.3$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с единственным собственным значением равным нулю.*

Далее мы перечислим все случаи, в которых оператор Риччи имеет единственный ненулевой элемент не на главной диагонали при любых значениях параметров. В таких случаях он имеет тип Сегре $\{112\}$ с единственным собственным значением равным нулю. Доказательство следующего предложения так же прямо следует из таблиц 1 и 2.

Предложение 27. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространств* $1.4^1.15$, $1.4^1.17$, $1.4^1.18$, $1.4^1.20$, $1.4^1.21$, $1.4^1.22$, $1.4^1.24$, $1.4^1.25$, $2.5^2.4$, $2.5^2.5$, $3.3^2.2$, $3.3^2.3$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{112\}$ *с единственным собственным значением равным нулю.*

Теперь перечислим все случаи, в которых оператор Риччи имеет единственный элемент не на главной диагонали, который может быть равен нулю при каких-то значениях параметров. В таких случаях он имеет тип Сегре $\{1111\}$ или $\{112\}$ с единственным собственным значением равным нулю. Доказательство следующего предложения так же прямо следует из таблиц 1 и 2.

Предложение 28. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространств $1.4^1.9$, $1.4^1.10$, $1.4^1.11$, $1.4^1.12$, $1.4^1.13$, $1.4^1.14$, $1.4^1.16$, $1.4^1.19$, $2.5^2.2$, $2.5^2.3$, $3.3^2.1$ с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ или $\{112\}$ с единственным собственным значением равным нулю.*

Далее мы последовательно рассмотрим все случаи, неупомянутые ранее.

Предложение 29. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.1^1.1$ с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_1 + \rho_3 = 2\rho_4 < 0$, $2\rho_4 - 3\rho_1 < 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{(2\alpha_{13}^2 - \alpha_{22}\alpha_{44} + \alpha_{24}^2)\alpha_{22}}{2\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}, \quad \rho_3 = -\frac{(4\alpha_{13}^2 + \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)\alpha_{22}}{2\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)},$$
$$\rho_4 = -\frac{3\alpha_{22}}{2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)} < 0.$$

Отметим, что

$$\rho_1 + \rho_3 = -\frac{3\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} = 2\rho_4 < 0,$$

а также

$$\frac{2\rho_4 - 3\rho_1}{\rho_4} = \frac{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2}{\alpha_{13}^2} > 0,$$

следовательно $2\rho_4 - 3\rho_1 < 0$.

Осталось заметить, что ρ_1, ρ_3 и ρ_4 могут быть произвольными при выполнении условий

$$\rho_1 + \rho_3 = 2\rho_4 < 0, \quad 2\rho_4 - 3\rho_1 < 0.$$

Действительно, положим $\alpha_{22} = -\frac{2}{3}(2\rho_4 - 3\rho_1) > 0$, $\alpha_{44} = -\frac{3}{2\rho_4} > 0$, $\alpha_{24} = 0$, $\alpha_{13} = 1$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$, ρ_3 и ρ_4, а $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = \frac{2\rho_4 - 3\rho_1}{\rho_4} > 0$. □

Предложение 30. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.1^1.2$ с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$*

- *либо имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями*
$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 < 0;$$
- *либо имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 < 0$, $\rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 0$;*
- *либо имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$, $2\rho_1 + \rho_4 < 0$, $\rho_1 \neq \rho_4$, $\rho_3 = \frac{2\rho_1^2 + \rho_4^2}{2\rho_1 + \rho_4} < 0$.*

Доказательство. Пусть $p = \frac{1}{2}$, тогда оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{3\alpha_{22}}{4\,(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)} < 0.$$

Собственное значение может быть равно любому отрицательному числу, потому что можно положить $\alpha_{22} = \alpha_{44} = -\frac{3}{4\rho_1} > 0$, $\alpha_{24} = 0$.

Пусть $p=-1$, тогда оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1=-\frac{3\alpha_{22}}{2\left(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2\right)}<0,\quad \rho_2=\rho_3=\rho_4=0.$$

Собственное значение ρ_1 может быть равно любому действительному числу, потому что можно положить $\alpha_{22}=\alpha_{44}=-\frac{3}{2\rho_1}>0$, $\alpha_{24}=0$.

Пусть теперь $\alpha_{22}\neq 0$, $p\neq\frac{1}{2}$, $p\neq -1$, тогда оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1=\rho_2=-\frac{\alpha_{22}(p+1)}{2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)}\neq 0,\quad \rho_3=-\frac{\alpha_{22}(2p^2+1)}{2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)}<0,$$
$$\rho_4=-\frac{\alpha_{22}p(p+1)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}.$$

Заметим, что

$$2\rho_1+\rho_4=-\frac{\alpha_{22}(p+1)^2}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}<0,\quad \frac{\rho_4}{2\rho_1}=p\neq\frac{1}{2},$$

а также

$$\frac{2\rho_1^2+\rho_4^2}{2\rho_1+\rho_4}=\frac{2\left(-\frac{\alpha_{22}(p+1)}{2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)}\right)^2+\left(-\frac{\alpha_{22}p(p+1)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}\right)^2}{2\left(-\frac{\alpha_{22}(p+1)}{2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)}\right)+\left(-\frac{\alpha_{22}p(p+1)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}\right)}=-\frac{\alpha_{22}(2p^2+1)}{2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)}=\rho_3.$$

Осталось заметить, что ρ_1, ρ_3 и ρ_4 могут быть произвольными при выполнении условий

$$\rho_1\neq 0,\quad 2\rho_1+\rho_4<0,\quad \rho_1\neq\rho_4\quad \rho_3=\frac{2\rho_1^2+\rho_4^2}{2\rho_1+\rho_4}<0.$$

Действительно, положим $\alpha_{22}=-(2\rho_1+\rho_4)>0$, $\alpha_{44}=-\frac{2\rho_1+\rho_4}{4\rho_1^2}>0$, $\alpha_{24}=0$, $p=\frac{\rho_4}{2\rho_1}\notin\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$, α_{13} выберем произвольным числом, кроме нуля. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1=\rho_2$, ρ_3 и ρ_4, а $\alpha_{13}\neq 0$ и $\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2=\frac{(2\rho_1+\rho_4)^2}{4\rho_1^2}>0$. □

Предложение 31. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.1^1.3$ с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1=\rho_2\neq-\rho_3$, $\rho_3<0$ и $\rho_4=0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1=\rho_2=-\frac{2\alpha_{13}-\alpha_{22}}{\alpha_{13}^2},\quad \rho_3=-\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{13}^2},\quad \rho_4=0.$$

Из приведенных выражений видно, что $\rho_1+\rho_3=-\frac{1}{\alpha_{13}}\neq 0$ и $\rho_3<0$, так как $\alpha_{22}>0$.

Заметим, что ρ_1 и ρ_3 могут быть произвольными при выполнении условий $\rho_1+\rho_3\neq 0$, $\rho_3<0$. Положим $\alpha_{22}=-\frac{2\rho_3}{(\rho_1+\rho_3)^2}>0$, $\alpha_{13}=-\frac{1}{\rho_1+\rho_3}$, α_{44} выберем произвольным положительным числом, а α_{24} можно взять равным нулю. □

Предложение 32. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^1.4$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 = -\rho_3 > 0$ и $\rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\rho_3 = \frac{\alpha_{22}}{2\alpha_{13}^2}, \quad \rho_4 = 0.$$

В данном случае $\alpha_{22} > 0$, поэтому $\frac{\alpha_{22}}{2\alpha_{13}^2}$ может принимать любое положительное значение. □

Предложение 33. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^1.5$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 < 0$ и $\rho_3 = \rho_4 \neq 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2}, \quad \rho_3 = \rho_4 = -\frac{1}{\alpha_{13}}.$$

Заметим, что $\rho_1 < 0$. Действительно, в этом случае $\alpha_{22} > 0$ и $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 > 0$. При этом ρ_1 может быть любым отрицательным числом, так как мы можем положить $\alpha_{22} = \frac{\rho_1\alpha_{24}^2}{\rho_1\alpha_{44}+1}$. Выберем α_{24} любым ненулевым числом, и пусть α_{44} достаточно большое, чтобы $\rho_1\alpha_{44} + 1 < 0$ и $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 > 0$, тогда получим $\alpha_{22} > 0$.

Так как $\alpha_{13} \neq 0$, то собственные значения $\rho_3 = \rho_4$ могут быть любыми, кроме нуля. □

Предложение 34. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^1.6$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 < 0$ и $\rho_3 = \rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2}, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

Заметим, что $\rho_1 < 0$. Действительно, в этом случае $\alpha_{22} > 0$ и $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 > 0$. При этом ρ_1 может быть любым отрицательным числом, так как мы можем положить $\alpha_{22} = \frac{\rho_1\alpha_{24}^2}{\rho_1\alpha_{44}+1}$. Выберем α_{24} любым ненулевым числом, и пусть α_{44} достаточно большое, чтобы $\rho_1\alpha_{44} + 1 < 0$ и $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 > 0$, тогда получим $\alpha_{22} > 0$; α_{13} возьмем любым, не равным нулю. □

Предложение 35. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^1.7$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$ и $\rho_3 = \rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{1}{\alpha_{13}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

В данном случае $\alpha_{13} \neq 0$, поэтому собственные значения $\rho_1 = \rho_2$ могут быть любыми, кроме нуля. $\square$

Предложение 36. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^2.1$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$*

- *либо имеет тип Сегре $\{112\}$ с нулевыми собственными значениями;*
- *либо имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_1 + \rho_3 = 2\rho_4 \neq 0$, $\frac{2\rho_4 - 3\rho_1}{\rho_4} > 0$.*

Доказательство. Пусть $\alpha_{22} = 0$, тогда оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{112\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3^2 = 0.$$

Пусть теперь $\alpha_{22} \neq 0$, тогда оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 + 8\alpha_{33}^2)\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}, \quad \rho_3 = \frac{(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 - 16\alpha_{33}^2)\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)},$$
$$\rho_4 = -\frac{6\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} \neq 0.$$

Отметим, что

$$\rho_1 + \rho_3 = -\frac{12\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} = 2\rho_4 \neq 0,$$

а также

$$\frac{2\rho_4 - 3\rho_1}{\rho_4} = -\frac{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2}{4\alpha_{33}^2} > 0.$$

Осталось заметить, что ρ_1, ρ_3 и ρ_4 могут быть произвольными при выполнении условий

$$\rho_1 + \rho_3 = 2\rho_4 \neq 0, \quad \frac{2\rho_4 - 3\rho_1}{\rho_4} > 0.$$

Действительно, положим $\alpha_{22} = \frac{2}{3}(2\rho_4 - 3\rho_1) \neq 0$, $\alpha_{44} = -\frac{6}{\rho_4} \neq 0$, $\alpha_{24} = 0$, $\alpha_{33} = 1$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$, ρ_3 и ρ_4, а $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = \frac{-4(2\rho_4 - 3\rho_1)}{\rho_4} < 0$. $\square$

Предложение 37. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^2.2$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$*

- *либо имеет тип Сегре $\{112\}$ с нулевыми собственными значениями;*
- *либо имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями*

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4;$$

- *либо имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями ρ_1, $\rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 0$;*
- *либо имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$, $2\rho_1 + \rho_4 \neq 0$, $\rho_1 \neq \rho_4$, $\rho_3 = \frac{2\rho_1^2 + \rho_4^2}{2\rho_1 + \rho_4} \neq 0$.*

Доказательство. Пусть $\alpha_{22} = 0$, $p \neq 1$, тогда оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{112\}$ с собственными значениями
$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3^2 = 0.$$

Пусть $p = 1$, тогда оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением
$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{3\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2}.$$
Собственное значение может быть равно любому действительному числу, потому что можно положить $\alpha_{44} = 0$, $\alpha_{24} = 1$ и $\alpha_{22} = \frac{1}{3}\rho_1$.

Пусть $p = -2$, тогда оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями
$$\rho_1 = -\frac{6\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2}, \quad \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 0.$$
Собственное значение ρ_1 может быть равно любому действительному числу, потому что можно положить $\alpha_{44} = 0$, $\alpha_{24} = 1$ и $\alpha_{22} = \frac{1}{6}\rho_1$.

Пусть теперь $\alpha_{22} \neq 0$, $p \neq 1$, $p \neq -2$, тогда оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями
$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\alpha_{22}(p+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} \neq 0, \quad \rho_3 = -\frac{\alpha_{22}(p^2+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} \neq 0,$$
$$\rho_4 = -\frac{\alpha_{22}p(p+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2}.$$

Заметим, что
$$2\rho_1 + \rho_4 = -\frac{\alpha_{22}(p+2)^2}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} \neq 0, \quad \frac{\rho_4}{\rho_1} = p \neq 1,$$
а также
$$\frac{2\rho_1^2 + \rho_4^2}{2\rho_1 + \rho_4} = \frac{2\left(-\frac{\alpha_{22}(p+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2}\right)^2 + \left(-\frac{\alpha_{22}p(p+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2}\right)^2}{2\left(-\frac{\alpha_{22}(p+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2}\right) + \left(-\frac{\alpha_{22}p(p+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2}\right)} = -\frac{\alpha_{22}(p^2+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} = \rho_3.$$

Осталось заметить, что ρ_1, ρ_3 и ρ_4 могут быть произвольными при выполнении условий
$$\rho_1 \neq 0, \quad 2\rho_1 + \rho_4 \neq 0, \quad \rho_1 \neq \rho_4 \quad \rho_3 = \frac{2\rho_1^2 + \rho_4^2}{2\rho_1 + \rho_4} \neq 0.$$
Действительно, положим $\alpha_{44} = -\alpha_{22} = -\frac{2\rho_1 + \rho_4}{\rho_1^2}$, $\alpha_{24} = 0$, $p = \frac{\rho_4}{\rho_1} \notin \{-2, 1\}$, α_{33} выберем произвольным положительным числом. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$, ρ_3 и ρ_4, а $\alpha_{33} > 0$ и $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = -\frac{(2\rho_1 + \rho_4)^2}{\rho_1^4} < 0$. □

Предложение 38. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.1^2.3$ с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$*

- *либо имеет тип Сегре $\{112\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 > 0$, $\rho_3^2 = 0$;*
- *либо имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_1 + \rho_3 > 0$ и $\rho_4 = 0$.*

Доказательство. Если $\alpha_{22} = 0$, $\alpha_{24} \neq 0$, то оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{112\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{\alpha_{33}}, \quad \rho_3^2 = 0.$$

В этом случае $\alpha_{33} > 0$, поэтому собственное значение $\rho_1 = \rho_2$ может принимать любое положительное значение.

Если $\alpha_{22} \neq 0$ или $\alpha_{24} = 0$, то оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\alpha_{22} - 2\alpha_{33}}{2\alpha_{33}^2}, \quad \rho_3 = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{33}^2}, \quad \rho_4 = 0.$$

Из приведенных выражений видно, что $\rho_1 + \rho_3 = \frac{1}{\alpha_{33}} > 0$.

Заметим, что ρ_1 и ρ_3 могут быть произвольными при выполнении условия $\rho_1 + \rho_3 < 0$. Положим $\alpha_{22} = \frac{2\rho_3}{(\rho_1+\rho_3)^2}$, $\alpha_{33} = \frac{1}{\rho_1+\rho_3}$, $\alpha_{44} = -\alpha_{22}$, а α_{24} — произвольно. □

Предложение 39. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^2.4$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда* $\mathcal{R}$

- *либо имеет тип Сегре* $\{112\}$ *с собственными значениями* $\rho_1 = \rho_2 < 0$, $\rho_3^2 = 0$;
- *либо имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями* $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_1 + \rho_3 < 0$ *и* $\rho_4 = 0$.

Доказательство. Если $\alpha_{22} = 0$, $\alpha_{24} \neq 0$, то оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{112\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{1}{\alpha_{33}}, \quad \rho_3^2 = 0.$$

В этом случае $\alpha_{33} > 0$, поэтому собственное значение $\rho_1 = \rho_2$ может принимать любое отрицательное значение.

Если $\alpha_{22} \neq 0$ или $\alpha_{24} = 0$, то оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{2\alpha_{33} + \alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2}, \quad \rho_3 = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{33}^2}, \quad \rho_4 = 0.$$

Из приведенных выражений видно, что $\rho_1 + \rho_3 = -\frac{1}{\alpha_{33}} < 0$.

Заметим, что ρ_1 и ρ_3 могут быть произвольными при выполнении условия $\rho_1 + \rho_3 < 0$. Положим $\alpha_{22} = \frac{2\rho_3}{(\rho_1+\rho_3)^2}$, $\alpha_{33} = -\frac{1}{\rho_1+\rho_3}$, $\alpha_{44} = -\alpha_{22}$, а α_{24} — произвольно. □

Предложение 40. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^2.5$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда* $\mathcal{R}$

- *либо имеет тип Сегре* $\{112\}$ *с нулевыми собственными значениями;*
- *либо имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями* $\rho_1 = \rho_2 = -\rho_3 \neq 0$ *и* $\rho_4 = 0$.

Доказательство. Если $\alpha_{22} = 0$, $\alpha_{24} \neq 0$, то оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{112\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3^2 = 0.$$

Если $\alpha_{22} \neq 0$, то оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\rho_3 = -\frac{\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2}, \quad \rho_4 = 0.$$

При $\alpha_{22} \neq 0$ выражение $-\frac{\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2}$ может принимать любое действительное значение, кроме нуля.

Если $\alpha_{24} = 0$, то оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\rho_3 = -\frac{\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2}, \quad \rho_4 = 0.$$

В этом случае $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = \alpha_{22}\alpha_{44} < 0$, поэтому $\alpha_{22} \neq 0$, следовательно выражение $-\frac{\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2}$ может принимать любое действительное значение, кроме нуля. $\square$

Предложение 41. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.1^2.6$ с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2$ и $\rho_3 = \rho_4 > 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2}, \quad \rho_3 = \rho_4 = \frac{1}{\alpha_{33}} > 0.$$

Заметим, что ρ_1 может быть любым действительным числом, а ρ_3 — положительным. Действительно, пусть $\alpha_{22} = \frac{\rho_1}{\rho_1^2+1}$, $\alpha_{44} = \rho_1$, $\alpha_{24} = 1$, $\alpha_{33} = \frac{1}{\rho_3}$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$ и $\rho_3 = \rho_4$, а $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = -\frac{1}{\rho_1^2+1} < 0$. $\square$

Предложение 42. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.1^2.7$ с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2$ и $\rho_3 = \rho_4 < 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2}, \quad \rho_3 = \rho_4 = -\frac{1}{\alpha_{33}} < 0.$$

Заметим, что ρ_1 может быть любым действительным числом, а ρ_3 — отрицательным. Действительно, пусть $\alpha_{22} = \frac{\rho_1}{\rho_1^2+1}$, $\alpha_{44} = \rho_1$, $\alpha_{24} = 1$, $\alpha_{33} = -\frac{1}{\rho_3}$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$ и $\rho_3 = \rho_4$, а $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = -\frac{1}{\rho_1^2+1} < 0$. $\square$

Предложение 43. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.1^2.8$ с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2$ и $\rho_3 = \rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2}, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

Заметим, что ρ_1 может быть любым действительным числом. Действительно, пусть $\alpha_{22} = \frac{\rho_1}{\rho_1^2+1}$, $\alpha_{44} = \rho_1$, $\alpha_{24} = 1$, $\alpha_{33} = 1$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$, 0 и 0, а $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = -\frac{1}{\rho_1^2+1} < 0$. □

Предложение 44. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^2.9$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 > 0$ и $\rho_3 = \rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{\alpha_{33}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

В данном случае $\alpha_{33} > 0$, поэтому собственные значения $\rho_1 = \rho_2$ могут быть любыми положительными числами. □

Предложение 45. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^2.10$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 < 0$ и $\rho_3 = \rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{1}{\alpha_{33}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

В данном случае $\alpha_{33} > 0$, поэтому собственные значения $\rho_1 = \rho_2$ могут быть любыми отрицательными числами. □

Предложение 46. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.4^1.1$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда*

- *либо $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{112\}$ *с собственными значениями $\rho_1 = 0$ и $\rho_2 = \rho_3^2 < 0$;*
- *либо $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 < 0$ и $\rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ при $\alpha_{33} \neq 0$ имеет тип Сегре $\{112\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = \rho_3^2 = -\frac{1}{2\alpha_{22}}.$$

В данном случае $\alpha_{22} > 0$, поэтому собственные значения $\rho_2 = \rho_3^2$ могут быть любыми отрицательными числами.

При $\alpha_{33} = 0$ оператор Риччи имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = -\frac{1}{2\alpha_{22}}, \quad \rho_4 = 0.$$

В данном случае $\alpha_{22} > 0$, поэтому собственные значения $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ может быть любым отрицательным числом. □

Предложение 47. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.4^1.2$ с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ или $\{112\}$ с любым неположительным собственным значением.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ при $p \neq \frac{5}{3}$ и $\alpha_{33} \neq 0$ имеет тип Сегре $\{112\}$ с собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3^2 = -\frac{3\,(p-1)^2}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} > 0$, но p может быть равно 1, поэтому собственное значение может быть любым неположительным числом.

При $p = \frac{5}{3}$ оператор Риччи имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{4}{3\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} > 0$, поэтому собственное значение может быть любым отрицательным числом.

При $\alpha_{33} = 0$ оператор Риччи имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{3\,(p-1)^2}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} > 0$, но p может быть равно 1, поэтому собственное значение может быть любым неположительным числом. $\square$

Предложение 48. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.4^1.3$ с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ или $\{112\}$ с единственным отрицательным собственным значением.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ при $\alpha_{33} \neq \alpha_{44}$ имеет тип Сегре $\{112\}$ с собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3^2 = -\frac{3}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} > 0$, поэтому собственное значение может быть любым отрицательным числом.

При $\alpha_{33} = \alpha_{44}$ оператор Риччи имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{3}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} > 0$, поэтому собственное значение может быть любым отрицательным числом. $\square$

Предложение 49. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.4^1.4$ с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ или $\{112\}$ с единственным отрицательным собственным значением.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ при $\alpha_{33} \neq -\alpha_{44}$ имеет тип Сегре $\{112\}$ с собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3^2 = -\frac{3}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} > 0$, поэтому собственное значение может быть любым отрицательным числом.

При $\alpha_{33} = -\alpha_{44}$ оператор Риччи имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{3}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} > 0$, поэтому собственное значение может быть любым отрицательным числом. □

Предложение 50. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.4^1.5$ с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда*

- *либо $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{112\}$ с собственными значениями $\rho_1 = 0$ и $\rho_2 = \rho_3^2 < 0$;*
- *либо $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 < 0$ и $\rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ при $\alpha_{33} \neq 0$ имеет тип Сегре $\{112\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = \rho_3^2 = -\frac{1}{2\alpha_{22}}.$$

В данном случае $\alpha_{22} > 0$, поэтому собственные значения $\rho_2 = \rho_3^2$ могут быть любыми отрицательными числами.

При $\alpha_{33} = 0$ оператор Риччи имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = -\frac{1}{2\alpha_{22}}, \quad \rho_4 = 0.$$

В данном случае $\alpha_{22} > 0$, поэтому собственные значения $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ может быть любым отрицательным числом. □

Предложение 51. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.4^1.6$ с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{112\}$ с единственным отрицательным собственным значением.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{112\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3^2 = -\frac{3}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} > 0$, поэтому собственное значение может быть любым отрицательным числом. □

Предложение 52. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.4^1.7$ с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{112\}$ с единственным отрицательным собственным значением.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{112\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3^2 = -\frac{3}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} > 0$, поэтому собственное значение может быть любым отрицательным числом. $\square$

Предложение 53. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.4^1.8$ с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным отрицательным собственным значением.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{3}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} > 0$, поэтому собственное значение может быть любым отрицательным числом. $\square$

Предложение 54. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $2.1^2.1$ с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$ и $\rho_3 = \rho_4 > 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{1}{\alpha_{13}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = \frac{1}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{13} \neq 0$, поэтому собственное значение $\rho_1 = \rho_2$ может быть любым числом, кроме нуля. В то же время $\alpha_{44} > 0$, поэтому собственное значение $\rho_3 = \rho_4$ может быть любым положительным числом. $\square$

Предложение 55. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $2.1^2.2$ с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$ и $\rho_3 = \rho_4 < 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{1}{\alpha_{13}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = -\frac{1}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{13} \neq 0$, поэтому собственное значение $\rho_1 = \rho_2$ может быть любым числом, кроме нуля. В то же время $\alpha_{44} > 0$, поэтому собственное значение $\rho_3 = \rho_4$ может быть любым отрицательным числом. $\square$

Предложение 56. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $2.1^2.3$ с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$ и $\rho_3 = \rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{1}{\alpha_{13}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

В данном случае $\alpha_{13} \neq 0$, поэтому собственное значение $\rho_1 = \rho_2$ может быть любым числом, кроме нуля. $\square$

Предложение 57. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $2.1^2.4$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 > 0$ и $\rho_3 = \rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{\alpha_{44}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

В данном случае $\alpha_{44} > 0$, поэтому собственное значение $\rho_1 = \rho_2$ может быть любым положительным числом. $\square$

Предложение 58. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $2.1^2.5$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 < 0$ и $\rho_3 = \rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{1}{\alpha_{44}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

В данном случае $\alpha_{44} > 0$, поэтому собственное значение $\rho_1 = \rho_2$ может быть любым отрицательным числом. $\square$

Предложение 59. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $2.4^1.1$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 < 0$ и $\rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = -\frac{1}{2\alpha_{22}}, \quad \rho_4 = 0.$$

В данном случае $\alpha_{22} > 0$, поэтому собственное значение $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ может быть любым отрицательным числом. $\square$

Предложение 60. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $2.4^1.2$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным отрицательным собственным значением.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{3}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} > 0$, поэтому собственное значение может быть любым отрицательным числом. □

Предложение 61. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $2.5^2.1$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *или* $\{112\}$ *с единственным отрицательным собственным значением.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ при $\alpha_{33} \neq 0$ имеет тип Сегре $\{112\}$ с собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3^2 = -\frac{3}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} > 0$, поэтому собственное значение может быть любым отрицательным числом.

При $\alpha_{33} = 0$ оператор Риччи имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{3}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} > 0$, поэтому собственное значение может быть любым отрицательным числом. □

Предложение 62. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $3.2^2.1$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с единственным отрицательным собственным значением.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{3}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} > 0$, поэтому собственное значение может быть любым отрицательным числом. □

Предложение 63. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $3.5^1.1$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с единственным отрицательным собственным значением.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{3}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} > 0$, поэтому собственное значение может быть любым отрицательным числом. □

Предложение 64. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $3.5^1.2$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями* $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 < 0$ *и* $\rho_4 = 0$.

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = -\frac{2}{\alpha_{22}}, \quad \rho_4 = 0.$$

В данном случае $\alpha_{22} > 0$, поэтому собственное значение $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ может быть любым отрицательным числом. □

Предложение 65. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $3.5^1.3$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 > 0$ и $\rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \frac{2}{\alpha_{22}}, \quad \rho_4 = 0.$$

В данном случае $\alpha_{22} > 0$, поэтому собственное значение $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ может быть любым положительным числом. □

Предложение 66. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $3.5^2.1$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным положительным собственным значением.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{3}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} < 0$, поэтому собственное значение может быть любым положительным числом. □

Предложение 67. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $3.5^2.2$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 < 0$ и $\rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = -\frac{2}{\alpha_{33}}, \quad \rho_4 = 0.$$

В данном случае $\alpha_{33} > 0$, поэтому собственное значение $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ может быть любым отрицательным числом. □

Предложение 68. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $3.5^2.3$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 > 0$ и $\rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \frac{2}{\alpha_{33}}, \quad \rho_4 = 0.$$

В данном случае $\alpha_{33} > 0$, поэтому собственное значение $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ может быть любым положительным числом. □

Предложение 69. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $6.1^3.1$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным отрицательным собственным значением.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \frac{3}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} < 0$, поэтому собственное значение может быть любым отрицательным числом. □

Предложение 70. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $6.1^3.2$ *с инвариантной лоренцевой метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным положительным собственным значением.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{3}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} < 0$, поэтому собственное значение может быть любым положительным числом. □

7. Предписанные значения спектра оператора Риччи. Случай нейтральной метрики

Сначала мы перечислим все случаи, в которых оператор Риччи тривиален, а значит имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением равным нулю. Доказательство следующего предложения прямо следует из предложения 1, таблиц 1 и 2.

Предложение 71. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространств* $1.1^1.9$, $1.1^1.10$, $1.1^2.12$, $1.1^5.1$, $1.1^6.1$, $1.2^1.1$, $1.2^2.1$, $1.3^1.17$, $1.3^1.18$, $1.3^1.23$, $1.3^1.31$, $1.3^1.32$, $1.4^1.23$, $1.4^1.26$, $2.1^1.3$, $2.1^3.6$, $2.1^4.2$, $2.2^1.5$, $2.2^1.6$, $2.2^1.7$, $2.2^2.3$, $2.2^2.4$, $2.2^3.1$, $2.3^1.1$, $2.4^1.3$, $2.5^1.2$, $2.5^1.11$, $2.5^1.12$, $2.5^1.13$, $2.5^1.14$, $3.1^1.1$, $3.1^2.1$, $3.2^1.2$, $3.2^1.3$, $3.2^1.4$, $3.3^1.4$, $3.4^1.1$, $3.5^1.4$, $4.1^1.1$, $4.2^1.2$, $4.2^3.2$, $4.3^1.1$, $4.3^1.2$, $5.1^1.1$, $6.1^1.2$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением равным нулю.*

Далее мы перечислим все случаи, в которых оператор Риччи имеет единственный ненулевой элемент не на главной диагонали при любых значениях параметров. В таких случаях он имеет тип Сегре $\{112\}$ с единственным собственным значением равным нулю. Доказательство следующего предложения так же прямо следует из таблиц 1 и 2.

Предложение 72. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространств* $1.3^1.3$, $1.3^1.6$, $1.3^1.8$, $1.3^1.10$, $1.3^1.11$, $1.3^1.19$, $1.3^1.20$, $1.3^1.22$, $1.3^1.26$, $1.3^1.27$, $1.4^1.16$, $1.4^1.17$, $1.4^1.19$, $1.4^1.20$, $1.4^1.21$, $1.4^1.22$, $1.4^1.24$, $1.4^1.25$, $2.2^1.3$, $2.5^1.7$, $2.5^1.8$, $2.5^1.9$, $2.5^1.10$, $3.3^1.2$, $3.3^1.3$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{112\}$ с единственным собственным значением равным нулю.*

Далее перечислим все случаи, в которых оператор Риччи тип Сегре $\{22\}$ с единственным собственным значением равным нулю при всех значениях параметров. Доказательство следующего предложения так же прямо следует из таблиц 1 и 2.

Предложение 73. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространств* $1.3^1.4$, $1.3^1.15$, $1.3^1.16$, $1.3^1.28$, $1.3^1.29$, $2.2^1.4$, $2.2^2.1$, $2.2^2.2$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{22\}$ с единственным собственным значением равным нулю.*

Теперь перечислим все случаи, в которых оператор Риччи имеет единственный элемент не на главной диагонали, который может быть равен нулю при каких-то значениях параметров. В таких случаях он имеет тип Сегре $\{1111\}$ или $\{112\}$ с единственным собственным значением равным нулю. Доказательство следующего предложения так же прямо следует из таблиц 1 и 2.

Предложение 74. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространств* $1.3^1.9$, $1.3^1.12$, $1.3^1.13$, $1.3^1.14$, $1.3^1.21$, $1.4^1.9$, $1.4^1.10$, $1.4^1.11$, $1.4^1.12$, $1.4^1.13$, $1.4^1.14$, $1.4^1.15$, $1.4^1.18$, $2.2^1.2$, $2.5^1.3$, $2.5^1.4$, $2.5^1.5$, $2.5^1.6$, $3.3^1.1$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ или $\{112\}$ с единственным собственным значением равным нулю.*

Далее мы последовательно рассмотрим все случаи, неупомянутые ранее.

Предложение 75. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^1.1$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$*

- *либо имеет тип Сегре $\{112\}$ с нулевыми собственными значениями;*
- *либо имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_1 + \rho_3 = 2\rho_4 \neq 0$, $\frac{2\rho_4 - 3\rho_1}{\rho_4} < 0$.*

Доказательство. Пусть $\alpha_{22} = 0$, $\alpha_{13} \neq \pm\alpha_{24}$, тогда оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{112\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3^2 = 0.$$

Пусть теперь $\alpha_{22} \neq 0$, тогда оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{(2\alpha_{13}^2 - \alpha_{22}\alpha_{44} + \alpha_{24}^2)\alpha_{22}}{2\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}, \quad \rho_3 = -\frac{(4\alpha_{13}^2 + \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)\alpha_{22}}{2\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)},$$

$$\rho_4 = -\frac{3\alpha_{22}}{2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)} \neq 0.$$

Отметим, что
$$\rho_1 + \rho_3 = -\frac{3\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} = 2\rho_4 \neq 0,$$
а также
$$\frac{2\rho_4 - 3\rho_1}{\rho_4} = \frac{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2}{\alpha_{13}^2} < 0.$$

Осталось заметить, что ρ_1, ρ_3 и ρ_4 могут быть произвольными при выполнении условий
$$\rho_1 + \rho_3 = 2\rho_4 \neq 0, \quad \frac{2\rho_4 - 3\rho_1}{\rho_4} < 0.$$
Действительно, положим $\alpha_{22} = -\frac{2}{3}(2\rho_4 - 3\rho_1) \neq 0$, $\alpha_{44} = -\frac{3}{2\rho_4} \neq 0$, $\alpha_{24} = 0$, $\alpha_{13} = 1$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$, ρ_3 и ρ_4, а $\alpha_{13} \neq 0$ и $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = \frac{2\rho_4 - 3\rho_1}{\rho_4} < 0$. □

Предложение 76. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.1^1.2$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$*

- *либо имеет тип Сегре $\{112\}$ с нулевыми собственными значениями;*
- *либо имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями*
$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4;$$
- *либо имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями ρ_1, $\rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 0$;*
- *либо имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$, $2\rho_1 + \rho_4 \neq 0$, $\rho_1 \neq \rho_4$, $\rho_3 = \frac{2\rho_1^2 + \rho_4^2}{2\rho_1 + \rho_4} \neq 0$.*

Доказательство. Пусть $\alpha_{22} = 0$, $p \neq \frac{1}{2}$, тогда оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{112\}$ с собственными значениями
$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3^2 = 0.$$

Пусть $p = \frac{1}{2}$, тогда оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями
$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{3\alpha_{22}}{4\left(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2\right)}.$$
Собственное значение может быть равно любому действительному числу, потому что можно положить $\alpha_{44} = 0$, $\alpha_{24} = 1$ и $\alpha_{22} = \frac{4}{3}\rho_1$.

Пусть $p = -1$, тогда оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями
$$\rho_1 = -\frac{3\alpha_{22}}{2\left(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2\right)}, \quad \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 0.$$
Собственное значение ρ_1 может быть равно любому действительному числу, потому что можно положить $\alpha_{44} = 0$, $\alpha_{24} = 1$ и $\alpha_{22} = \frac{2}{3}\rho_1$.

Пусть теперь $\alpha_{22} \neq 0$, $p \neq \frac{1}{2}$, $p \neq -1$, тогда оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями
$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\alpha_{22}(p+1)}{2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)} \neq 0, \quad \rho_3 = -\frac{\alpha_{22}(2p^2+1)}{2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)} \neq 0,$$
$$\rho_4 = -\frac{\alpha_{22}p(p+1)}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2}.$$

Заметим, что

$$2\rho_1+\rho_4=-\frac{\alpha_{22}(p+1)^2}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}\neq 0,\quad \frac{\rho_4}{2\rho_1}=p\neq\frac{1}{2},$$

а также

$$\frac{2\rho_1^2+\rho_4^2}{2\rho_1+\rho_4}=\frac{2\left(-\frac{\alpha_{22}(p+1)}{2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)}\right)^2+\left(-\frac{\alpha_{22}p(p+1)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}\right)^2}{2\left(-\frac{\alpha_{22}(p+1)}{2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)}\right)+\left(-\frac{\alpha_{22}p(p+1)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}\right)}=-\frac{\alpha_{22}(2p^2+1)}{2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)}=\rho_3.$$

Осталось заметить, что ρ_1, ρ_3 и ρ_4 могут быть произвольными при выполнении условий

$$\rho_1\neq 0,\quad 2\rho_1+\rho_4\neq 0,\quad \rho_1\neq\rho_4\quad \rho_3=\frac{2\rho_1^2+\rho_4^2}{2\rho_1+\rho_4}\neq 0.$$

Действительно, положим $\alpha_{44}=-\alpha_{22}=-\frac{2\rho_1+\rho_4}{4\rho_1^2}$, $\alpha_{24}=0$, $p=\frac{\rho_4}{2\rho_1}\notin\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$, α_{13} выберем произвольным числом, кроме нуля. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1=\rho_2$, ρ_3 и ρ_4, а $\alpha_{13}\neq 0$ и $\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2=-\frac{(2\rho_1+\rho_4)^2}{16\rho_1^4}<0$. □

Предложение 77. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^1.3$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда* $\mathcal{R}$

- *либо имеет тип Сегре* $\{112\}$ *с собственными значениями* $\rho_1=\rho_2\neq 0$, $\rho_3^2=0$;
- *либо имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями* $\rho_1=\rho_2\neq-\rho_3$ *и* $\rho_4=0$.

Доказательство. Если $\alpha_{22}=0$, $\alpha_{24}\neq 0$, то оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{112\}$ с собственными значениями

$$\rho_1=\rho_2=-\frac{1}{\alpha_{13}},\quad \rho_3^2=0.$$

В этом случае $\alpha_{13}\neq 0$, поэтому собственное значение $\rho_1=\rho_2$ может принимать любое действительное значение, кроме нуля.

Если $\alpha_{22}\neq 0$ или $\alpha_{24}=0$, то оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1=\rho_2=-\frac{2\alpha_{13}-\alpha_{22}}{\alpha_{13}^2},\quad \rho_3=-\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{13}^2},\quad \rho_4=0.$$

Из приведенных выражений видно, что $\rho_1+\rho_3=-\frac{1}{\alpha_{13}}\neq 0$.

Заметим, что ρ_1 и ρ_3 могут быть произвольными при выполнении условия $\rho_1+\rho_3\neq 0$. Положим $\alpha_{22}=-\frac{2\rho_3}{(\rho_1+\rho_3)^2}$, $\alpha_{13}=-\frac{1}{\rho_1+\rho_3}$, α_{44} выберем равным $-\alpha_{22}$, а α_{24} — произвольно. □

Предложение 78. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^1.4$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда* $\mathcal{R}$

- *либо имеет тип Сегре* $\{112\}$ *с нулевыми собственными значениями;*
- *либо имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями* $\rho_1=\rho_2=-\rho_3$ *и* $\rho_4=0$.

Доказательство. Если $\alpha_{22} = 0$, $\alpha_{24} \neq 0$, то оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{112\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3^2 = 0.$$

Если $\alpha_{22} \neq 0$, то оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\rho_3 = \frac{\alpha_{22}}{2\alpha_{13}^2}, \quad \rho_4 = 0.$$

При $\alpha_{22} \neq 0$ выражение $\frac{\alpha_{22}}{2\alpha_{13}^2}$ может принимать любое действительное значение, кроме нуля.

Если $\alpha_{24} = 0$, то оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\rho_3 = \frac{\alpha_{22}}{2\alpha_{13}^2}, \quad \rho_4 = 0.$$

В этом случае на α_{22} нет никаких ограничений, поэтому выражение $\frac{\alpha_{22}}{2\alpha_{13}^2}$ может принимать любое действительное значение. □

Предложение 79. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^1.5$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями* $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$ *и* $\rho_3 = \rho_4 \neq 0$.

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2}, \quad \rho_3 = \rho_4 = -\frac{1}{\alpha_{13}}.$$

Заметим, что ρ_1 может быть любым действительным числом. Действительно, выразим $\alpha_{22} = \frac{\rho_1\alpha_{24}^2}{\rho_1\alpha_{44}+1}$. Выберем α_{24} достаточно большим так, чтобы $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 < 0$; α_{44} — чтобы $\rho_1\alpha_{44} + 1 \neq 0$.

Так как $\alpha_{13} \neq 0$, то собственные значения $\rho_3 = \rho_4$ могут быть любыми, кроме нуля. □

Предложение 80. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^1.6$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями* $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$ *и* $\rho_3 = \rho_4 = 0$.

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2}, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

Заметим, что ρ_1 может быть любым действительным числом. Действительно, выразим $\alpha_{22} = \frac{\rho_1\alpha_{24}^2}{\rho_1\alpha_{44}+1}$. Выберем α_{24} достаточно большим так, чтобы $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 < 0$; α_{44}, чтобы $\rho_1\alpha_{44} + 1 \neq 0$; α_{13} возьмем любым, не равным нулю. □

Предложение 81. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^1.7$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями* $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$ *и* $\rho_3 = \rho_4 = 0$.

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{1}{\alpha_{13}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

В данном случае $\alpha_{13} \neq 0$, поэтому собственные значения $\rho_1 = \rho_2$ могут быть любыми, кроме нуля. $\square$

Предложение 82. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^1.8$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$ и $\rho_3 = \rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{3}{\alpha_{13}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

В данном случае $\alpha_{13} \neq 0$, поэтому собственные значения $\rho_1 = \rho_2$ могут быть любыми, кроме нуля. $\square$

Предложение 83. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^2.1$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_1 + \rho_3 = 2\rho_4 \neq 0$, $\frac{2\rho_4 - 3\rho_1}{\rho_4} < 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 + 8\alpha_{33}^2)\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}, \quad \rho_3 = \frac{(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 - 16\alpha_{33}^2)\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)},$$

$$\rho_4 = -\frac{6\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} \neq 0.$$

Отметим, что

$$\rho_1 + \rho_3 = -\frac{12\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} = 2\rho_4 \neq 0,$$

а также

$$\frac{2\rho_4 - 3\rho_1}{\rho_4} = -\frac{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2}{4\alpha_{33}^2} < 0.$$

Осталось заметить, что ρ_1, ρ_3 и ρ_4 могут быть произвольными при выполнении условий

$$\rho_1 + \rho_3 = 2\rho_4 \neq 0, \quad \frac{2\rho_4 - 3\rho_1}{\rho_4} < 0.$$

Действительно, положим $\alpha_{22} = \frac{2(2\rho_4 - 3\rho_1)}{3\rho_4^2} \neq 0$, $\alpha_{44} = -\frac{6}{\rho_4} \neq 0$, $\alpha_{24} = 0$, $\alpha_{33} = \frac{1}{\rho_4}$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$, ρ_3 и ρ_4, а α_{22} и α_{33} будут разных знаков, и $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = \frac{-4(2\rho_4 - 3\rho_1)}{\rho_4^3} > 0$. $\square$

Предложение 84. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^2.2$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$*

- *либо имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями*

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 \neq 0;$$

- *либо имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями* $\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 0$;
- *либо имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями* $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$, $2\rho_1 + \rho_4 \neq 0$, $\rho_1 \neq \rho_4$, $\rho_3 = \frac{2\rho_1^2+\rho_4^2}{2\rho_1+\rho_4} \neq 0$.

Доказательство. Пусть $p = 1$, тогда оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{3\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} \neq 0.$$

Собственное значение может быть равно любому ненулевому числу, потому что можно положить $\alpha_{44} = -\frac{4}{\rho_1}$, $\alpha_{24} = 1$, $\alpha_{22} = -\rho_1$, $\alpha_{33} = \rho_1$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4$, а $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = 3 > 0$.

Пусть $p = -2$, тогда оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = -\frac{6\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} \neq 0, \quad \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

Собственное значение ρ_1 может быть равно любому отрицательному числу, потому что можно положить $\alpha_{44} = -\frac{7}{\rho_1}$, $\alpha_{24} = 1$, $\alpha_{22} = -\rho_1$, $\alpha_{33} = \rho_1$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны ρ_1, 0, 0 и 0, а $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = 6 > 0$.

Пусть теперь $p \neq 1$, $p \neq -2$, тогда оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\alpha_{22}(p+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} \neq 0, \quad \rho_3 = -\frac{\alpha_{22}(p^2+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} \neq 0,$$
$$\rho_4 = -\frac{\alpha_{22}p(p+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2}.$$

Заметим, что

$$2\rho_1 + \rho_4 = -\frac{\alpha_{22}(p+2)^2}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} \neq 0, \quad \frac{\rho_4}{\rho_1} = p \neq 1,$$

а также

$$\frac{2\rho_1^2 + \rho_4^2}{2\rho_1 + \rho_4} = \frac{2\left(-\frac{\alpha_{22}(p+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}\right)^2 + \left(-\frac{\alpha_{22}p(p+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}\right)^2}{2\left(-\frac{\alpha_{22}(p+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}\right) + \left(-\frac{\alpha_{22}p(p+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}\right)} = -\frac{\alpha_{22}(p^2+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} = \rho_3.$$

Осталось заметить, что ρ_1, ρ_3 и ρ_4 могут быть произвольными при выполнении условий

$$\rho_1 \neq 0, \quad 2\rho_1 + \rho_4 \neq 0, \quad \rho_1 \neq \rho_4 \quad \rho_3 = \frac{2\rho_1^2 + \rho_4^2}{2\rho_1 + \rho_4} \neq 0.$$

Действительно, положим $\alpha_{22} = -\frac{1}{2\rho_1+\rho_4}$ $\alpha_{44} = -\frac{2\rho_1+\rho_4}{\rho_1^2}$, $\alpha_{24} = 0$, $p = \frac{\rho_4}{\rho_1} \notin \{-2, 1\}$, α_{33} выберем произвольным числом, знак которого противоположен знаку α_{22}. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$, ρ_3 и ρ_4, а $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = \frac{1}{\rho_1^2} > 0$. □

Предложение 85. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.1^2.3$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_3\,(\rho_1 + \rho_3) < 0$ и $\rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\alpha_{22} - 2\alpha_{33}}{2\alpha_{33}^2}, \quad \rho_3 = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{33}^2}, \quad \rho_4 = 0.$$

Из приведенных выражений видно, что $\rho_3\,(\rho_1 + \rho_3) = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{33}^3} < 0$, потому что α_{22} и α_{33} разных знаков.

Заметим, что ρ_1 и ρ_3 могут быть произвольными при выполнении условия $\rho_3\,(\rho_1 + \rho_3) < 0$. Положим $\alpha_{22} = \frac{2\rho_3}{(\rho_1+\rho_3)^2}$, $\alpha_{33} = \frac{1}{\rho_1+\rho_3}$, $\alpha_{44} = \alpha_{22}$, а $\alpha_{24} = 0$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$, ρ_3 и 0, а $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = \frac{4\rho_3^2}{(\rho_1+\rho_3)^4} > 0$. □

Предложение 86. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.1^2.4$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_3\,(\rho_1 + \rho_3) > 0$ и $\rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{2\alpha_{33} + \alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2}, \quad \rho_3 = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{33}^2}, \quad \rho_4 = 0.$$

Из приведенных выражений видно, что $\rho_3\,(\rho_1 + \rho_3) = -\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{33}^3} > 0$, потому что α_{22} и α_{33} разных знаков.

Заметим, что ρ_1 и ρ_3 могут быть произвольными при выполнении условия $\rho_3\,(\rho_1 + \rho_3) > 0$. Положим $\alpha_{22} = \frac{2\rho_3}{(\rho_1+\rho_3)^2}$, $\alpha_{33} = -\frac{1}{\rho_1+\rho_3}$, $\alpha_{44} = \alpha_{22}$, а $\alpha_{24} = 0$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$, ρ_3 и 0, а $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = \frac{4\rho_3^2}{(\rho_1+\rho_3)^4} > 0$. □

Предложение 87. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.1^2.5$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 = -\rho_3 \neq 0$ и $\rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\rho_3 = -\frac{\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2} \neq 0, \quad \rho_4 = 0.$$

В данном случае α_{22} может быть как положительным, так и отрицательным, поэтому выражение $-\frac{\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2}$ может принимать любое действительное значение, кроме нуля. □

Предложение 88. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.1^2.6$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$, $\rho_3 = \rho_4 \neq 0$, $\rho_1\rho_3 > 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями
$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} \neq 0, \quad \rho_3 = \rho_4 = \frac{1}{\alpha_{33}} \neq 0.$$

Отметим, что
$$\rho_1\rho_3 = -\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{33}\left(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2\right)} > 0,$$
поскольку $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 > 0$, а α_{22} и α_{33} разных знаков.

Заметим, что ρ_1 и ρ_3 могут быть любыми при соблюдении условия $\rho_1\rho_3 > 0$. Действительно, пусть $\alpha_{22} = -\rho_1$, $\alpha_{44} = -\frac{2}{\rho_1}$, $\alpha_{24} = 1$, $\alpha_{33} = \frac{1}{\rho_3}$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$ и $\rho_3 = \rho_4$, а $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = 1 > 0$. □

Предложение 89. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.1^2.7$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 > 0$ и $\rho_3 = \rho_4 < 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями
$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} \neq 0, \quad \rho_3 = \rho_4 = -\frac{1}{\alpha_{33}} \neq 0.$$

Отметим, что
$$\rho_1\rho_3 = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{33}\left(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2\right)} < 0,$$
поскольку $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 > 0$, а α_{22} и α_{33} разных знаков.

Заметим, что ρ_1 и ρ_3 могут быть любыми при соблюдении условия $\rho_1\rho_3 < 0$. Действительно, пусть $\alpha_{22} = -\rho_1$, $\alpha_{44} = -\frac{2}{\rho_1}$, $\alpha_{24} = 1$, $\alpha_{33} = -\frac{1}{\rho_3}$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$ и $\rho_3 = \rho_4$, а $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = 1 > 0$. С точностью до переобозначения можно считать, что $\rho_1 = \rho_2 > 0$ и $\rho_3 = \rho_4 < 0$. □

Предложение 90. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.1^2.8$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$ и $\rho_3 = \rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями
$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} \neq 0, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$
Заметим, что ρ_1 может быть любым действительным числом, кроме нуля. Действительно, пусть $\alpha_{22} = -\rho_1$, $\alpha_{44} = -\frac{2}{\rho_1}$, $\alpha_{24} = 1$, $\alpha_{33} = \rho_1$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$, 0 и 0, а $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = 1 > 0$. □

Предложение 91. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.1^2.9$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$ и $\rho_3 = \rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{\alpha_{33}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

В данном случае α_{33} может быть как больше нуля, так и меньше, поэтому собственные значения $\rho_1 = \rho_2$ могут быть любыми, кроме нуля. □

Предложение 92. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^2.10$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями* $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$ *и* $\rho_3 = \rho_4 = 0$.

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{1}{\alpha_{33}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

В данном случае α_{33} может быть как больше нуля, так и меньше, поэтому собственные значения $\rho_1 = \rho_2$ могут быть любыми, кроме нуля. □

Предложение 93. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.1^2.11$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с собственными значениями* $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$ *и* $\rho_3 = \rho_4 = 0$.

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{6}{\alpha_{33}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

В данном случае α_{33} может быть как больше нуля, так и меньше, поэтому собственные значения $\rho_1 = \rho_2$ могут быть любыми, кроме нуля. □

Предложение 94. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.3^1.1$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *или* $\{112\}$ *с единственным собственным значением.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ при $\alpha_{33}\alpha_{44} - \alpha_{34}^2 \neq 0$ имеет тип Сегре $\{112\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3^2 = \frac{3\alpha_{44}}{8\alpha_{23}^2}.$$

На α_{44} нет никаких ограничений, поэтому собственное значение может быть любым.

При $\alpha_{33}\alpha_{44} - \alpha_{34}^2 = 0$ оператор Риччи имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \frac{3\alpha_{44}}{8\alpha_{23}^2}.$$

На α_{44} нет никаких ограничений, поэтому собственное значение может быть любым. □

Предложение 95. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.3^1.2$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{112\}$ *или* $\{22\}$ *с единственным собственным значением равным нулю.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ при $\lambda = 0$ имеет тип Сегре $\{112\}$; при $\lambda \neq 0$ — тип Сегре $\{22\}$. Во всех случаях оператор имеет единственное собственное значение равное нулю. □

Предложение 96. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.3^1.5$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$, $\{112\}$ *или* $\{22\}$ *с единственным собственным значением равным нулю.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ при $\lambda = 0$ и $\mu = 2$ имеет тип Сегре $\{1111\}$; при $\mu = 0$ — тип Сегре $\{112\}$; при ($\lambda \neq 0$ или $\mu \neq 2$) и $\mu \neq 0$ — тип Сегре $\{22\}$. Во всех случаях оператор имеет единственное собственное значение равное нулю. □

Предложение 97. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.3^1.7$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{112\}$ *или* $\{22\}$ *с единственным собственным значением равным нулю.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ при $\lambda = 0$ имеет тип Сегре $\{112\}$; при $\lambda \neq 0$ — тип Сегре $\{22\}$. Во всех случаях оператор имеет единственное собственное значение равное нулю. □

Предложение 98. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.3^1.24$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$, $\{112\}$ *или* $\{22\}$ *с единственным собственным значением равным нулю.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ при $\lambda = 2$ имеет тип Сегре $\{1111\}$; при $\lambda = \frac{2}{3}$ — тип Сегре $\{112\}$; при $\lambda \neq 2$ и $\lambda \neq \frac{2}{3}$ — тип Сегре $\{22\}$. Во всех случаях оператор имеет единственное собственное значение равное нулю. □

Предложение 99. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.3^1.25$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$, $\{112\}$ *или* $\{22\}$ *с единственным собственным значением равным нулю.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ при $\lambda = 2$ имеет тип Сегре $\{1111\}$; при $\lambda = \frac{2}{3}$ — тип Сегре $\{112\}$; при $\lambda \neq 2$ и $\lambda \neq \frac{2}{3}$ — тип Сегре $\{22\}$. Во всех случаях оператор имеет единственное собственное значение равное нулю. □

Предложение 100. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.3^1.30$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$, $\{112\}$ *или* $\{22\}$ *с единственным собственным значением равным нулю.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ при $\lambda = 1$ и $\mu = 1$ имеет тип Сегре $\{1111\}$; при $\mu = 1$ и $\lambda \neq 1$ — тип Сегре $\{112\}$; при $\mu \neq 1$ — тип Сегре $\{22\}$. Во всех случаях оператор имеет единственное собственное значение равное нулю. □

Предложение 101. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.4^1.1$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда*

- *либо $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{112\}$ с собственными значениями $\rho_1 = 0$ и $\rho_2 = \rho_3^2 \neq 0$;*
- *либо $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 \neq 0$ и $\rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ при $\alpha_{33} \neq 0$ и $\alpha_{44} \neq -2\alpha_{22}$ имеет тип Сегре $\{112\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = \rho_3^2 = -\frac{1}{2\alpha_{22}}.$$

В данном случае $\alpha_{22} \neq 0$, поэтому собственные значения $\rho_2 = \rho_3^2$ могут быть любыми, кроме нуля.

При $\alpha_{33} = 0$ или $\alpha_{44} = -2\alpha_{22}$ оператор Риччи имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = -\frac{1}{2\alpha_{22}}, \quad \rho_4 = 0.$$

В данном случае $\alpha_{22} \neq 0$, поэтому собственные значения $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ может быть любым, кроме нуля. □

Предложение 102. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $1.4^1.2$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ или $\{112\}$ с любым собственным значением.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ при $p \neq \frac{5}{3}$ и $\alpha_{33} \neq 0$ имеет тип Сегре $\{112\}$ с собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3^2 = -\frac{3\,(p-1)^2}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} \neq 0$, но p может быть равно 1, поэтому собственное значение может быть любым.

При $p = \frac{5}{3}$ оператор Риччи имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{4}{3\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} \neq 0$, поэтому собственное значение может быть любым, кроме нуля.

При $\alpha_{33} = 0$ оператор Риччи имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{3\,(p-1)^2}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} \neq 0$, но p может быть равно 1, поэтому собственное значение может быть любым. □

Предложение 103. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.4^1.3$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ или $\{112\}$ с единственным ненулевым собственным значением.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ при $\alpha_{33} \neq \alpha_{44}$ имеет тип Сегре $\{112\}$ с собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3^2 = -\frac{3}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} \neq 0$, поэтому собственное значение может быть любым, кроме нуля.

При $\alpha_{33} = \alpha_{44}$ оператор Риччи имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{3}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} \neq 0$, поэтому собственное значение может быть любым, кроме нуля. □

Предложение 104. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.4^1.4$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ или $\{112\}$ с единственным ненулевым собственным значением.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ при $\alpha_{33} \neq -\alpha_{44}$ имеет тип Сегре $\{112\}$ с собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3^2 = -\frac{3}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} \neq 0$, поэтому собственное значение может быть любым, кроме нуля.

При $\alpha_{33} = -\alpha_{44}$ оператор Риччи имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{3}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае $\alpha_{44} \neq 0$, поэтому собственное значение может быть любым, кроме нуля. □

Предложение 105. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.4^1.5$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда*

- *либо $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{112\}$ с собственными значениями $\rho_1 = 0$ и $\rho_2 = \rho_3^2 \neq 0$;*
- *либо $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 \neq 0$ и $\rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ при $\alpha_{33} \neq 0$ имеет тип Сегре $\{112\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = \rho_3^2 = -\frac{1}{2\alpha_{22}}.$$

В данном случае $\alpha_{22} \neq 0$, поэтому собственные значения $\rho_2 = \rho_3^2$ могут быть любыми, кроме нуля.

При $\alpha_{33} = 0$ оператор Риччи имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = -\frac{1}{2\alpha_{22}}, \quad \rho_4 = 0.$$

В данном случае $\alpha_{22} \neq 0$, поэтому собственные значения $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ может быть любым, кроме нуля. $\square$

Предложение 106. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.4^1.6$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{112\}$ с единственным собственным значением неравным нулю.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{112\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3^2 = -\frac{3}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае α_{44} может быть как меньше нуля, так и больше, поэтому собственное значение может быть любым, кроме нуля. $\square$

Предложение 107. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.4^1.7$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{112\}$ с единственным собственным значением неравным нулю.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{112\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3^2 = -\frac{3}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае α_{44} может быть как меньше нуля, так и больше, поэтому собственное значение может быть любым, кроме нуля. $\square$

Предложение 108. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $1.4^1.8$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением неравным нулю.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{3}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае α_{44} может быть как меньше нуля, так и больше, поэтому собственное значение может быть любым, кроме нуля. $\square$

Предложение 109. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $2.1^1.1$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$ и $\rho_3 = \rho_4 \neq 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{1}{\alpha_{13}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = -\frac{1}{\alpha_{24}}.$$

В данном случае $\alpha_{13} \neq 0$ и $\alpha_{24} \neq 0$, поэтому собственные значения $\rho_1 = \rho_2$ и $\rho_3 = \rho_4$ могут быть любыми, кроме нуля. $\square$

Предложение 110. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $2.1^1.2$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$ и $\rho_3 = \rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{1}{\alpha_{13}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

В данном случае $\alpha_{13} \neq 0$, поэтому собственные значения $\rho_1 = \rho_2$ могут быть любыми, кроме нуля. $\square$

Предложение 111. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $2.1^3.1$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 > 0$ и $\rho_3 = \rho_4 < 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{\alpha_{33}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = \frac{1}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае α_{33} и α_{44} разного знака, поэтому одна пара собственных значений будет положительна, вторая — отрицательна. С точностью до переобозначения собственных значений, будем считать, что $\rho_1 = \rho_2 > 0$ и $\rho_3 = \rho_4 < 0$. $\square$

Предложение 112. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $2.1^3.2$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 > 0$, $\rho_3 = \rho_4 > 0$ или $\rho_1 = \rho_2 < 0$, $\rho_3 = \rho_4 < 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{\alpha_{33}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = -\frac{1}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае α_{33} и α_{44} разного знака, поэтому обе пары собственных значений будут одного знака — либо одновременно положительны, либо одновременно отрицательны. $\square$

Предложение 113. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $2.1^3.3$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 > 0$ и $\rho_3 = \rho_4 < 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{1}{\alpha_{33}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = -\frac{1}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае α_{33} и α_{44} разного знака, поэтому одна пара собственных значений будет положительна, вторая — отрицательна. С точностью до переобозначения собственных значений, будем считать, что $\rho_1 = \rho_2 > 0$ и $\rho_3 = \rho_4 < 0$. $\square$

Предложение 114. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $2.1^3.4$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$ и $\rho_3 = \rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{\alpha_{33}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

В данном случае α_{33} может быть как больше нуля, так и меньше, поэтому собственные значения $\rho_1 = \rho_2$ могут быть любыми, кроме нуля. $\square$

Предложение 115. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $2.1^3.5$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$ и $\rho_3 = \rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{1}{\alpha_{33}}, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

В данном случае α_{33} может быть как больше нуля, так и меньше, поэтому собственные значения $\rho_1 = \rho_2$ могут быть любыми, кроме нуля. $\square$

Предложение 116. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $2.1^4.1$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда*

- *либо $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1\bar{1}1\bar{1}\}$ с двумя совпадающими парами комплексно-сопряженных собственных значений*

$$\rho_1 = \bar{\rho}_2 = \rho_3 = \bar{\rho}_4 \neq 0;$$

- *либо $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным ненулевым собственным значением.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ при $\alpha_{23} \neq 0$ имеет тип Сегре $\{1\bar{1}1\bar{1}\}$ с двумя парами комплексно-сопряженных собственных значений, причем эти пары совпадают:

$$\rho_1 = \bar{\rho}_2 = \rho_3 = \bar{\rho}_4 = \frac{2\alpha_{24}}{\alpha_{23}^2 + \alpha_{24}^2} + \frac{2\alpha_{23}}{\alpha_{23}^2 + \alpha_{24}^2} i.$$

Покажем, что ρ_1 может быть произвольным ненулевым комплексным числом. Пусть

$$\frac{2\alpha_{24}}{\alpha_{23}^2 + \alpha_{24}^2} + \frac{2\alpha_{23}}{\alpha_{23}^2 + \alpha_{24}^2} i = x + yi,$$

где $x^2 + y^2 \neq 0$. Тогда можно выразить

$$\alpha_{23} = \frac{2y}{x^2 + y^2}, \quad \alpha_{24} = \frac{2x}{x^2 + y^2},$$

что верно для произвольных x и y таких, что $x^2 + y^2 \neq 0$.

При $\alpha_{23} = 0$ оператор Риччи имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением
$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \frac{2}{\alpha_{24}}.$$
В данном случае $\alpha_{24} \neq 0$, поэтому собственное значение может быть любым, кроме нуля. □

Предложение 117. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $2.2^1.1$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением
$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \frac{3\alpha_{22}}{2\alpha_{24}^2}.$$
В данном случае на α_{22} нет никаких ограничений, поэтому собственное значение может быть любым. □

Предложение 118. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $2.4^1.1$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 \neq 0$ и $\rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями
$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = -\frac{1}{2\alpha_{22}}, \quad \rho_4 = 0.$$
В данном случае α_{22} может быть как меньше нуля, так и больше, поэтому собственное значение $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ может быть любым, кроме нуля. □

Предложение 119. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $2.4^1.2$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением неравным нулю.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением
$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{3}{\alpha_{44}}.$$
В данном случае α_{44} может быть как меньше нуля, так и больше, поэтому собственное значение может быть любым, кроме нуля. □

Предложение 120. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $2.5^1.1$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ или $\{112\}$ с единственным собственным значением неравным нулю.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ при $\alpha_{33} \neq 0$ имеет тип Сегре $\{112\}$ с единственным собственным значением
$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3^2 = -\frac{6}{\alpha_{24}}.$$

В данном случае $\alpha_{24} \neq 0$, поэтому собственное значение может быть любым, кроме нуля.

При $\alpha_{33} = 0$ оператор Риччи имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{6}{\alpha_{24}}.$$

В данном случае $\alpha_{24} \neq 0$, поэтому собственное значение может быть любым, кроме нуля. □

Предложение 121. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $3.2^1.1$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением неравным нулю.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{6}{\alpha_{24}}.$$

В данном случае $\alpha_{24} \neq 0$, поэтому собственное значение может быть любым, кроме нуля. □

Предложение 122. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $3.5^1.1$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением неравным нулю.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{3}{\alpha_{44}}.$$

В данном случае α_{44} может быть как меньше нуля, так и больше, поэтому собственное значение может быть любым, кроме нуля. □

Предложение 123. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $3.5^1.2$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 \neq 0$ и $\rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = -\frac{2}{\alpha_{22}}, \quad \rho_4 = 0.$$

В данном случае α_{22} может быть как меньше нуля, так и больше, поэтому собственное значение $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ может быть любым, кроме нуля. □

Предложение 124. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства $3.5^1.3$ с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 \neq 0$ и $\rho_4 = 0$.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с собственными значениями

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \frac{2}{\alpha_{22}}, \quad \rho_4 = 0.$$

В данном случае α_{22} может быть как меньше нуля, так и больше, поэтому собственное значение $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ может быть любым, кроме нуля. $\square$

Предложение 125. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $4.2^1.1$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с единственным собственным значением неравным нулю.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{6}{\alpha_{24}}.$$

В данном случае $\alpha_{24} \neq 0$, поэтому собственное значение может быть любым, кроме нуля. $\square$

Предложение 126. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $4.2^3.1$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с единственным собственным значением неравным нулю.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{6}{\alpha_{24}}.$$

В данном случае $\alpha_{24} \neq 0$, поэтому собственное значение может быть любым, кроме нуля. $\square$

Предложение 127. *Оператор $\mathcal{R}$ будет оператором Риччи пространства* $6.1^1.1$ *с инвариантной нейтральной метрикой тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ имеет тип Сегре* $\{1111\}$ *с единственным собственным значением неравным нулю.*

Доказательство. В данном случае оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$ с единственным собственным значением

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{6}{\alpha_{24}}.$$

В данном случае $\alpha_{24} \neq 0$, поэтому собственное значение может быть любым, кроме нуля. $\square$

References

[1] J. Milnor, *Curvature of left invariant metric on Lie groups*, Advances in mathematics, **21** (1976), 293–329.

[2] V.N. Berestovsky, *Homogenious Riemannian manifolds of positive Ricci curvature*, Mat. Zametki., **55**:3 (1995), 334–340.

[3] E.D. Rodionov, V.V. Slavkii, *Curvature estimations of left invariant Riemannian metrics on three dimensional Lie groups*, Differential Geometry and Application. Proceeding of the 7th International Conference, Brno, 1999.

[4] Yu.G. Nikonorov, E.D. Rodionov, V.V. Slavskii, *Geometry of homogeneous Riemannian manifolds*, Journal of Mathematical Sciences, **146** (2007), 6313–6390.

[5] O. Kowalski, S. Nikcevic, *On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds*, Geometriae Dedicata, **1** (1996), 65–72.

[6] O.P. Gladunova, D.N. Oskorbin, *Application of symbolic computing packages to the study of the spectrum of the curvature operator on metric Lie groups*, Izvestiya of Altai State University, **1/1** (2013), 19–23. (in Russian)

[7] D.S. Voronov, O.P. Gladunova, *Signature of the one-dimensional curvature operator on three-dimensional Lie groups with a left-invariant Riemannian metric*, Izvestiya of Altai State University, **1-2** (2010), 24–28. (in Russian)

[8] G. Calvaruso, O. Kowalski, *On the Ricci operator of locally homogeneous Lorentzian 3-manifolds*, Cent. Eur. J. Math., **7**:1 (2009), 124–139.

[9] P.N. Klepikov, *On admissible values of the spectrum of the operator of one-dimensional curvature of three-dimensional Lie groups with a left-invariant Lorentzian metric*, Mathematics and its applications: fundamental problems of science and technology. Proceedings of the All-Russian Conference. Altai State University, 2015, 87–95. (in Russian)

[10] S.V. Klepikova, O.P. Khromova, *Investigation of Curvature Operators on Three-Dimensional Locally Homogeneous Lorentzian Manifolds with Application of Symbolic Computations Packages*, Izvestiya of Altai State University, **4(96)** (2017), 112–115. (in Russian)

[11] S.V. Klepikova, O.P. Khomova, *On prescribed values of the sectional curvature operator on three-dimensional locally homogeneous Lorentzian manifolds* // Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya Sovremennaya Matematika i ejo Prilozheniya. Tematicheskie Obzory, **180** (2020), 41–49. (in Russian)

[12] A.G. Kremlev, Yu.G. Nikonorov, *The signature of the Ricci curvature of left-invariant Riemannian metrics on four-dimensional lie groups. The unimodular case*, Siberian Advances in Mathematics, **19** (2009), 245–267.

[13] A.G. Kremlev, Yu.G. Nikonorov, *The signature of the Ricci curvature of left-invariant Riemannian metrics on four-dimensional Lie groups. The nonunimodular case*, Siberian Advances in Mathematics, **20** (2010), 1–57.

[14] Yu.G. Nikonorov, *Negative eigenvalues of the Ricci operator of solvable metric Lie algebras*, Geometriae Dedicata, **170** (2014), 119–133.

[15] O.P. Khromova, *Application of analytical computing packages to determine the main geometric characteristics of non-reductive homogeneous pseudo-Riemannian manifolds*, Mathematics and its applications: fundamental problems of science and technology. Proceedings of the All-Russian Conference. Altai State University, 2015, 320–326. (in Russian)

[16] P.N. Klepikov, E.D. Rodionov, *Application of Symbolic Computation Packages for Investigation of Algebraic Ricci Solitons in Homogeneous (Pseudo)Riemannian Manifolds*, Izvestiya of Altai State University, **4(96)** (2017), 108–111. (in Russian)

[17] G. Calvaruso, A. Zaeim, *Conformally flat homogeneous pseudo-riemannian four-manifolds*, Tohoku Math. J., **66** (2014), 31–54.

[18] B.B. Komrakov, *Einstein-Maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces*, Lobachevskii J. Math., **8** (2001), 33–165.

[19] B. Anderson, J. Jackson, M. Sitharam, *Descartes' Rule of Signs Revisited*, The American Mathematical Monthly, **105**:5 (1998), 447–451.

[20] P. Bueken, M. Djorić, *Three-dimensional Lorentz metrics and curvature homogeneity of order one*, Ann. Glob. Anal. Geom., **18** (2000), 85–103.

Pavel Nikolaevich Klepikov
Novosibirsk State University,
str. Pirogova, 1,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: klepikov.math@gmail.com

Evgeny Dmitrievich Rodionov
Altai State University,
pr. Lenina, 61,
656049, Barnaul, Russia
Email address: edr2002@mail.ru